高中一年级(下)

# 中学数学系列讲座

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会 编

清华大学出版社

# 中学数学系列讲座

## 高中一年级

## （下册）

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会　编

清华大学出版社

## 内 容 简 介

本书是高中一年级下学期学生的数学课外读物，目的是帮助学生扩大知识面，丰富解题方法，并提高学生对数学的理解、分析和解题能力。

全书共十讲，内容丰富，选题精湛。内容包括三角函数及其恒等变换、解三角形、反证法、角与距离、截面、面积与体积等。每讲都有例题分析和解题规律的总结，并配有练习题及答案。本书可供自学青年及高中数学教师参考，并可为各校开展学生课外数学小组活动提供素材。


**中学数学系列讲座**

高中一年级（下册）

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会 编

★

清华大学出版社出版

北京 清华园

北京昌平振南排版厂排版

北京昌平县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

★

开本：787×1092 1/32 印张：8 3/8 字数：188千字

1989年2月第1版 1989年2月第1次印刷

印数：00001—30000 定价：2.10元

ISBN 7-302-00357-2/O·65

# 前　言

《中学数学系列讲座》共分11册，初中一、二、三年级及高中一、二年级上、下各一册，高三年级全一册.

这套书是以“十年制数学教学大纲”为依据，参照各年级教科书内容与实际教学进度编写而成. 它是一套具有提高性质的课外读物用以扩大学生的知识面，开拓视野，丰富解题方法，提高学生分析问题与解决问题的能力.

本“系列讲座”以数学专题讲座的形式编写，各讲独立成章，便于学生根据自己的兴趣和需要灵活选读，亦可供中学数学教师和自学者参考，并为各校开展数学课外活动提供素材.

这套书由北京市海淀区教师进修学校数学组与北京数学会海淀区分会联合组成编委会，负责组织编写，并得到海淀区教育局的支持和指导. 由于经验不足，一定有不少缺点，请读者批评指正，以便今后修改与补充.

《中学数学系列讲座》编委会

# 《中学数学系列讲座》

## 编委会名单

**顾问：** 王家駿

**主编：** 陈剑刚　赵大悌

**编委：** 王增民（进修学校）　关民乐（京工附中）

王燕谋（十一学校）　陈　捷（铁道附中）

孔令颐（清华附中）　陈剑刚（北大附中）

孙云淮（育鸿学校）　赵大悌（进修学校）

**各书主审：**

初一年级（上、下册）王燕谋　高一年级（上、下册）陈　捷

初二年级（上、下册）孙云淮　高二年级（上、下册）陈剑刚

初三年级（上、下册）关民乐　高三年级（全一册）孔令颐

# 目　　录

# 第 一 讲

# 三角函数的图象和性质

薛 文 叙

三角函数是重要的初等函数，它不仅是进一步学习数学知识的基础，它在科学研究和生产实践中还有着极其广泛的应用．

学习三角函数，既要熟练地掌握三角函数式的恒等变换，又要深入地理解三角函数的性质．本讲就是从函数的角度研究三角函数的性质、图象及其应用．

## 一、三角函数的概念

中学阶段，对三角函数作了两次定义．第一次是在直角三角形中定义锐角三角函数，第二次是在直角坐标系中定义任意角的三角函数，后者是前者的推广．

1． 锐角三角函数定义

设Rt$\triangle ABC$，$\angle C=90°$ $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边分别是$a$，$b$，$c$，见图1.1，则

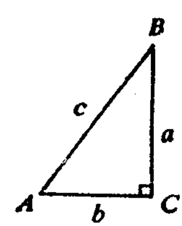

图 1.1

$$\sin A=\frac{a}{c}\ （正弦）$$

$$\csc A=\frac{c}{a}\ （余割）$$

$$\cos A=\frac{b}{c}\ （余弦）\qquad \sec A=\frac{c}{b}\ （正割）$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}\ （正切）\qquad \operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}\ （余切）$$

它们分别叫锐角$A$的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割，统称为锐角$A$的三角函数.

锐角三角函数主要应用在解直角三角形.

