無窮與集合

譯者　黃克寧

徐氏基金會出版

序

在世界科學文明已進步到太空時代的今天，任何一個人都了解發展科學的重要性，談發展科學，必須提高大家研究科學的興趣，才能按步就班地求發展。

本基金會對於海內外中國人士從事發展科學研究的情況，向來都寄予深切的關心，過去六年，本會曾資助大學理工科畢業學生前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯世界著名科學技術書籍出版供給在校學生及社會大衆閱讀，其目的都在幫助促進科學發展。

我們深深希望自由中國的科學家和工程師們了解本基金會的用意，主動的重視科學技術書籍爲發展科學的基本工具，從事寫作和翻譯，並且熱誠盼望與我們聯繫合作，我們願意運用基金從事各種出版工作，共同爲我們邁進工業化的途徑而努力。

徐氏基金會

1968年1月

徐氏基金會啓事

一、凡對本書任何一部份，或本會所出版之其他書籍，能在內容及文字方面，提供建議，致使讀者更易迅捷了解書中意義者，如被採納，當致酬美金十二元五角至一百二十五元（折合新臺幣五百元至五千元），以示謝意。

二、本基金會爲了提倡及鼓勵我國同胞研究科學的興趣，進一步希望達到發展科學的目的，特公開徵求下面各類有關的中文創作及翻譯稿件。

甲、自然科學類:

數學，化學，物理學，及生物學。

乙、技術及工程類:

機械工程，電機及電子工程，無線電，電視，電信，汽車修理，鐘錶修理及製造，房屋建築，木工，水泥工等以及機械工程，電機工程及土木工程的製圖。

丙、醫學類:

個人及家庭保健衛生等一般醫學常識及教育方法。

凡是應徵的稿件必需採用通俗而流暢的筆調、使得社會一般人士及中等以上學校的學生容易吸收及了解爲原則，至於科學同技術方面的名詞應以國立編譯館所譯經教育部審定公佈的名詞爲標準。

稿酬: 應徵稿件經過本會審查接受者，一律按每一千字新臺幣一百元（美金二元五角）核付稿費，如果本會認爲

內容特佳，並得提高其稿酬。

二、獎助：經本會接受付給稿費以後之創作及譯稿，其版權卽屬於本會所有，並由本會出版，分別在臺灣、香港、星加坡等地區銷售。

本會將在各該書籍出版以後的第二年年底，核計其總銷售量，並分別贈與作者及翻譯者下面三種獎金。

1. 銷數佔第一位者：獎給新臺幣二十四萬元（美金六千元）
2. 銷數佔第二位者：獎給新臺幣一十六萬元（美金四千元）
3. 銷數佔第三位者：獎給新臺幣八萬元（美金二千元）

獎助辦法實行期間：自卽日起，每年頒獎一次，暫定實行三年。

應徵者請直接向香港郵政第一二八四號信箱徐氏基金會接洽

目 録

第一章　導言

“解析幾何與微積分總是或隱或顯地涉及無窮集合。”這是赫斯多[1](1914)在他的**集合論初步**裏所講的。要想眞正通曉數學各部門，就非得具有一些它們共同基礎的知識不可，這基本的知識就是集合論。

或者要問，數學倒底講些什麼呢？不外是一些數的集合啦！點的集合啦！——通常總是無窮集合，也就是說含無窮多個物件的集合。

讀者或許還要問，是不是可以用數學分析來探求**無窮**（infinite）[2]，這樣無窮就能够由數學定律與數學公式來處理。問得不錯，然而應用這種方法正是集合論的精髓所在。因此我們心目中的無窮概念，絕不可與模糊的感情觀念或非數學的無窮（形而上學的無窮）混淆。

在康脫[3]以前，無窮在數學上還是個含糊晦澀的部份，旣使到了1831年，高斯[4]還是想：“無窮只是實際上在討論到極限時的一種表達方式，因爲有些比率不像另一些比率可任意趨近于某一極限，反可無限地增大[5]”。高斯他自己就不主張採用“**無窮數**”的字樣，以爲它是數學上所不容的[6]，他認爲無窮只是極限裏一種無限增大的過程：$\lim_{x\to\infty}\cdots$[7]

康脫的老前輩，巴札諾[8]也認爲[9]數學裏的無窮充滿了反論（矛盾），無法以算學來處理。然而康脫却告訴我們如何藉用他導出的明確判分的**無窮數**（infinite numbers）以及嚴格定義了的運算法則來計算“無窮”：“…**那是一種推廣；也就是實整數數列超過無窮的一種延續。大膽地說，我不僅希望而且堅信，這種推廣早晚要被認爲徹頭徹尾都是簡單、合理而且自然的。**”

