積分表

徐桂芳編譯

科学技術出版社

積分表

徐桂芳編譯

科学技術出版社

內容提要

本表系根据 B. O. Peirce 的積分表編成，列舉了一般的代數函數及超越函數的積分公式，並收集了若干常用的定積分公式及橢圓積分公式等共628條。

爲了便于查攷起見，篇末列有附錄一篇，介紹各种有關的輔助公式，幷附刊有各种常用的數值表。

各表的使用方法見篇首的查表須知。

本表適于一般工程技術設計計算時作查攷之用，也適于高等学校數学、物理、工程各系学生作參攷之用。

積 分 表

編譯者 徐桂芳

*

科学技術出版社出版

（上海建國西路336弄1号）

上海市書刊出版業營業許可証出〇七九号

中科藝文联合印刷厂印刷 新華書店上海發行所總經售

*

統一書号：13119·28

（原新亞版印8,000冊）

開本 787×1092 耗 1/32·印張 5 1/8·字數 99,000

一九五六年十月新一版

一九五六年十月第一次印刷·印數 1—5,000

定价：(10)五角

弁　　言

本表是根據 B. O. Peirce 的積分表編成的. 內容分爲三部分:

一. 查表須知;

二. 積分公式;

三. 附　　錄.

第一部分查表須知,說明怎樣選擇公式和應用公式;這是編者加進去的,希望對初學微積分和微分方程的讀者有些幫助.

爲求內容的更有條理,原表中的許多部分已經編者加以整理. 例如把超越函數的積分公式分爲八類,使讀者更容易找到需要的公式.

編　者

一九五三

目　　錄

一. 查表須知

二. 積分公式

三. 附　錄

一. 查表須知

I. 公式的選擇

形式相同的積分可有幾種不同的結果. 公式的選擇不但要看哪一個有意義，並且要看哪一個便於計算，或者形式上比較簡單.

例一. 公式 48:

$$\int \frac{dx}{c^2-x^2}=\frac{1}{2c}\log\frac{c+x}{c-x}=\frac{1}{c}\tanh^{-1}\frac{x}{c}$$

或
$$\frac{1}{2c}\log\frac{x+c}{x-c}=\frac{1}{c}\operatorname{ctnh}^{-1}\frac{x}{c}.$$

當 $|x|<c$ 時，前面的兩個結果

$$\int \frac{dx}{c^2-x^2}=\frac{1}{2c}\log\frac{c+x}{c-x}=\frac{1}{c}\tanh^{-1}\frac{x}{c} \qquad (48\,a)$$

有意義，後面的兩個結果

$$\int \frac{dx}{c^2-x^2}=\frac{1}{2c}\log\frac{x+c}{x-c}=\frac{1}{c}\operatorname{ctnh}^{-1}\frac{x}{c} \qquad (48\,b)$$

沒有意義. 但當 $|x|>c$ 時，$(48a)$沒有意義，所以應選擇$(48b)$. 例如

$$(a) \qquad \int_0^1 \frac{dx}{4-x^2}=\frac{1}{4}\log\frac{2+x}{2-x}\Big]_0^1=\frac{1}{4}\log 3.$$

$$(b) \qquad \int_3^4 \frac{dx}{4-x^2}=\frac{1}{4}\log\frac{x+2}{x-2}\Big]_3^4=\frac{1}{4}\log\frac{3}{5}.$$

有時爲了計算方便形式簡單，我們採用反雙曲線函數而不採用對數函數. 例如求下列方程的積分

$$(c^2-y^2)dx-dy=0,\quad |y|<c,$$

得
$$\int dx=\int\frac{dy}{c^2-y^2},$$

則
$$x+k=\frac{1}{c}\tanh^{-1}\frac{y}{c},$$

k 是積分常數，因此求得

$$y=c\tanh c(x+k).$$

例二. 公式 3:

$$\int\frac{dx}{x}=\log x \text{ 或 } \log(-x).$$

當 $x>0$ 時，採用

$$\int\frac{dx}{x}=\log x;$$

當 $x<0$ 時，採用

$$\int\frac{dx}{x}=\log(-x).$$

例三. 公式 49, 50, 298, 300, 等等，要看 a, b 的值能使哪一個等式有意義，同時應留意哪一個等式便於計算，或者使我們所研究的問題得到形式比較簡單的結果.

