

312188 312188 312188
050395603956039

積分表

徐桂芳編譯

科学技術出版社

積 分 表

徐桂芳編譯

科学技術出版社

內 容 提 要

本表系根據 B. O. Peirce 的積分表編成，列舉了一般的代數函數及超越函數的積分公式，並收集了若干常用的定積分公式及橢圓積分公式等共628條。

為了便於查攷起見，篇末列有附錄一篇，介紹各種有關的輔助公式，并附刊有各種常用的數值表。

各表的使用方法見篇首的查表須知。

本表適于一般工程技術設計計算時作查攷之用，也適于高等學校數學、物理、工程各系學生作參攷之用。

積 分 表

編譯者 徐桂芳

*

科 學 技 術 出 版 社 出 版

(上海建國西路 336 弄 1 号)

上海市書刊出版業營業許可證出〇七九号

中科院文聯合印刷厂印刷 新華書店上海發行所總經售

*

統一書號：13119 · 28

(原新亞版印 8,000 冊)

開本 787×1092 級 1/32 · 印張 5 1/8 · 字數 99,000

一九五六年十月新一版

一九五六年十月第一次印刷，印數 1—5,000

定價：(10)五角

弁　　言

本表是根據 B. O. Peirce 的積分表編成的。內容分爲三部分：

- 一. 查表須知；
- 二. 積分公式；
- 三. 附　　錄。

第一部分查表須知，說明怎樣選擇公式和應用公式；這是編者加進去的，希望對初學微積分和微分方程的讀者有些幫助。

爲求內容的更有條理，原表中的許多部分已經編者加以整理。例如把超越函數的積分公式分爲八類，使讀者更容易找到需要的公式。

編　　者

一九五三

目 錄

一. 查表須知

- I. 公式的選擇
- II. 反三角函數、對數函數、和反雙曲線函數的主值
- III. 間接積分公式

二. 積分公式

I.	基本的積分公式	1—20
II.	有理代數函數的積分公式		
A.	式中含有 $(a+bx)$	21—46
B.	式中含有 $(a+bx^n)$	47—66
C.	式中含有 $(a+bx+cx^2)$	67—89
D.	有理分式	90
III.	根式代數函數的積分公式		
A.	式中含有 $\sqrt{a+bx}$	91—109
B.	式中含有 $\sqrt{a+bx}$ 和 $\sqrt{a+b'x}$	110—123
C.	式中含有 $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ 或 $\sqrt{a^2 - x^2}$	124—159
D.	式中含有 $\sqrt{a+bx+cx^2}$	160—194
E.	式中含有 $(a'+b'x)^n$ 和 $(a+l'x+cx^2)^{m+\frac{1}{2}}$	195—213
IV.	其他代數函數的積分公式	214—235
V.	超越函數的積分公式		
A.	一般的超越函數	236—259
B.	式中僅含有三角函數	260—351
C.	式中含有三角函數和積分變數的幕	352—379

D.	式中含有反三角函數和積分變數的幂	380—400
E.	式中含有指數函數和代數函數	401—413
F.	式中含有指數函數和三角函數	414—424
G.	式中含有對數函數	425—445
H.	式中含有雙曲線函數或反雙曲線函數	446—479
VII.	定積分公式	480—523
VIII.	椭圓積分公式	524—569
VIII.	格林(Green)定理和斯多克司(Stokes)定 理的積分公式	570—587
IX.	普遍的積分公式	588—611
X.	交流電流理論中常見的積分公式	612—628

三. 附 錄

I. 輔助公式

A.	三角函數和反三角函數	629—710
B.	雙曲線函數和反雙曲線函數	711—763
C.	橢圓函數	764—793
D.	貝塞爾(Bessel)函數	794—803
E.	無窮級數和無窮積	804—878
F.	導數	879—933
G.	布阿松(Poisson)微分方程式	934—938