2. 任意角的三角函数定义

由于角的概念由锐角推广到任意角，度量角的单位制除角度制外又引入弧度制，三角函数的定义由锐角三角函数扩充到任意角的三角函数：

设$\alpha$角终边上任意一点$P(x,y)$，$P$至原点$O$的距离为$r=\sqrt{x^2+y^2}$如图1.2，则

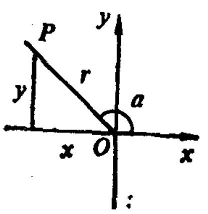


图 1.2

$$\sin\alpha=\frac{y}{r};\quad \csc\alpha=\frac{r}{y};$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r};\quad \sec\alpha=\frac{r}{x};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x};\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}.$$

这六个函数分别叫$\alpha$角的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割.它们的值由$\alpha$的终边的位置决定，与$P$的选择无关.它们统称$\alpha$的三角函数.

三角函数是在直角坐标系中，用终边上任一点的坐标比所确定的函数.因此加、减、乘、除四则运算及一些其他的代数运算在三角函数运算中不再适用.

3. 单位圆中的三角函数线

既然三角函数是在坐标系中，由终边上一点的坐标比定义，因此如果在坐标系中作出单位圆（半径为1的圆），那么可用单位圆中的有向线段表示三角函数值，如图1.3所示。

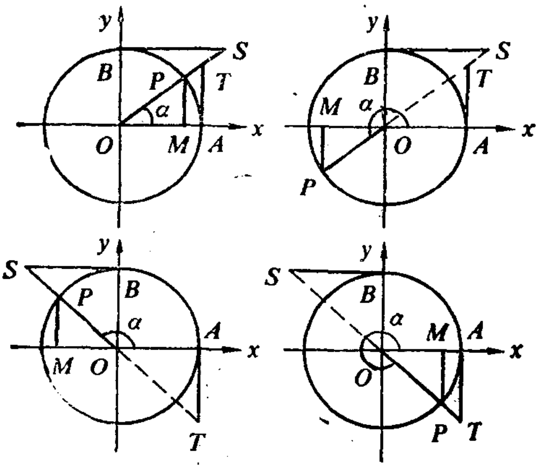


图 1.3

有向线段$\overrightarrow{MP}$、$\overrightarrow{OM}$、$\overrightarrow{AT}$、$\overrightarrow{BS}$的数量分别表示$\alpha$的正弦、余弦、正切、余切，即

$\sin\alpha = MP$，$\cos\alpha = OM$，$\operatorname{tg}\alpha = AT$，$\operatorname{ctg}\alpha = BS$。

这四条有向线段叫三角函数线，利用三角函数线研究三角函数的性质很方便。

## 二、三角函数的图象和变化

正弦曲线$y=\sin x$是优美的、平滑的、连续的波浪形的曲线，将它作压缩、平移等变换可画出各种正弦函数和余弦函数的曲线。

1. $y=\sin x$, $y=\sin\omega x$, $y=A\sin x$, $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$的图象之间的关系

**例 1** 在同一坐标系中，作出 $y=\sin x$，$y=\sin 2x$，$y=2\sin x$ 的图象，如图1.4．

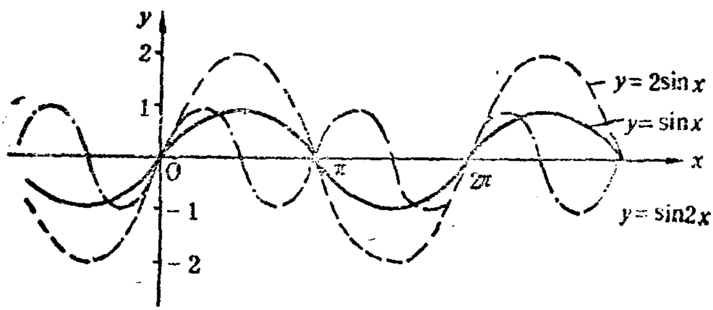


图 1.4

$y=\sin 2x$的图象可以看成是$y=\sin x$的图象沿$x$轴向原点压缩到原来的$\frac{1}{2}$得到．$y=2\sin x$的图象可以看作$y=\sin x$的图象沿$y$轴方向伸长原来的2倍而得到．