十年後康脫才逐漸體會到，這概念對於數學更進一步的發展是不可

或缺的，於是決意發表這創見。就在那本著述中，他把用於有窮數的定律與法則都一般化，使它們不再限於有窮數的範圍。他說明如何應用有窮集合的方法來計算無窮集合。他以一些明白定義了的概念，像**順序**（order）（這要回溯及狄德肯Dedekind）、**數額**或**基數**（power or cardinal number）、**可數性**（denumerability）等，把集合論變爲一種學科，並且不再有無窮與有窮間在根本上的隔閡[10]——把無窮變成可以理解的。

今日我們知道，就如伊爾貝[11]所說，康脫從此"創立了數學上最廣汎、最有力的一部門；一個沒人能把我們趕出去的天堂[12]"。集合論乃人類智慧最特出、最優美的一種創作；它的概念推定與論証方法使數學研究各部門再度生氣蓬勃。由集合論就可以知道康脫的主張，"**數學的本質在於它的無限制性**。（The essence of mathematics lies in its freedom.）"是很有道理的。

數學就在提問題上發揮了它的無限制性。誰不曾提到過下述的問題呢？

整數比偶數多嗎？

無界直線含的點比線段含的點多嗎？

平面含的點比空間含的點少嗎？

有理數密集于數標尺上嗎？

尤其是$\infty+1$、$\infty+3$、∞^2各代表什麼呢？

人們總是避免公開談到這些問題，因爲這種問法似乎太天眞或者無聊，更因爲他們根本不懂。然而只要這些問題有適當的措詞，集合論都能一一予以數學上嚴密清晰的解答。

一般集合論的基礎至今已經建立了有半個世紀以上。要理解它根

本不需要具備任何必須的專門知識。所需要的只是對論証“**無窮大**”有興趣，對領悟稍微難一點的概念有耐心。雖然集合論是出自直觀的具體事物，卻仍然達到一個非常高階的抽象(13)。

本書只是集合論的初步介紹。在前面幾頁裏，將用大家熟悉的有窮集合來導出基本概念。雖然有窮集合論就只是些算術與排列組合，但對於提供集合論的專有名詞與符號還是很有幫助的。這些概念也就供給了接着討論無窮集合的基礎。關於集合一般理論的討論，本書以序集合爲結尾，並附上一些點集論的重要定理。至於會產生矛盾的定義只在結論那一章裏提出來。

(1) 譯註：F. Hausdorff

(2) 譯註：讀者可曾注意到 infinite [in'finit], finite ['fainait], infinitive [in'finitiv] 等字的發音。

(3) 譯註：Georg Cantor (1845—1918)

(4) 譯註：Karl F. Gauss (1777—1855)

(5) 譯註：能趨近于某一極限的比率，就可用有窮數來代表此極限。例如，當 $x \to 0$，比率 $\frac{1}{x+1} \to 1$，即 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x+1} = 1$，然而比率 $\frac{1}{x}$ 當 $x \to 0$ 時卻不能趨近于某一極限，反而可變得比任何已知的有窮數還要大，爲了能用一符號來表示此比率可無限的變大的意義，就創用了符號“∞”，因此如果說某比率的極限是∞，意思也就是說此比率在某種情況下可無限地變大。高斯所認爲的無窮就是“∞”，當然“∞”根本不是數，只是爲了表達比率的某種趨向而創用的符號，如 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

(6) 譯註：因認爲無窮不是數。

(7) 譯註：請參閱第三章第一節2。

(8) 譯註：Bolzano (1781—1848)

(9) 原註：在他 1851 年出版的一本遺作裏所說的。

(10) 譯註：用根本上相同的定義，來定義有窮數與無窮數，從此有窮數與無窮數是一家人了。

(11) 譯註：David Hilbert (1861—1932)

(12) 譯註：在天堂裏萬物復甦，一切欣欣向榮、生生不息。

(13) 譯註：見第四章第一節註。

第二章　有窮集合

第一節　集合 Set，元素　Element，集合的相等 Equality of Sets

1. 集合是什麼呢？那並非日常談到許多人、許多船、或者許多東西的時候，在我們的語氣中所經常指的那種[1]。而是：

集合就是我們的知覺或思想中，明確的、各別的物件的聚合。而那些物件就叫作集合的元素。

A set is a collection of definite distinct objects of our perception or our thought, which are called elements of the set.[2]

