数值分析学习辅导习题解析

李红 徐长发

华中科技大学出版社

396

C241
L32

数值分析
学习辅导·习题解析

李　红　徐长发

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数值分析学习辅导·习题解析/李　红　徐长发
武汉:华中科技大学出版社， 2001 年 6 月
ISBN 7-5609-2426-3

Ⅰ. 数…
Ⅱ. ①李…　②徐…
Ⅲ. 数值分析-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. O17

数值分析学习辅导·习题解析　　李　红　徐长发

责任编辑:龙纯曼　　封面设计:刘　卉
责任校对:蔡晓瑚　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

印　　刷:核工业三〇九印刷厂

开本:850×1168　1/32　印张:12.75　字数:308 000
版次:2001 年 6 月第 1 版　印次:2002 年 1 月第 2 次印刷　印数:4 001—10 000
ISBN 7-5609-2426-3/O·227　定价:15.80 元

(本书若有印装质量问题，请向出版社发行部调换)

内 容 提 要

本书是为理工科各专业研究生、本科生学习“数值分析”、“计算方法”课编写的辅导教材，主要内容包括函数插值与逼近，数值积分与数值微分，常微分方程数值解，方程求根，线性代数方程组的直接法与迭代解法等. 本书各章都给出了内容提要，基本要求，例题选讲，习题及习题解答，最后编有模拟试题.

本书还可作为数学系、信息与计算科学系及其他专业大学生学习“数值分析”时的参考书，对参加同等学力人员申请硕士学位综合水平全国统一考试中的“数值分析”考试也极有参考价值.

前　　言

科学计算能力是跨世纪人才不可或缺的，高等教育中如何培养学生科学计算的能力正日益受到关注，已成为当前教育改革的核心和焦点之一。

数值分析课程在培养学生科学计算能力上具有不可替代的作用。现今，已有众多数值分析教材出版，但与之相适应的教辅书尚不多见，编著一本数值分析辅导教材是很有必要的，因此，我们编著了《数值分析学习辅导》一书。

该书包含下述内容：误差的有关知识，插值法，数值积分与微分，常微分方程数值解，非线性方程求根，线性代数方程组求解及函数逼近与计算。全书共分为九章，前八章结构均由内容提要、基本要求、例题分析、习题及习题解答五部分组成，第九章为模拟试题。

本书旨在为专、本科理科学生及工科大学生、研究生学习“计算方法”、“数值分析”等课程提供一本有较强指导性和可读性的辅导教材，同时，它对备考硕士研究生、博士研究生以及在职申请硕士学位综合性考试的读者也是有极大帮助的。

限于水平，错误和不妥之处恳请读者批评指正。

编者

2001.2.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第一章　误差分析

一、内容提要

本章主要是论述误差的概念及其简单理论．其中包括：

1. 误差的来源

误差的来源是多方面的，但主要有四个方面．

(1)模型误差

反映实际问题有关量之间关系的计算公式，即数学模型，通常只是近似的．由此产生的数学模型的解与实际问题的解之间的误差称为**模型误差**．

(2)观测误差

数学模型中包含的某些参数(如时间、长度、电位等等)往往通过观测而获得，由观测得到的数据与实际的数据之间是有误差的，这种误差称为**观测误差**．

(3)截断误差

求解数学模型所用的数值计算方法如果是一种近似的方法，那么只能得到数学模型的近似解，由此产生的误差称为**方法误差**或**截断误差**．

(4)舍入误差

由于计算机的字长有限，参加运算的数据以及运算结果在计算机上存放会产生误差，这种误差称为**计算误差**或**舍入误差**．

在数值分析中，主要研究截断误差和舍入误差对计算结果的影响，而一般不考虑模型误差和观测误差．

2. 误差的基本概念

(1)绝对误差

绝对误差是指准确值与其近似值之差．设 x^* 是准确值 x 的一个近似值，则 $e=x-x^*$ 为 x^* 的绝对误差．$|e|$的一个上界 ε^* 叫做近似值的**误差限**．一般来讲，误差限都取到某位的半个单位．

(2)相对误差

用绝对误差来刻画近似数的精确程度是有局限性的，因为它没有反映出它在原数中所占的比例．记

$$e_r=\frac{x-x^*}{x},$$

e_r 称为近似值 x^* 的**相对误差**．由于准确值 x 未知，实际上总把 $\frac{x-x^*}{x^*}$ 作为 x^* 的相对误差．相对误差一般用百分比表示．