一般地，$y=\sin\omega x$的图象：当$\omega>1$时是由$y=\sin x$的图象沿$x$轴向原点压缩到原来的$\frac{1}{\omega}$；$0<\omega<1$时，是由$y=\sin x$的图象沿$x$轴由原点向左右伸长到原来的$\frac{1}{\omega}$倍．这种变换叫沿$x$轴的伸缩变换．

$y=A\sin x$的图象可由下列变换得来：当$A>1$时，由$y=\sin x$的图象沿$y$轴伸长为原来的$A$倍；当$0<A<1$时，由$y=\sin x$的图象沿$y$轴压缩为原来的$A$倍，这种变换叫函数图

象沿$y$轴的伸缩变换.

对简谐振动而言，沿$x$轴的伸缩变换,改变了振动周期,因此也叫周期变换.沿$y$轴伸缩变换，改变了振幅，因此叫振幅变换。

例 2　在同一坐标系中,作出$y=\sin x$、$y=\sin x+1$及$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象，如图1.5.

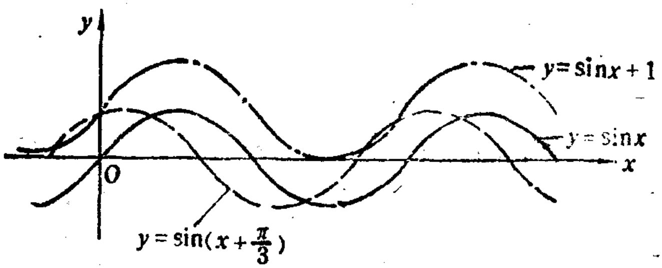


图 1.5

$y=\sin x+1$的图象是$y=\sin x$的图象沿$y$轴向上平移1个单位；$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象是$y=\sin x$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{3}$.

一般地，$y=\sin x+b$的图象是$y=\sin x$的图象沿$y$轴方向平移得来. 当$b>0$，向上平移$b$个单位；当$b<0$，向下平移$|b|$个单位，有时不移曲线，也可移动坐标轴,$y=\sin x+b$（$b>0$）的图象可以看成$y=\sin x$的图象中，横轴向下平移$b$个单位.但要注意，平移横坐标轴时,纵轴上标注的纵坐标应作相应的改变.

$y=\sin(x+\varphi)$ 的图象是 $y=\sin x$ 沿 $x$ 轴平移得到的。当 $\varphi>0$，向左平移 $\varphi$ 个单位，当 $\varphi<0$ 时，向右平移 $|\varphi|$ 个单位，同样可以不移动曲线而移动纵坐标轴。

以上变换称为平移变换。

综上所述，$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的图象可以由 $y=\sin x$ 的图象经过压缩变换和平移变换而得。

例 3　画出 $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)+1$ 的图象。

$y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)+1=2\sin\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]+1$ 的图象可由 $y=\sin x$ 的图象作下列变换得来：①先沿 $x$ 轴方向向原点伸长为原来的2倍，再沿 $y$ 轴方向伸长原来的2倍；②把所得图象再向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位（也可以看作 $y$ 轴向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位），沿 $y$ 轴向上平移1个单位（或 $x$ 轴向下平移1个单位）。具体作图步骤如下：

（1）在坐标系 $x'O'y'$ 中作 $y'=\sin x'$ 的图象；

（2）把 $y'=\sin x'$ 的图象沿 $x'$ 轴伸长原来的2倍；再沿 $y'$ 轴伸长原来的2倍；得 $y'=2\sin\frac{1}{2}x'$ 的图象。

（3）把原点移至 $\left(\frac{\pi}{3},-1\right)$，平移坐标轴，得新坐标系 $xOy$。在新坐标系中所得曲线就是 $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)+1$ 的图象，见图1.6。