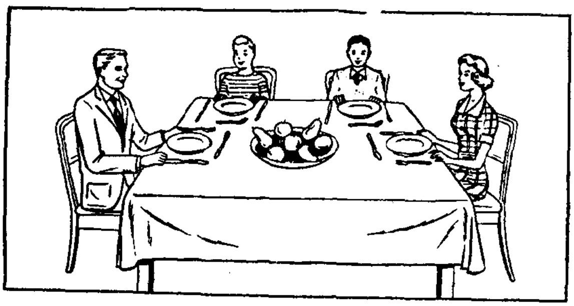


圖 1 在王家的餐廳裡

2. 以下是集合的一些例子：

(*a*)　圖 1 裏坐在桌旁的四個人形成一個四人集合，因為他們是我們"知覺中"四個"**明確的**""**各別的**"物件。我們把王伯父、王伯母、與他們的兒子王大偉、王小華全部看作一個整體，這四個人合起來就是王家的集合。四張椅子形成一個四元素的集合；四把湯匙、四把叉、四把刀、四個盤子、各形成一個四元素的集合。如果我們定義B的元素是餐具，那末所有的餐具就可看作形成一個十二元素的集合B。

在果盤裏有一個七個水果的集合。我們也可以說：果盤裏有一個四個蘋果的集合與一個三個梨子的集合。

注意：那些元素才屬於集合呢？這就要看集合本身各別的特性而定了。並且每件東西都要能確定是不是集合裏的元素。王家一切男性分子的集合，就可確定含有元素：王伯父、王大偉、王小華；王家女性分子的集合就只含一個元素 ——王伯母。就數學上來說，是可以有小到只含一個元素的集合的。爲了使集合更一般化，最好還是有空的集合。

空集合不含任何元素。

圖 1 果盤裏李子的集合就是**空集合**（empty set 或 null set）[3]的一個例子。

(*b*) 如果某畢業班有 15 位學生，這 15 個元素就形成畢業生的集合。這個集合的性質就是定作：每個元素都是這畢業班裏的一位學生。

假設這 15 位學生的教室只有 15 個座位，我們由排列律[4]就知道，一共可以有 $15!=1,307,674,368,000$ 種不同的坐法。因此各種坐法的集合含有 1.3 兆多個元素。（1.3兆秒合四萬多年！）

3. 在數學上我們很少聚合實在物件來構成集合，而通常都是用抽象物件（我們思想中的物件[5]）。抽象物件就是數、點、三角形等諸如此類的東西。

4. 底下就是抽象集合的例子：

(*a*) 一切個位自然數所構成的集合 M 含有元素 1、2、3、4、5、6、7、8、9，這九個明確的，各別的物件都屬於集合 M，因爲它們都具有特性：是個位自然數。

(*b*) 令集合 N 含數字 9、8、7、 、5、4、3、2、1。爲了表明某集合的元素是那些東西，我們 把元素放在大括弧內。因此寫作：

$M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$

$N=\{9,8,7,6,5,4,3,2,1,\}$

“5是M的一個元素”與“5是N的一個元素”分別用符號“$5\in M$”與“$5\in N$”表示。“$\in$”唸作“**是……的一個元素**”或“**屬於**”；相反地，“$\notin$”表示“**非……的一個元素**[5]”

5. 前面的例子裏，集合N與集合M含有相同的元素。除了元素的排列方式外，兩集合可說是完全相同。這樣我們就說，集合M與集合N相等，並且寫作$M=N$.

兩集合相等，若且唯若它們含有相同的元素。

由這個定義我們知道：相等的關係是**反身的**（reflexive），是**對稱的**（symmetric），而且是傳遞的（transitive）。也就是：

(a)　$M=M$

(b)　若$M=N$，則$N=M$

(c)　若$M=N$，$N=P$，則$M=P$

6. 康脫的集合定義要求元素是**明確的**而且是**各別的**（definite and distinct）。在同一個集合裏，相同的元素不能出現幾次。因此字母g,e,o,m,e,t,r,y，必須去掉一個“e”才能為一集合。所以

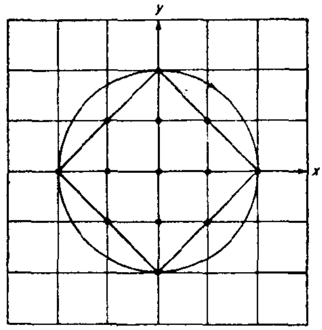
$M=\{e,g,m,o,r,t,y\}$

7. 幾何裏面的集合：

(a)　界限於圓面積$x^2+y^2\geq 4$內的格子點[7]集合K含13個點。（見圖2）。

(b)　在頂點為（0，2），（2，0），（0，−2），（−2，0）的正方形上及內的格子點集合Q含有跟上面的集合相同的元素。因此這兩個點集合相等，並且寫作$K=Q$

圖 2 格子點的集合。



(1) 譯註：因爲那些是含糊不明確的物件的聚合。

(2) 原註：由德文直譯是 A set is a bringing together into a whole of definite well-distinguished objects of our perception or thought-which are to be called the elements of the set. (Georg Cantor)