II. 附 表

A.	常用的常數
B.	插值法說明
C.	幾率積分表
D.	橢圓積分表
E.	雙曲線函數表
F.	$\log_{10} e$ 的倍數表
G.	$1/\log_{10} e$ 的倍數表
H.	指數表
I.	e^x 和 e^{-x} 的普通對數表

- J. 自然對數表(五位)
- K. $\Gamma(x)$ 的普通對數表
- L. 三角函數表(三位)
- M. 普通對數表(四位)
- N. 三角函數表(四位)
- O. 強度對照表
- P. 平方根表

一. 查表須知

I. 公式的選擇

形式相同的積分可有幾種不同的結果。公式的選擇不但要看哪一個有意義，並且要看哪一個便於計算，或者形式上比較簡單。

例一。公式 48：

$$\int \frac{dx}{c^2 - x^2} = \frac{1}{2c} \log \frac{c+x}{c-x} = \frac{1}{c} \tanh^{-1} \frac{x}{c}$$

或 $\frac{1}{2c} \log \frac{x+c}{x-c} = \frac{1}{c} \operatorname{ctnh}^{-1} \frac{x}{c}.$

當 $|x| < c$ 時，前面的兩個結果

$$\int \frac{dx}{c^2 - x^2} = \frac{1}{2c} \log \frac{c+x}{c-x} = \frac{1}{c} \tanh^{-1} \frac{x}{c} \quad (48a)$$

有意義，後面的兩個結果

$$\int \frac{dx}{c^2 - x^2} = \frac{1}{2c} \log \frac{x+c}{x-c} = \frac{1}{c} \operatorname{ctnh}^{-1} \frac{x}{c} \quad (48b)$$

沒有意義。但當 $|x| > c$ 時，(48a)沒有意義，所以應選擇 (48b)。例如

(a) $\int_0^1 \frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{4} \log \left[\frac{2+x}{2-x} \right]_0^1 = \frac{1}{4} \log 3.$

(b) $\int_3^4 \frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{4} \log \left[\frac{x+2}{x-2} \right]_3^4 = \frac{1}{4} \log \frac{3}{5}.$

有時為了計算方便形式簡單，我們採用反雙曲線函數而不採用對數函數。例如求下列方程的積分

(1)

$$(c^2 - y^2)dx - dy = 0, \quad |y| < c,$$

得 $\int dx = \int \frac{dy}{c^2 - y^2},$

則 $x + k = \frac{1}{c} \tanh^{-1} \frac{y}{c},$

k 是積分常數，因此求得

$$y = c \tanh c(x + k).$$

例二. 公式 3:

$$\int \frac{dx}{x} = \log x \text{ 或 } \log(-x).$$

當 $x > 0$ 時，採用

$$\int \frac{dx}{x} = \log x;$$

當 $x < 0$ 時，採用

$$\int \frac{dx}{x} = \log(-x).$$

例三. 公式 49, 50, 298, 300, 等等，要看 a, b 的值能使哪一個等式有意義，同時應留意哪一個等式便於計算，或者使我們所研究的問題得到形式比較簡單的結果。

一個不收斂的廣義積分是沒有意義的，應當在查表之前加以留意。

例四. 定積分(見公式 462):

$$\int_{-1}^1 \operatorname{ctnh}^2 x dx = x - \operatorname{ctnh} x \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{1 - e^2}.$$

但是這個廣義積分不收斂，因此求得的結果是沒有意義的。

例五. 定積分(見公式 436, 當 $a = 0$ 時)

$$\int_{-1}^1 \log x^2 dx = x \log x^2 - 2x \Big|_{-1}^1 = -4.$$

這是一個收斂的廣義積分，因此求得的結果是正確的。

II. 反三角函數、對數函數、和反雙曲線 函數的主值

A. 三角函數是週期函數，它們的週期是 2π 或 π :

$$\sin(2n\pi + y) = \sin y,$$

$$\cos(2n\pi + y) = \cos y,$$

$$\tan(n\pi + y) = \tan y.$$

因此它們的反函數是多值函數。本表中所列的這類函數的值都以主值為限。在許多含有三角函數的積分公式中，常引用 $z = \tan \frac{1}{2}x$ 替代式求解，無形之中已經應用主值計算，所以自變數變程的限制是必需的條件。例見公式 300。