一個不收斂的廣義積分是沒有意義的，應當在查表之前加以留意.

例四. 定積分(見公式 462):

$$\int_{-1}^{1}\operatorname{ctnh}^2 x\,dx=x-\operatorname{ctnh}x\Big]_{-1}^{1}=\frac{4}{1-e^2}.$$

但是這個廣義積分不收斂，因此求得的結果是沒有意義的.

例五. 定積分(見公式 436, 當 $a=0$ 時)

$$\int_{-1}^{1}\log x^2\,dx=x\log x^2-2x\Big]_{-1}^{1}=-4.$$

這是一個收斂的廣義積分，因此求得的結果是正確的.

II. 反三角函數、對數函數、和反雙曲線函數的主值

A. 三角函數是週期函數．它們的週期是 2π 或 π:

$$\sin(2n\pi+y)=\sin y,$$
$$\cos(2n\pi+y)=\cos y,$$
$$\tan(n\pi+y)=\tan y.$$

因此它們的反函數是多值函數．本表中所列的這類函數的值都以主值爲限．在許多含有三角函數的積分公式中，常引用 $z=\tan\frac{1}{2}x$ 替代式求解，無形之中已經應用主值計算，所以自變數變程的限制是必需的條件．例見公式 300.

B. 指數函數和雙曲線函數也是週期函數．它們的週期是 $2\pi i$ 或 πi:

$$e^{2n\pi i+y}=e^{y},$$
$$\sinh(2n\pi i+y)=\sinh y,$$
$$\cosh(2n\pi i+y)=\cosh y,$$
$$\tanh(n\pi i+y)=\tanh y.$$

因此，對數函數和反雙曲線函數在複變數範圍裏都是多值函數.

C. 對數函數和反雙曲線函數能取得實值時，便以實值爲主值．反三角函數的主值依照下列規定:

$$-\frac{\pi}{2}\leq\sin^{-1}x\leq\frac{\pi}{2},\qquad -\frac{\pi}{2}\leq\tan^{-1}x\leq\frac{\pi}{2},$$
$$0\leq\cos^{-1}x\leq\pi,\qquad 0\leq\mathrm{ctn}^{-1}x\leq\pi.$$

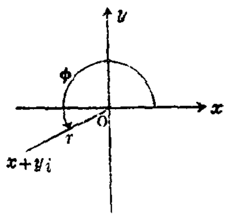
$\tan^{-1}x$ 和 $\mathrm{ctn}^{-1}x$ 的主值滿足下列恆等式

$$\tan^{-1}x+\mathrm{ctn}^{-1}x=\frac{\pi}{2}.$$

D. 關於 $\log(x+yi)$.

公式 $\log(x+yi)=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+i\tan^{-1}\frac{y}{x}$

是容易發生錯誤的,因爲 $\log(x+yi)$ 的週期是 $2\pi i$, 而 $i\tan^{-1}\frac{y}{x}$ 的週期是 πi, 因此 $\log(x+yi)$ 的通值須加上 πi 的奇數倍或偶數倍,要看 x, y 的符號再作決定. 最好應用下列公式計算:



$$\log(x+yi)=\log r+\phi i,$$
$$x=r\cos\phi,\quad y=r\sin\phi,$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

III. 間接積分公式

不定積分的公式可以分爲兩類,一類是直接查得結果的,另一類是間接求得結果的. 例如

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{k^2-x^2}},$$

表中無直接公式可查,可間接應用公式 159($a=k^2, c=-1$, $f(x^2)=x^2$):

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{k^2-x^2}}=\int(u^2-k^2)\,du=\frac{u^3}{3}-k^2u,\quad u^2=k^2-x^2$$
$$=-\frac{1}{3}\sqrt{k^2-x^2}(x^2+2k^2).$$

其他如遞演積分公式也是屬於這一類.