相对误差绝对值的一个上界 ε_r^* 称做近似值的**相对误差限**．

(3)有效数字

若近似值 x^* 的误差限是某一位的半个单位，设该位到 x^* 的第一位非零数字共有 n 位，则称 x^* 有 **n 位有效数字**．

有效数字是表示近似数准确度的另一重要方法，它是由组成近似数的数字个数来表示近似数的精确度的．

若 x^* 有 n 位有效数字，可写成标准化形式：

$$x^*=\pm 0.a_1a_2a_3\cdots a_n\times 10^m, \tag{1.1}$$

其中 $a_1,\cdots,a_n$ 是 0 到 9 中的一个数字，且 $a_1\neq 0$，m 为整数．

有效数字与相对误差限的关系：

用(1.1)式表示的近似数 x^*，若 x^* 具有 n 位有效数字，则其相对误差限为

$$\varepsilon_r^*\leqslant\frac{1}{2a_1}\times 10^{-(n-1)}. \tag{1.2}$$

反之，若 x^* 的相对误差限

$$\varepsilon_r^*\leqslant\frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-(n-1)}, \tag{1.3}$$

则 x^* 至少具有 n 位有效数字．

3. 数值运算的误差估计

设近似数 x_1^* 与 x_2^* 的误差限分别为 $\varepsilon(x_1^*)$ 及 $\varepsilon(x_2^*)$，则它们进行加、减、乘、除运算得到的误差限分别为

$$\begin{cases}\varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) = \varepsilon(x_1^*) \pm \varepsilon(x_2^*), \\ \varepsilon(x_1^* \cdot x_2^*) \approx |x_1^*|\varepsilon(x_2^*) + |x_2^*|\varepsilon(x_1^*), \\ \varepsilon(x_1^*/x_2^*) \approx \dfrac{|x_1^*|\varepsilon(x_2^*) + |x_2^*|\varepsilon(x_1^*)}{|x_2^*|^2} \quad (x_2^* \neq 0).\end{cases} \tag{1.4}$$

函数值的误差：

设有函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，若需要计算 $A = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，而 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的近似值为 $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$，$A$ 的近似值为 $A^* = f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$，于是函数值 A^* 的误差 $e(A^*)$ 为

$$\begin{aligned} e(A^*) &= A^* - A = f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)}{\partial x_k} \right) (x_k^* - x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^* e_k^*, \end{aligned} \tag{1.5}$$

误差限

$$\varepsilon(A^*) \approx \sum_{k=1}^{n} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^* \right| \varepsilon(x_k^*); \tag{1.6}$$

而 A^* 的相对误差限为

$$\varepsilon_r^* = \varepsilon_r(A^*) = \frac{\varepsilon(A^*)}{|A^*|} \approx \sum_{k=1}^{n} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^* \right| \frac{\varepsilon(x_k^*)}{|A^*|}.$$

4. 数值运算中的一些原则

数值运算总是在一个预先设计好的算法中进行的．所谓算法就是一个有限的基本运算序列，这个序列规定了怎样从输入数据去计算出问题的解．由于运算是在计算机上进行的，而计算机的字长有限，因而产生舍入误差．为减小舍入误差的影响，设计算法时应遵循以下一些原则．

1）要避免除数绝对值远远小于被除数绝对值的除法；

2）要避免两相近数相减；

3）要防止大数“吃掉”小数；

4）注意简化计算步骤，减少运算次数；

5）要有数值稳定性，即能控制舍入误差的传播．

二、基本要求

1）误差是用来衡量数值方法好与坏的重要标志，为此对每一个方法都要注意误差分析，可结合一些实际问题加深理解误差概念和理论的实际意义．

2）在弄清楚基本概念以及它们之间的内在联系的基础上，会处理最常见的一般运算结果和解决某些实际问题．

三、例题选讲

例 1 求 $\sqrt{3}$ 的近似值，使其绝对误差限精确到 $\frac{1}{2}\times10^{-1}$，$\frac{1}{2}\times10^{-2}$，$\frac{1}{2}\times10^{-3}$.

解 因为 $\sqrt{3}=1.73205\cdots$. 由于

$$\varepsilon^*(1.7)=|\sqrt{3}-1.7|=0.03205\cdots<0.05,$$

$$\varepsilon^*(1.73)=|\sqrt{3}-1.73|=0.00205\cdots<0.005,$$

$$\varepsilon^*(1.732)=|\sqrt{3}-1.732|=0.00005.$$

所以 $x_1^*=1.7$，$x_2^*=1.73$，$x_3^*=1.732$.

例 2 测量一木板长是 954cm，问测量的相对误差是多大?