2. 一些较复杂的三角函数的图象

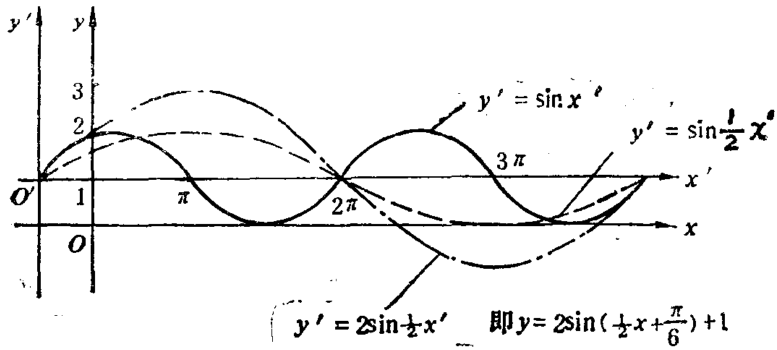


图 1.6

（1） $y=\sin x$、$y=\sin(-x)$和$y=-\sin x$图象

我们知道，两个函数$y=f(x)$和$y=f(-x)$当$x$取相反数时，这两个函数的$y$值相同，那么这两个函数的图象关于$y$轴对称，因此$y=\sin x$与$y=\sin(-x)$的图象关于$y$轴对称。函数$y=f(x)$与$y=-f(x)$，当$x$取相同数值时，两个函数的值相反，那么这两个函数的图象关于$x$轴对称。因此$y=\sin x$与$y=-\sin x$的图象关于$x$轴对称。但是由于$y=\sin x$的图象自身关于原点对称，因此$y=\sin(-x)$与$y=-\sin x$的图象相同。对余弦函数、正切函数、余切函数的图象也有类似的情况。

**例 4** 画出$y=2-4\cos^4\dfrac{x}{2}-4\sin^4\dfrac{x}{2}$的图象。

**解：** $y=2-4\cos^4\dfrac{x}{2}-4\sin^4\dfrac{x}{2}$

$$=2-4\left[\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)^2-2\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\right]$$

$$=2-4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 x\right)$$

$$=-2+(1-\cos 2x)$$

$$=-\cos 2x-1.$$

作图步骤：

① 在$x'O'y'$坐标系中作余弦曲线$y'=\cos x'$，沿$x'$轴压缩2倍得$y'=\cos 2x'$的图象；

② 作出关于$x'$轴的对称曲线$y'=-\cos 2x'$；

③ 再把$x'$轴向上平移一个单位得 $xOy$ 坐标系.在这个坐标系中，所得曲线就是

$y=2-4\cos^4\frac{x}{2}-4\sin^4\frac{x}{2}$的图象，如图1.7。

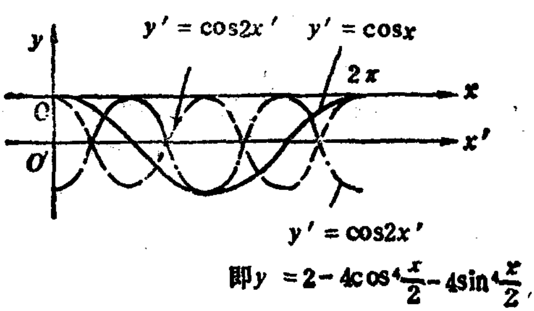


图 1.7

（2）一些比较复杂的三角函数的图象

对于一些较复杂的三角函数的图象，要经三角恒等变换才能看出通过怎样变换才能得到它的图象.还有一些三角函

数的图象，需要先研究它的定义域、值域、奇偶性、单调性等性质后才能描点画图.

**例 5** 画出$y=2\sin x+3\cos x$的图象

**方法一**：由于$\sin x$和$\cos x$的周期都是$2\pi$，这样$y=2\sin x+3\cos x$的周期也是$2\pi$.可先作$y=2\sin x$和$y=3\cos x$的图象，再把它们相应的纵坐标相加，就得$y=2\sin x+3\cos x$的纵坐标，例如将$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$相加得$\overrightarrow{AP}$，从而找出函数图象上的$P$点这种作图法叫坐标合成法（或图象加法）.$y=2\sin x+3\cos x$的图象，如图1.8.

