初中三年级（上）

中学数学系列讲座

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会
编

清华大学出版社

内容简介

本书是初中三年级上学期学生的数学课外阅读书．目的是扩大学生的知识面，丰富解题方法，提高数学的分析解题能力．

全书共九讲，内容包括指数与对数、直角坐标系、正比例函数与反比例函数、一次函数、直角三角形与锐角三角形、正弦定理与余弦定理、相似形、多边形面积、不定方程等．每讲都有方法介绍、例题分析、规律总结，并配有练习题与答案．本书也可供自学青年及初中数学教师参考，并为各校开展学生课外数学小组活动提供素材．

中学数学系列讲座

初中三年级（上册）

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会 编

★

清华大学出版社出版
北京 清华园
北京昌平县振南排版厂排版
河北省香河县印刷厂印装
新华书店北京发行所发行

★

开本：787×1092 1/32 印张：5.5 字数：122千字
1989年2月第1版 1989年2月第1次印刷
印数：00001—30000 定价：1.40 元

ISBN 7-302-00349-1/O·62

前　言

《中学数学系列讲座》共分11册，初中一、二、三年级及高中一、二年级上、下各一册，高三年级全一册。

这套书是以"十年制数学教学大纲"为依据，参照各年级教科书内容与实际教学进度编写而成。这是一套提高性质的课外读物，用以扩大学生的知识面，开拓视野，提高学生分析问题与解决问题的能力。同时，考虑到初三与高三的特殊性，我们还着重总结了分析与解决数学问题的各种方法，有助于学生在总复习中得到巩固与提高。

本"系列讲座"以数学专题讲座的形式编写，各讲独立成章，便于学生根据自己的兴趣与需要灵活选读，亦可供中学数学教师和自学者参考，并为各校开展数学课外活动提供素材。

这套书由北京市海淀区教师进修学校数学组与北京数学会海淀区分会联合组成编委会，负责组织编写，并得到海淀区教育局的支持和指导。由于经验不足，一定有不少缺点，请读者批评指正，以便今后修改与补充。

"中学数学系列讲座"编委会

《中学数学系列讲座》

编委会名单

目　　录

第一讲

指数与对数

张振威

在指数与对数这一讲中，我们主要研究：1．有关指数、对数的化简、求值；2．解指数方程和对数方程；3．有关指数、对数的证明．

在研究上述问题中，要用到的基础知识有：

1．指数

（1）正整数指数幂 $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个}$；

（2）零指数幂 $a^0=1$，$(a\neq 0)$；

（3）负整数指数幂 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$，（$a\neq 0$，n是正整数）；

（4）分数指数幂 $a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$，（$a\geqslant 0$，m，n是正整数且$n>1$）；

（5）指数运算法则：

1）$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；

2）$(a^m)^n=a^{mn}$；

3）$(ab)^n=a^nb^n$．

（a、b都是正数，m、n都是有理数）

2．对数

（1）对数定义：如果$a^b=N$（$a>0$且$a\neq1$），那么指数b叫做以a为底的N的对数．记作$\log_a N=b$．

（2）对数恒等式：$a^{\log_a N}=N$．

（3）对数性质：

$$\log_a a=1;\qquad \log_a 1=0.$$

（4）积、商、幂、方根的对数：

1）$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$；

2）$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

3）$\log_a M^n=n\log_a M$；

4）$\log_a \sqrt[n]{M}=\dfrac{1}{n}\log_a M$．

（5）常用对数及其性质：

1）以10为底的对数，叫做常用对数，记作$\lg N$．

2）如果$N=10^{\pm n}$（n是0或自然数），那么$\lg N=\pm n$．

3）如果$1<N<10$，那么$0<\lg N<1$．

此外，换底公式也很有用处，现介绍如下：

换底公式：$\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$．

证明：设$\log_a N=x$，写成指数式，得

$$a^x=N.$$

两边取以b为底的对数，得

$$x\log_b a=\log_b N,$$

$$\therefore\ x=\frac{\log_b N}{\log_b a},$$

故 $\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$.

推论 1： $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$.

推论 2： $(\log_a b)(\log_b c)(\log_c a)=1$.

（这两个推论请读者自行推导）

下面我们将分别研究上述几个问题.