(3) 譯註：通常以ϕ 表空集合。

(4) 原註：n 個不同物件的排列數是 $n!$。這唸作"n 階乘"並定義

$$n! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots n$$

(5) 譯註：實在物件是"知覺中"的物件（見 2,(a)，抽象物件是"思想中"的物件，請再回顧一下集合的定義。

(6) 原註：所有的符號都載在第七章第四節的彙編裏。

(7) 原註：格子點就是整數坐標的點。

練 習

1. 從您四周找出可作集合元素的東西。（提示：椅、座位、書……）。
2. 在例 7 裏，我們把 K 與 Q 中位於圓及正方形上的點除掉後，二個新的集合是不是還相等？
3. 以圓 $x^2+y^2=12$ 與 $x^2+y^2=4$ 爲界的區域內的格子點集合是空集合嗎？（請作圖）

4. 試作出一切眞分數的集合，但分子分母必須是個位互質自然數。

5. 分子分母都是個位互質自然數的一切假分數的集合爲什麼正好比第四題的集合少了八個元素呢？

第二節　子集 Subset，補集 Complementary Set，聯集 Union，交集 Intersection

1. **如果集合N的每一個元素也是集合M的元素，我們就說集合N是集合M的一個子集 (Subset)。(並且說M是N的一個母集Superset)** 。而寫作："若 $a \in N$ 必有 $a \in M$，則 $N \subseteq M$"，"$\subseteq$"唸作"**爲……的一個子集**"或"**包含於**"。

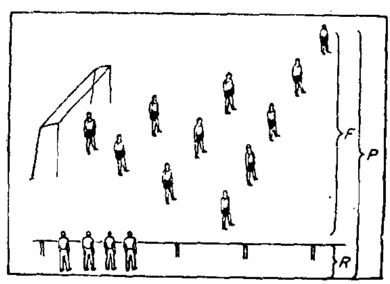
又若 $N \neq M$，則稱 N 爲 M 的一個**眞子集**（proper subset）並寫作："$N \subset M$"唸作"**N爲M的一個眞子集**"，像這樣，M 就至少有一個元素不屬於 N.

又若 $N = M$，則稱 N 爲 M 的一個**假子集**（improper subset），要注意，任何集合也一定是它本身的一個假子集(1)。我們並公認由定義：

空集合是任何集合的一個子集。

2. **如果N是M的一個眞子集，那末由M中不屬於N的元素所構成的集合R叫做N關於M的補集(Complementary set to N over M)。** 寫作"$R = M - N$"(2)

圖 3　集合 P；子集 F；補集 R



3. **例**：由畢業班（見 I，2，(b)）的 15 人中選出一部分人來組一個足球隊。那末選手的集合 F 就是畢業班集合 P 的一個子集。F 所有的 11 個元素同時也都是 P 的元素，但是 P 卻有些元素不含於 F。因此 F 是 P 的眞子集。F 關於 P 的補集 R（$R=P-F$）含有畢業班裏四位不玩球的觀衆。此處 R 也是 P 的子集。我們可將這些性質簡寫如下：

$$F \subseteq P\ ;\ R=P-F\ ;\ R \subsetneq P$$

這 11 位學生可以 11！種不同的方法，編排於足球隊的 11 個位置。除了 11！= 39,916,800 種不同的編排法外，還可從 15 位畢業生中選取不同的選手來組隊。如果就集合 P 的 15 個素來構成一切可能的 11 個元素的子集，就可以有

$$\binom{15}{11}=\frac{15!}{11!\ 4!}=1365^{(3)}$$ 個這種子集。

因此，選自 15 位畢業生的 11 位選手的一切編排法所構成的集合

含有 $11!\cdot\binom{15}{11}=54,486,432,000$ 個元素。

4. 由集合 $M=\{1,2,3,\}$ 來構成一切可能的子集。首先是空集合 $M_0=\{\ \}$。含一個元素的集合有：$M_{11}=\{1\}$；$M_{12}=\{2\}$；$M_{13}=\{3\}$。含二個元素的集合有：$M_{21}=\{1,2\}$；$M_{22}=\{2,3\}$；$M_{23}=\{2,3\}$。以及假子集 $M_3=\{1,2,3\}$。因此集合 $M=\{1,2,3\}$ 正好有 8 個也就是 2^3 個子集。我們從，由 n 個物件中一次選取 $0,1,2,3,\cdots,p,\cdots,n$ 個的組合公式[4]，很容易就能夠證明底下的定理。

凡 n 個元素的集合必正好有 2^n 個子集[5]。

5. **兩集合的聯集 (Union) 即一切至少屬於兩集合之一的元素所構成**