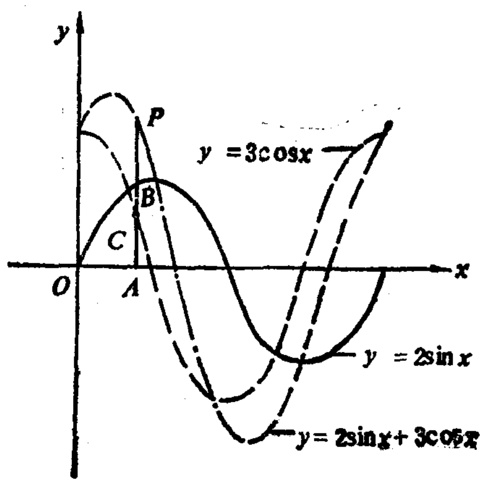


图 1.8

**方法二**：$y=2\sin x+3\cos x=\sqrt{13}\sin\left(x+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{3}{2}\right)$

$$=\sqrt{13}\sin(x+0.98)$$

应用伸缩变换和平移变换可以得到$y=2\sin x+3\cos x=$

$\sqrt{13}\sin(x+0.98)$ 的图象，结果与图1.8的曲线一样。

例 6　画出$y=\csc x\ |\sin x|$ 的图象

解：函数定义域$x\neq k\pi$ （$k\in Z$)，函数解析式为：

$$y=\csc x\ |\sin x|=\begin{cases}1 & 当x\in(2k\pi,2k\pi+\pi),\\ -1 & 当x\in(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi).\end{cases}$$

它的图象是图1.9。

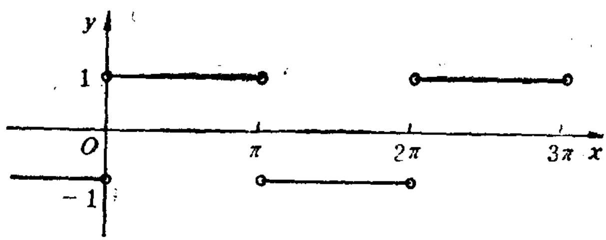


图 1.9

**例 7**　画出 $y=\text{tg}x\ |\cos x|$ 的图象

**解：**函数的定义域是 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ ($k\in Z$)，函 数 的解析式为

$$y=\text{tg}x\ |\cos x|=\begin{cases}\sin x & x\in\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right),\\ -\sin x & x\in\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right).\end{cases}$$

$(k\in Z)$

图象是图1.10 .

**例 8**　画出$y=\sin(\sin x)$的图象

**解：**函数$y=\sin(\sin x)$定义域$x\in R$，它是奇函数，周期

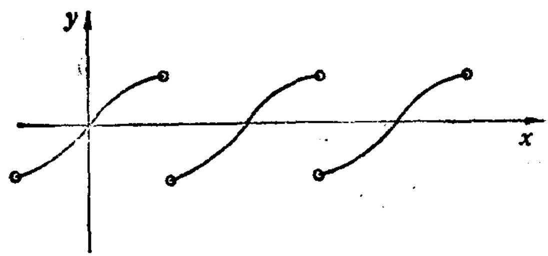


图 1.10

是$2\pi$.

① 先画区间$[0,\pi]$上$y=\sin(\sin x)$的图象.

当$x$由0增至$\frac{\pi}{2}$时，$y$由0增至$\sin 1\approx 0.84$，当$x$由$\frac{\pi}{2}$增至$\pi$时，$y$由$\sin 1\approx 0.84$减至0. 且$|\sin(\sin x)|\leqslant|\sin x|$.

② 利用奇函数的性质作出$y=\sin(\sin x)$在区间$[-\pi,0]$的图象.

③ 利用周期性，左右延伸曲线，就得函数$y=\sin(\sin x)$的图象，如图1.11.

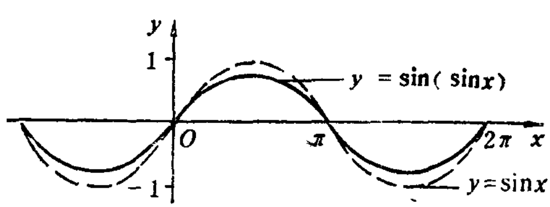


图 1.11

**例 9** 画出$y=x\sin x$的图象.

函数$y=x\sin x$的图象不能由$y=\sin x$的图象经平移或压