B. 指數函數和雙曲線函數也是週期函數。它們的週期是 $2\pi i$ 或 πi :

$$e^{2n\pi i + y} = e^y,$$

$$\sinh(2n\pi i + y) = \sinh y,$$

$$\cosh(2n\pi i + y) = \cosh y,$$

$$\tanh(n\pi i + y) = \tanh y.$$

因此，對數函數和反雙曲線函數在複變數範圍裏都是多值函數。

C. 對數函數和反雙曲線函數能取得實值時，便以實值為主值。反三角函數的主值依照下列規定：

$$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \tan^{-1} x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi, \quad 0 \leq \operatorname{ctn}^{-1} x \leq \pi.$$

$\tan^{-1} x$ 和 $\operatorname{ctn}^{-1} x$ 的主值滿足下列恆等式

$$\tan^{-1} x + \operatorname{ctn}^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$

D. 關於 $\log(x+yi)$.

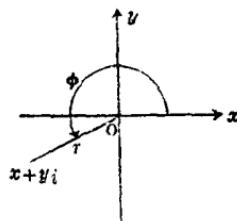
$$\text{公式 } \log(x+yi) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

是容易發生錯誤的，因為 $\log(x+yi)$ 的週期是 $2\pi i$ ，而 $i \tan^{-1} \frac{y}{x}$ 的週期是 πi ，因此 $\log(x+yi)$ 的通值須加上 πi 的奇數倍或偶數倍，要看 x, y 的符號再作決定。最好應用下列公式計算：

$$\log(x+yi) = \log r + \phi i,$$

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



III. 間接積分公式

不定積分的公式可以分為兩類，一類是直接查得結果的，另一類是間接求得結果的。例如

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{k^2 - x^2}},$$

表中無直接公式可查，可間接應用公式 159 ($a = k^2, c = -1, f(x^2) = x^3$):

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} &= \int (u^3 - k^2) du = \frac{u^3}{3} - k^2 u, \quad u^2 = k^2 - x^2 \\ &= -\frac{1}{3} \sqrt{k^2 - x^2} (x^2 + 2k^2). \end{aligned}$$

其他如遞演積分公式也是屬於這一類。

二. 積分公式

I. 基本的積分公式

$$1. \int a \, dx = ax.$$

$$2. \int af(x) \, dx = a \int f(x) \, dx.$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \log x. \text{ 或 } \log(-x). [\log x = \log(-x) + (2k+1)\pi i.]$$

$$4. \int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \text{ 當 } m \neq -1 \text{ 時.}$$

$$5. \int e^x \, dx = e^x.$$

$$6. \int a^x \log a \, dx = a^x.$$

(5)

7. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x$, 或 $-\operatorname{ctn}^{-1} x$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$, 或 $-\cos^{-1} x$.

9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x$, 或 $-\csc^{-1} x$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \operatorname{versin}^{-1} x$, 或 $-\operatorname{coversin}^{-1} x$.

11. $\int \cos x dx = \sin x$, 或 $-\operatorname{coversin} x$.

12. $\int \sin x dx = -\cos x$, 或 $\operatorname{versin} x$.

13. $\int \operatorname{ctn} x dx = \log \sin x$.

14. $\int \tan x dx = -\log \cos x$.

15. $\int \tan x \sec x dx = \sec x$.

16. $\int \sec^2 x dx = \tan x$.

17. $\int \csc^2 x dx = -\operatorname{ctn} x$.

在下列公式中, u, v, w , 和 y 都表示 x 的任意函數:

18. $\int (u+v+w+\text{etc.}) dx = \int u dx + \int v dx + \int w dx + \text{etc.}$

19a. $\int u dv = uv - \int v du$.