一、有关指数、对数的化简、求值问题

例 1 计算 $\left[4^{-1/4}+\left(\dfrac{1}{2^{-3/2}}\right)^{-4/3}\right]\left[4^{-0.25}-(2\sqrt{2})^{-4/3}\right]$

解：$\left[4^{-1/4}+\left(\dfrac{1}{2^{-3/2}}\right)^{-4/3}\right]\left[4^{-0.25}-(2\sqrt{2})^{-4/3}\right]$

$$
\begin{aligned}
&=[2^{-1/2}+2^{-2}][2^{-1/2}-2^{-2}]\\
&=(2^{-1/2})^2-(2^{-2})^2\\
&=2^{-1}-2^{-4}\\
&=\frac{7}{16}.
\end{aligned}
$$

例 2 化简

(1) $(a^{1/2}\sqrt[3]{b^2})^{-3}\div\sqrt{b^{-4}\sqrt{a^{-2}}}$；

(2) $\dfrac{a^{4/3}-8a^{1/3}b}{a^{2/3}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{2/3}}\div\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)-a^{2/3}$.

解：(1) $(a^{1/2}\sqrt[3]{b^2})^{-3}\div\sqrt{b^{-4}\sqrt{a^{-2}}}$

$$=(a^{1/2}b^{2/3})^{-3}\div(b^{-4}a^{-1})^{1/2}$$

$$=(a^{-3/2}b^{-2})\div(b^{-2}a^{-1/2})$$

$$=a^{-3/2-(-1/2)}b^{-2-(-2)}$$

$$=a^{-1}$$

$$=\frac{1}{a}.$$

(2) $$\frac{a^{4/3}-8a^{1/3}b}{a^{2/3}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{2/3}}\div\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)-a^{2/3}$$

$$=\frac{a^{1/3}(a-8b)}{a^{2/3}+2a^{1/3}b^{1/3}+4b^{2/3}}\cdot\frac{a^{1/3}}{a^{1/3}-2b^{1/3}}-a^{2/3}$$

$$=\frac{a^{1/3}(a^{1/3}-2b^{1/3})(a^{2/3}+2a^{1/3}b^{1/3}+4b^{2/3})}{a^{2/3}+2a^{1/3}b^{1/3}+4b^{2/3}}$$

$$\cdot\frac{a^{1/3}}{a^{1/3}-2b^{1/3}}-a^{2/3}$$

$$=a^{1/3}\cdot a^{1/3}-a^{2/3}$$

$$=0.$$

说明：把根式化为指数式，再应用各种指数的性质进行化简、计算，有时比较方便．

例 3 计算 $\dfrac{(9+4\sqrt{5})^{3/2}+(9-4\sqrt{5})^{3/2}}{(11+2\sqrt{30})^{3/2}-(11-2\sqrt{30})^{3/2}}$.

解：$$\frac{(9+4\sqrt{5})^{3/2}+(9-4\sqrt{5})^{3/2}}{(11+2\sqrt{30})^{3/2}-(11-2\sqrt{30})^{3/2}}$$

$$=\frac{[(\sqrt{5}+2)^2]^{3/2}+[(\sqrt{5}-2)^2]^{3/2}}{[(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2]^{3/2}-[(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2]^{3/2}}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+2)^3+(\sqrt{5}-2)^3}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})^3-(\sqrt{6}-\sqrt{5})^3}$$

$$=\frac{[(\sqrt{5}+2)+(\sqrt{5}-2)][(\sqrt{5}+2)^2}{[(\sqrt{6}+\sqrt{5})-(\sqrt{6}-\sqrt{5})][(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{-(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{5}-2)^2]}{+(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2]}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}[5+4\sqrt{5}+4-1+5-4\sqrt{5}+4]}{2\sqrt{5}[6+5+2\sqrt{30}+1+6+5-2\sqrt{30}]}$$

$$=\frac{17}{23}.$$

例 4 已知$x^{1/2}+x^{-1/2}=3$，求$\dfrac{x^{3/2}+x^{-3/2}+2}{x^2+x^{-2}+3}$的值.

解： 注意到$x^{1/2}$与$x^{-1/2}$互为倒数，把$x^{1/2}+x^{-1/2}=3$两边平方，得

$$x+x^{-1}=7.$$

$$\therefore\quad \frac{x^{3/2}+x^{-3/2}+2}{x^2+x^{-2}+3}$$

$$=\frac{(x^{1/2}+x^{-1/2})(x-x^{1/2}\cdot x^{-1/2}+x^{-1})+2}{(x+x^{-1})^2+1}$$

$$=\frac{3(x-1+x^{-1})+2}{7^2+1}$$

$$=\frac{3(7-1)+2}{50}$$

$$=\frac{20}{50}$$

$$=\frac{2}{5}.$$

例 5 当$x=\frac{1}{2}(a^{1/n}-a^{-1/n})$时，求$(x+\sqrt{1+x^2})^n$的值。

解法 1：$\because \quad x=\frac{1}{2}(a^{1/n}-a^{-1/n})$

$$\therefore \quad 1+x^2=1+\frac{1}{4}(a^{1/n}-a^{-1/n})^2$$

$$=\frac{1}{4}(4+a^{2/n}-2+a^{-2/n})$$

$$=\frac{1}{4}(a^{1/n}+a^{-1/n})^2$$

$$\therefore \sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}(a^{1/n}+a^{-1/n})$$