二. 積分公式

I. 基本的積分公式

1. $\int a\,dx = ax.$

2. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$

3. $\int \frac{dx}{x} = \log x.$ 或 $\log(-x).$ $[\log x = \log(-x) + (2k+1)\pi i.]$

4. $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, 當 $m \neq -1$ 時.

5. $\int e^x\,dx = e^x.$

6. $\int a^x \log a\,dx = a^x.$

7. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x$, 或 $-\operatorname{ctn}^{-1}x$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x$, 或 $-\cos^{-1}x$.

9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}x$, 或 $-\csc^{-1}x$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \operatorname{versin}^{-1}x$, 或 $-\operatorname{coversin}^{-1}x$.

11. $\int \cos x\,dx = \sin x$, 或 $-\operatorname{coversin} x$.

12. $\int \sin x\,dx = -\cos x$, 或 $\operatorname{versin} x$.

13. $\int \operatorname{ctn} x\,dx = \log \sin x$.

14. $\int \tan x\,dx = -\log \cos x$.

15. $\int \tan x \sec x\,dx = \sec x$.

16. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x$.

17. $\int \csc^2 x\,dx = -\operatorname{ctn} x$.

在下列公式中，u, v, w, 和 y 都表示 x 的任意函數：

18. $\int (u+v+w+\text{etc.})\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx + \int w\,dx + \text{etc.}$

19*a*. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

19*b*. $\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx$.

20. $\int f(y)\,dx = \int \frac{f(y)\,dy}{\frac{dy}{dx}}$.

II. 有理代數函數的積分公式

A. 式中含有 $(a+bx)$

應用替代式 $y=a+bx$ 和 $z=(a+bx)/x$, 得下列積分公式:

21. $\displaystyle\int (a+bx)^m dx = \frac{1}{b}\int y^m dy.$

22. $\displaystyle\int x(a+bx)^m dx = \frac{1}{b^2}\int y^m (y-a)\,dy.$

23. $\displaystyle\int x^n (a+bx)^m dx = \frac{1}{b^{n+1}}\int y^m (y-a)^n dy.$

24. $\displaystyle\int \frac{x^n dx}{(a+bx)^m} = \frac{1}{b^{n+1}}\int \frac{(y-a)^n dy}{y^m}.$

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n (a+bx)^m} = -\frac{1}{a^{m+n-1}}\int \frac{(z-b)^{m+n-2} dz}{z^m}.$

因此有

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\log(a+bx).$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}.$

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+bx)^3} = -\frac{1}{2b(a+bx)^2}.$

29. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}[a+bx-a\log(a+bx)].$

30. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\log(a+bx)+\frac{a}{a+bx}\right].$

31. $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{a+bx} + \frac{a}{2(a+bx)^2}\right].$$

32. $$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\tfrac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\log(a+bx)\right].$$

33. $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3}\left[a+bx-2a\log(a+bx) - \frac{a^2}{a+bx}\right].$$

34. $$\int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a}\log\frac{a+bx}{x}.^*$$

35. $$\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2}\log\frac{a+bx}{x}.$$

36. $$\int \frac{(a+bx)\,dx}{a'+b'x} = \frac{bx}{b'} + \frac{ab'-a'b}{b'^2}\log(a'+b'x).$$

37. $$\int (a+bx)^n(a'+b'x)^m\,dx = \frac{1}{(m+n+1)b}\Big((a+bx)^{n+1}(a'+b'x)^m - m(ab'-a'b)\int (a+bx)^n(a'+b'x)^{m-1}dx\Big).$$

38. $$\int \frac{(a+bx)^n\,dx}{(a'+b'x)^m} = -\frac{1}{(m-1)(ab'-a'b)}\left(\frac{(a+bx)^{n+1}}{(a'+b'x)^{m-1}} + (m-n-2)\,b\int\frac{(a+bx)^n\,dx}{(a'+b'x)^{m-1}}\right)$$

$$= -\frac{1}{(m-n-1)\,b'}\left(\frac{(a+bx)^n}{(a'+b'x)^{m-1}} + n(ab'-a'b)\int\frac{(a+bx)^{n-1}\,dx}{(a'+b'x)^m}\right)$$

$$= -\frac{1}{(m-1)\,b'}\left(\frac{(a+bx)^n}{(a'+b'x)^{m-1}} - nb\int\frac{(a+bx)^{n-1}\,dx}{(a'+b'x)^{m-1}}\right).$$

$$^*\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\log\frac{a+bx}{x}.$$

39. $$\int \frac{dx}{(a+bx)(a'+b'x)} = \frac{1}{ab'-a'b} \cdot \log \frac{a'+b'x}{a+bx}.$$