19b. $\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$.

20. $\int f(y) dx = \int \frac{f(y) dy}{\frac{dy}{dx}}$.

II. 有理代數函數的積分公式

A. 式中含 $(a+bx)$

應用替代式 $y = a + bx$ 和 $z := (a + bx)/x$, 得下列積分公式:

$$21. \int (a + bx)^m dx = \frac{1}{b} \int y^m dy.$$

$$22. \int x(a + bx)^m dx = \frac{1}{b^2} \int y^m (y - a) dy.$$

$$23. \int x^n (a + bx)^m dx = \frac{1}{b^{n+1}} \int y^m (y - a)^n dy.$$

$$24. \int \frac{x^n dx}{(a + bx)^m} = \frac{1}{b^{n+1}} \int \frac{(y - a)^n dy}{y^m}.$$

$$25. \int \frac{dx}{x^n (a + bx)^m} = - \frac{1}{a^{m+n-1}} \int \frac{(z - b)^{m+n-2} dz}{z^m}.$$

因此有

$$26. \int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} \log(a + bx).$$

$$27. \int \frac{dx}{(a + bx)^2} = - \frac{1}{b(a + bx)}.$$

$$28. \int \frac{dx}{(a + bx)^3} = - \frac{1}{2b(a + bx)^2}.$$

$$29. \int \frac{x dx}{a + bx} = \frac{1}{b^2} [a + bx - a \log(a + bx)].$$

$$30. \int \frac{x dx}{(a + bx)^2} = \frac{1}{b^3} \left[\log(a + bx) + \frac{a}{a + bx} \right].$$

$$31. \int \frac{x dx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^2} \left[-\frac{1}{a+bx} + \frac{a}{2(a+bx)^2} \right].$$

$$32. \int \frac{x^2 dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3} \left[\frac{1}{3}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2 \log(a+bx) \right].$$

$$33. \int \frac{x^3 dx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^3} \left[a+bx - 2a \log(a+bx) - \frac{a^2}{a+bx} \right].$$

$$34. \int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a} \log \frac{a+bx}{x}. *$$

$$35. \int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2} \log \frac{a+bx}{x}.$$

$$36. \int \frac{(a+bx) dx}{a'+b'x} = \frac{bx}{b'} + \frac{ab' - a'b}{b'^2} \log(a' + b'x).$$

$$37. \int (a+bx)^n (a'+b'x)^m dx = \frac{1}{(m+n+1)b} \left((a+bx)^{n+1} (a'+b'x)^m \right. \\ \left. - m(ab' - a'b) \int (a+bx)^n (a'+b'x)^{m-1} dx \right).$$

$$38. \int \frac{(a+bx)^n dx}{(a'+b'x)^m} = -\frac{1}{(m-1)(ab' - a'b)} \left(\frac{(a+bx)^{n+1}}{(a'+b'x)^{m-1}} \right. \\ \left. + (m-n-2)b \int \frac{(a+bx)^n dx}{(a'+b'x)^{m-1}} \right) \\ = -\frac{1}{(m-n-1)b'} \left(\frac{(a+bx)^n}{(a'+b'x)^{m-1}} \right. \\ \left. + n(ab' - a'b) \int \frac{(a+bx)^{n-1} dx}{(a'+b'x)^m} \right) \\ = -\frac{1}{(m-1)b'} \left(\frac{(a+bx)^n}{(a'+b'x)^{m-1}} - nb \int \frac{(a+bx)^{n-1} dx}{(a'+b'x)^{m-1}} \right). \\ * \int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} \log \frac{a+bx}{x}.$$

$$39. \int \frac{dx}{(a+bx)(a'+b'x)} = \frac{1}{ab'-a'b} \cdot \log \frac{a'+b'x}{a+bx}.$$