解 因为实际问题所截取的近似数，其绝对误差限一般不超过最小刻度的半个单位，所以当 $x=954\text{cm}$ 时，有 $\varepsilon^*=0.5\text{cm}$，其相对误差限为

$$e_r(954)=\frac{0.5}{954}=0.0005241\cdots$$

$$<0.000525=0.0525\%<0.053\%.$$

注：此处取 $\varepsilon_r^*=0.053\%$ 作为相对误差限而不取 0.0525%，也

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

不取 0.052%作为相对误差限，是因为绝对误差限 0.5 本身就是近似的数，所以商多取位数是无意义的．不取 0.052%是因为要求上界，其估值只能增不可减．

例 3 用最小刻度为毫米的卡尺测量直杆甲和直杆乙，分别读出长度 $a=312\text{mm}$，和 $b=24\text{mm}$. 问：$e(a)$，$e(b)$，$e_r(a)$，$e_r(b)$各是多少？两直杆实际长度 x 和 y 在什么范围内？

解 $$e(a)=e(b)=0.5\text{mm},$$

$$e_r(a)=\frac{e(a)}{|a|}=\frac{0.5}{312}\approx 0.16\%,$$

$$e_r(b)=\frac{e(b)}{|b|}=\frac{0.5}{24}\approx 2.08\%,$$

$$311.5\text{mm}\leqslant x\leqslant 312.5\text{mm},\quad 23.5\text{mm}\leqslant y\leqslant 24.5\text{mm}.$$

例 4 设 $x^*=-2.18$ 和 $y^*=2.1200$ 分别是由准确值 x 和 y 经过四舍五入而得到的近似值，问 $e(x^*)$，$e(y^*)$，$e_r(x^*)$，$e_r(y^*)$各是多少？

解 $$e(x^*)=0.005,\quad e(y^*)=0.00005,$$

$$e_r(x^*)=\frac{0.005}{2.18}\approx 0.23\%,$$

$$e_r(y^*)=\frac{0.00005}{2.1200}\approx 0.0024\%.$$

注：凡是由准确值经过四舍五入而得到的近似值，其绝对误差限等于该近似值末位的半个单位．

例 5 下列近似值的绝对误差限都是 0.005，$x_1^*=1.38$，$x_2^*=-0.0312$，$x_3^*=0.86\times 10^{-4}$，问，各个近似值有几位有效数字？

解 x_1^* 有三位有效数字，x_2^* 有一位有效数字，x_3^* 没有有效数字．

例 6 已知近似数 x^* 有两位有效数字，试求其相对误差限．

解 利用(1.2)式，已知 $n=2$，但近似数 x^* 的第一位有效数字 a_1 未知，遇到这种情况时，可按第一位有效数字出现的最不利的情况估计，即令 $a_1=1$，则

$$\varepsilon_r^* \leqslant \frac{1}{2a_1}\times 10^{-(n-1)}=\frac{1}{2\times 1}\times 10^{-(2-1)}=5\%.$$

故 x^* 的相对误差限为 5%.

例 7 已知近似数 x^* 的相对误差限为 0.3%，问 x^* 至少有几位有效数字？

解 已知 $\varepsilon_r^*=0.3\%$. 设 x^* 有 n 位有效数字，由于 x^* 的第一个有效数 a_1 没具体给定，而我们知道 a_1 一定是 1,2,…,9 中的一个，由

$$\varepsilon_r^*=0.3\%=\frac{3}{1000}<\frac{1}{2\times 10^2}=\frac{1}{2(9+1)}\times 10^{-1},$$

故由(1.3)式知 $n=2$，即 x^* 至少有 2 位有效数字.

例 8 为使 $\sqrt{70}$ 的近似数的相对误差限小于 0.1%，问查开方表时，要取几位有效数字.

解 设查表时取 n 位有效数字，那么由(1.2)式并注意到 $8\leqslant\sqrt{70}\leqslant 9$ 可取 $a_1=8$. 因此为使 $\sqrt{70}$ 的近似数相对误差限 $\varepsilon_r^*<0.1\%$，只需取 n 使

$$\frac{1}{2a_1}\times 10^{-(n-1)}=\frac{1}{2\times 8}\times 10^{-(n-1)}<0.1\%,$$

得 $n=3$ 即可. 查开方表取 $\sqrt{70}\approx 8.37$.

注：关于有效数字有以下几点说明.

1) 用四舍五入法取准确值的前 n 位作为近似值，则 x^* 必有 n 位有效数字.