40. $$\int \frac{dx}{(a+bx)^n (a'+b'x)^m}$$
$$= \frac{1}{(m-1)(ab'-a'b)} \left(\frac{-1}{(a+bx)^{n-1} (a'+b'x)^{m-1}} - (m+n-2) b \int \frac{dx}{(a+bx)^n (a'+b'x)^{m-1}} \right).$$

41. $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)(a'+b'x)}$$
$$= \frac{1}{ab'-a'b} \left(\frac{a}{b} \log(a+bx) - \frac{a'}{b'} \log(a'+b'x) \right).$$

42. $$\int \frac{dx}{(a+bx)^2 (a'+b'x)}$$
$$= \frac{1}{ab'-a'b} \left(\frac{1}{a+bx} + \frac{b'}{ab'-a'b} \log \frac{a'+b'x}{a+bx} \right).$$

43. $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2 (a'+b'x)}$$
$$= \frac{-a}{b(ab'-a'b)(a+bx)} - \frac{a'}{(ab'-a'b)^2} \log \frac{a'+b'x}{a+bx}.$$

44. $$\int \frac{x^2 dx}{(a+bx)^2 (a'+b'x)} = \frac{a^2}{b^2 (ab'-a'b)(a+bx)}$$
$$+ \frac{1}{(ab'-a'b)^2} \left[\frac{a'^2}{b'} \log(a'+b'x) + \frac{a(ab'-2a'b)}{b^2} \log(a+bx) \right].$$

45. $$\int (a+bx)^{\frac{1}{n}} dx = \frac{n}{(n+1)b} (a+bx)^{\frac{n+1}{n}}.$$

46. $$\int \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{1}{n}}} = \frac{n}{(n-1)b} (a+bx)^{\frac{n-1}{n}}.$$

B. 式中含有$(a+bx^n)$

47. $\int \frac{dx}{c^2+x^2} = \frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{x}{c} = \frac{1}{c}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+c^2}}.$

48. $\int \frac{dx}{c^2-x^2} = \frac{1}{2c}\log\frac{c+x}{c-x} = \frac{1}{c}\tanh^{-1}\frac{x}{c}$, 或$\frac{1}{c}\operatorname{ctnh}^{-1}\frac{x}{c} = \frac{1}{2c}\log\frac{x+c}{x-c}.$

49. $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\tan^{-1}\frac{x\sqrt{ab}}{a}.$

50. $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\log\frac{a+x\sqrt{-ab}}{a-x\sqrt{-ab}},$

或 $\frac{1}{\sqrt{-ab}}\tanh^{-1}\frac{x\sqrt{-ab}}{a}$, 或 $\frac{1}{\sqrt{-ab}}\operatorname{ctnh}^{-1}\frac{x\sqrt{-ab}}{a}.$

51. $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^2} = \frac{x}{2a(a+bx^2)} + \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a+bx^2}.$

52. $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{1}{2ma}\cdot\frac{x}{(a+bx^2)^m} + \frac{2m-1}{2ma}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^m}.$

53. $\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\log\left(x^2+\frac{a}{b}\right).$

54. $\int \frac{x\,dx}{(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{(a+bz)^{m+1}}$, 式中 $z=x^2$.

55. $\int \frac{dx}{x(a+bx^2)} = \frac{1}{2a}\log\frac{x^2}{a+bx^2}.$

56. $\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int\frac{dx}{a+bx^2}.$

57. $\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{a+bx^2}.$

58. $\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{-x}{2mb(a+bx^2)^m} + \frac{1}{2mb}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^m}.$

59. $\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2(a+bx^2)^m} - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{m+1}}.$