$$40. \int \frac{dx}{(a+bx)^n(a'+b'x)^m}$$

$$= \frac{1}{(m-1)(ab'-a'b)} \left(\frac{-1}{(a+bx)^{n-1}(a'+b'x)^{m-1}}$$

$$- (m+n-2)b \int \frac{dx}{(a+bx)^n(a'+b'x)^{m-1}} \right).$$

$$41. \int \frac{x dx}{(a+bx)(a'+b'x)}$$

$$= \frac{1}{ab'-a'b} \left(\frac{a}{b} \log(a+bx) - \frac{a'}{b'} \log(a'+b'x) \right).$$

$$42. \int \frac{dx}{(a+bx)^2(a'+b'x)}$$

$$= \frac{1}{ab'-a'b} \left(\frac{1}{a+bx} + \frac{b'}{ab'-a'b} \log \frac{a'+b'x}{a+bx} \right).$$

$$43. \int \frac{x dx}{(a+bx)^3(a'+b'x)}$$

$$= \frac{-a}{b(ab'-a'b)(a+bx)} - \frac{a'}{(ab'-a'b)^2} \log \frac{a'+b'x}{a+bx}.$$

$$44. \int \frac{x^2 dx}{(a+bx)^2(a'+b'x)} = \frac{a^2}{b^2(ab'-a'b)(a+bx)}$$

$$+ \frac{1}{(ab'-a'b)^2} \left[\frac{a'^2}{b'} \log(a'+b'x) + \frac{x(ab'-2a'b)}{b^2} \log(a+bx) \right].$$

$$45. \int (a+bx)^{\frac{1}{n}} dx = \frac{n}{(n+1)b} (a+bx)^{\frac{n+1}{n}}.$$

$$46. \int \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{1}{n}}} = \frac{n}{(n-1)b} (a+bx)^{\frac{n-1}{n}}.$$

B. 式中含有 $(a+bx^n)$

47. $\int \frac{dx}{c^2+x^2} = \frac{1}{c} \tan^{-1} \frac{x}{c} = \frac{1}{c} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2+c^2}}.$

48. $\int \frac{dx}{c^2-x^2} = \frac{1}{2c} \log \frac{c+x}{c-x} = \frac{1}{c} \tanh^{-1} \frac{x}{c}$, 或 $\frac{1}{c} \operatorname{ctnh}^{-1} \frac{x}{c} = \frac{1}{2c} \log \frac{x+c}{x-c}.$

49. $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \tan^{-1} \frac{x\sqrt{ab}}{a}.$

50. $\int \frac{dx}{a+bx^3} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{a+x\sqrt{-ab}}{a-x\sqrt{-ab}},$

或 $\frac{1}{\sqrt{-ab}} \tanh^{-1} \frac{x\sqrt{-ab}}{a}$, 或 $\frac{1}{\sqrt{-ab}} \operatorname{ctnh}^{-1} \frac{x\sqrt{-ab}}{a}.$

51. $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^2} = \frac{x}{2a(a+bx^2)} + \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{a+bx^2}.$

52. $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{1}{2ma} \cdot \frac{x}{(a+bx^2)^m} + \frac{2m-1}{2ma} \int \frac{dx}{(a+bx^2)^m}.$

53. $\int \frac{x dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b} \log \left(x^2 + \frac{a}{b} \right).$

54. $\int \frac{x dx}{(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{(a+bz)^{m+1}}$, 式中 $z=x^2$.

55. $\int \frac{dx}{x(a+bx^2)} = \frac{1}{2a} \log \frac{x^2}{a+bx^2}.$

56. $\int \frac{x^2 dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a+bx^2}.$

57. $\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{a+bx^2}.$

58. $\int \frac{x^2 dx}{(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{-x}{2mb(a+bx^2)^m} + \frac{1}{2mb} \int \frac{dx}{(a+bx^2)^m}.$

59. $\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)^m} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{(a+bx^2)^{m+1}}.$