2) 有效数字位数相同的两个近似数，绝对误差限不一定相同. 例如，设 $x_1^*=12345$ 及 $x_2^*=0.12345$ 均有五位有效数字，而它们的绝对误差限分别为 $\varepsilon^*(x_1^*)=0.5$，$\varepsilon^*(x_2^*)=0.000005$.

3) 将任何数乘以 10^m ($m=0,\pm1,\pm2,\cdots$)，等于移动该数的小数点，并不影响它的有效数字的位数. 例如，$g=9.80\text{m/s}^2$ 具有三位有效数字，$g=0.00980\times 10^3\text{m/s}^2$ 亦具有三位有效数字. 但 9.8m/s^2 与 9.80m/s^2 含义是不一样的，前者只有两位有效数字，

后者却有三位有效数字．

4)准确值被认为具有无穷位有效数字.

例 9 设有三个近似数

$$a=2.31,\quad b=1.93,\quad c=2.24.$$

它们都有三位有效数字，试计算 $p=a+bc$，$\varepsilon(p)$和 $\varepsilon_r(p)$；并问：p 的计算结果能有几位有效数字？

解

$$p=2.31+1.93\times 2.24=6.6332,$$

$$\varepsilon(p)=e(a)+e(bc)\approx e(a)+|b|e(c)+|c|e(b)$$

$$=0.005+0.005(1.93+2.24)=0.02585,$$

$$\varepsilon_r(p)=\frac{e(p)}{|p|}\approx\frac{0.02586}{6.6332}\approx 0.39\%.$$

因为 $\varepsilon(p)\approx 0.02585<0.05$，所以，$p=6.6332$ 中能有两位有效数字．

例 10 设 $f(x,y)=\dfrac{\cos y}{x}$，$x=1.30\pm 0.005$，$y=0.871\pm 0.0005$. 如果用 $\tilde{u}=f(1.30,0.871)$作为 $f(x,y)$的近似值，则 $\tilde{u}$ 能有几位有效数字？

解

$$\tilde{u}=\frac{\cos 0.871}{1.30}\approx 0.49543.$$

由于

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\cos y}{x^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\sin y}{x}.$$

所以

$$\varepsilon(\tilde{u})\approx\left|\frac{\cos 0.871}{1.30^2}\right|\times 0.005+\left|\frac{\sin 0.871}{1.30}\right|\times 0.0005$$

$$\approx 0.0022<0.005.$$

因而 $\tilde{u}=0.49543$ 能有两位有效数字．

例 11 求二次方程 $x^2-16x+1=0$ 的较小正根，要求有 3 位有效数字．

解 求解方程 $x^2-16x+1=0$，得两根，$x_1=8-\sqrt{63}$，$x_2=8$

$+\sqrt{63}$. 故此方程最小正根为 $x_1=8-\sqrt{63}$. 若取 $\sqrt{63}\approx 7.94$，具有 3 位有效数字，则 $x_1=8-\sqrt{63}\approx 8-7.94=0.06=x_1^*$，只有 1 位有效数字. 若改用

$$x_1=8-\sqrt{63}=\frac{1}{8+\sqrt{63}}\approx\frac{1}{15.94}\approx 0.0627.$$

则此方程最小正根具有 3 位有效数字.

例 12 如果利用四位函数表计算 $1-\cos 2^\circ$，试用不同方法计算并比较结果的误差.

解 用四位函数表直接计算：

$1-\cos 2^\circ\approx 1-0.9994=0.0006$，只有 1 位有效数字.

$1-\cos 2^\circ=\dfrac{\sin^2 2^\circ}{1+\cos 2^\circ}\approx\dfrac{(0.03490)^2}{1.9994}\approx 6.092\times 10^{-4}$，具有 4 位有效数字.

$1-\cos 2^\circ=2\sin^2 1^\circ\approx 6.09\times 10^{-4}$，具有 3 位有效数字.

准确值 $1-\cos 2^\circ=6.0917\cdots\times 10^{-4}$，故以上 3 种算法误差限分别为 0.1×10^{-4}，0.0003×10^{-4}，0.002×10^{-4}.

四、习题

1. 设 $x>0$，x 的相对误差为 δ，求 $\ln x$ 的误差.

2. 设 x 的相对误差为 2%，求 x^n 的相对误差.

3. 下列各数都是经过四舍五入得到的近似数，即误差限不超过最后一位的半个单位，试指出它们是几位有效数字：

$x_1^*=1.1021$，$x_2^*=0.031$，$x_3^*=385.6$，$x_4^*=56.430$，$x_5^*=7\times 1.0$.

4. 利用公式(1.4)求下列各近似值的误差限：

(1) $x_1^*+x_2^*+x_4^*$，(2) $x_1^*\cdot x_2^*\cdot x_3^*$，(3) x_2^*/x_4^*，

其中 x_1^*、x_2^*、x_3^*、x_4^* 均为第 3 题所给的数.

5. 计算球体积，要使相对误差限为 1%，问度量半径 R 时允许的相对误差限是多少？

6. 设 $Y_0=28$，按递推公式

$$Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783} \quad (n=1,2,\cdots)$$

计算到 Y_{100}. 若取 $\sqrt{783}\approx 27.982$（五位有效数字），试问计算 Y_{100} 将有多大误差？

7. 求方程 $x^2-56x+1=0$ 的两个根，使它至少具有四位有效数字（$\sqrt{783}\approx 27.982$）.

8. 当 N 充分大时，怎样求 $\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$？

9. 正方形的边长大约为 100cm，应怎样测量才能使其面积误差不超过 $1\mathrm{cm}^2$？

10. 设 $s=\frac{1}{2}gt^2$，假定 g 是准确的，而对 t 的测量有 ± 0.1 秒的误差，证明当 t 增加时 s 的绝对误差增加，而相对误差却减少.

11. 已测得某住房长 $l^*=4.32\mathrm{m}$，宽 $d^*=3.12\mathrm{m}$，已知 $|l-l^*|\leqslant 0.01\mathrm{m}$，$|d-d^*|\leqslant 0.01\mathrm{m}$，试求住房面积 $S=ld$ 的误差限与相对误差限.

12. 序列 $\{y_n\}$ 满足递推关系

$$y_n=10y_{n-1}-1 \quad (n=1,2,\cdots).$$

若 $y_0=\sqrt{2}\approx 1.41$（三位有效数字），计算到 y_{10} 时误差有多大？这个计算过程稳定吗？

13. 计算 $f=(\sqrt{2}-1)^6$，取 $\sqrt{2}\approx 1.4$. 利用下列算式计算，哪一个得到的结果最好？

$$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6},\ (3-2\sqrt{2})^3,\ \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3},\ 99-70\sqrt{2}.$$

14. $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$，求 $f(30)$ 的值，若开平方用六位函数表，问求对数时误差有多大？若改用另一等价公式：

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

计算，求对数时误差有多大？

15. 若用下列两种方法计算 e^{-5} 的近似值,问哪种方法能提供较好的近似值?

$$(1)e^{-5} \approx \sum_{i=0}^{9}(-1)^i \frac{5^i}{i!} = x_1^*,$$

$$(2)e^{-5} \approx \left(\sum_{i=0}^{9} \frac{5^i}{i!}\right)^{-1} = x_2^*.$$

16. 设 $I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}\mathrm{d}x, n = 0,1,\cdots$,验证 $I_0 = 1 - e^{-1}, I_n = 1 - nI_{n-1}$. 若 $e^{-1} \approx 0.3679$,依次计算 $I_0, I_1, \cdots, I_9$,并证明误差是逐次递增的,且 I_9 严重失真.

五、习题解答

1. **解**
$$\ln x - \ln x^* = \ln \frac{x}{x^*} = \ln \frac{x - x^* + x^*}{x^*} = \ln(\delta + 1) \approx \delta.$$

另解:$e(\ln x) \approx \frac{1}{x}(x - x^*) = e(x) = \delta.$

2. **解**
$$e(x^n) \approx nx^{n-1}(x - x^*),$$
$$e_r(x^n) \approx n\frac{x^{n-1}(x - x^*)}{x^n} = n\frac{x - x^*}{x^*} = ne_r(x) = 0.02n.$$

3. **解** $x_1^* = 1.1021$ 有 5 位有效数字;$x_2^* = 0.031$ 有 2 位有效数字;$x_3^* = 385.6$ 有 4 位有效数字;$x_4^* = 56.480$ 有 5 位有效数字;$x_5^* = 7 \times 1.0$ 有 1 位有效数字.

4. **解** (1)
$$e^*(x_1^* + x_2^* + x_4^*) \leqslant e(x_1^*) + e(x_2^*) + e(x_4^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-4} + \frac{1}{2} \times 10^{-3} + \frac{1}{2} \times 10^{-3} \leqslant 1.05 \times 10^{-3} = \varepsilon^*.$$

(2)
$$e^*(x_1^* \cdot x_2^* \cdot x_3^*) \approx x_2^* \cdot x_3^*(x_1 - x_1^*) + x_1^* \cdot x_3^* \cdot (x_2 - x_2^*) + x_1^* \cdot x_2^*(x_3 - x_3^*)$$

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com