$$\therefore (x+\sqrt{1+x^2})^n$$

$$=\left[\frac{1}{2}(a^{1/n}-a^{-1/n})+\frac{1}{2}(a^{1/n}+a^{-1/n})\right]^n$$

$$=(a^{1/n})^n$$

$$=a.$$

解法 2：$\because \ x=\frac{1}{2}(a^{1/n}-a^{-1/n})$，

$$\therefore\quad (a^{1/n})^2-2xa^{1/n}-1=0.$$

解关于$a^{1/n}$的一元二次方程

$$\therefore\ a^{1/n}=x\pm\sqrt{1+x^2}.$$

$$\because\ a^{1/n}>0,$$

$$\therefore\ a^{1/n}=x+\sqrt{1+x^2},$$

$$\therefore\ (x+\sqrt{1+x^2})^n=(a^{1/n})^n=a.$$

例 6 求下列各式中的x：

（1）　$x=\log_{2\sqrt{3}}1728$；

（2）　$\log_{0.32}x=\dfrac{1}{2}$.

解：（1）解法1：$\because\ x=\log_{2\sqrt{3}}1728$，

$$\therefore\ (2\sqrt{3})^x=1728.$$

而 $1728=2^6\cdot 3^3=(2\sqrt{3})^6$，

$$\therefore\ (2\sqrt{3})^x=(2\sqrt{3})^6,$$

$$\therefore\quad x=6.$$

解法2：用换底公式

$$x=\log_{2\sqrt{3}}1728=\frac{\log_2 1728}{\log_2 2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\log_2(3^3\cdot 2^6)}{\log_2(2\cdot 3^{1/2})}=\frac{3\log_2 3+6}{(1/2)\log_2 3+1}$$

$$=\frac{3(\log_2 3+2)}{(1/2)(\log_2 3+2)}=6.$$

（2）$\because\ \log_{0.32}x=\dfrac{1}{2}$，

$$\therefore\ x=0.32^{1/2}$$

$$=\left(\frac{32}{100}\right)^{1/2}$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{2}.$$

例 7

化简 $\dfrac{(1/2)\times\log_3 4\times|\log_3 2-1|+(1/3)\log_3 8+\log_{1/3}3}{2\log_3 2-(1/5)^{\log_5(1/2)}}$

$+\log_3\sqrt{2}$.

解： $\dfrac{(1/2)\times\log_3 4\times|\log_3 2-1|+\frac{1}{3}\log_3 8+\log_{\frac{1}{3}}3}{2\log_3 2-(1/5)^{\log_5(1/2)}}$

$+\log_3\sqrt{2}$

$$=\frac{\log_3 2\times(1-\log_3 2)+\log_3 2-1}{2\log_3 2-5^{-\log_5\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}\log_3 2$$

$$=\frac{\log_3 2-(\log_3 2)^2+\log_3 2-1}{2\log_3 2-2}+\frac{1}{2}\log_3 2$$

$$=\frac{-(\log_3 2-1)^2}{2(\log_3 2-1)}+\frac{1}{2}\log_3 2$$

$$=-\frac{1}{2}(\log_3 2-1)+\frac{1}{2}\log_3 2$$

$$=\frac{1}{2}$$

例 8　已知　$\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$．求$\log_{42}56$的值．

解： 用换底公式

$$\because\ a=\log_2 3=\frac{\log_7 3}{\log_7 2},$$

$$b=\frac{1}{\log_7 3}.$$

$$\therefore\ \log_7 3=\frac{1}{b};\ \log_7 2=\frac{1}{ab}.$$

$$\therefore\ \log_{42}56=\frac{\log_7 56}{\log_7 42}$$

$$=\frac{\log_7 8+\log_7 7}{\log_7 6+\log_7 7}$$

$$=\frac{3\log_7 2+1}{\log_7 2+\log_7 3+1}$$

$$=\frac{\frac{3}{ab}+1}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{b}+1}$$

$$=\frac{ab+3}{ab+a+1}.$$

说明：此题还可用换底公式变成常用对数，或利用对数定义，化为指数问题来解．

例 9　已知$\lg 2=0.3010$，问2^{365}是几位整数？最末一位数字是几？

解： $\because\ \lg 2=0.3010$，

$\therefore\quad \lg 2^{365}=365\times\lg 2=365\times 0.3010=109.865.$

$\therefore\quad 2^{365}$是含有110位整数的数。

又 $\because\ 2^n$ 的末位数字是依 2，4，8，6，2，4，8，6，…循环的。

而$365\div 4=91\cdots\cdots$余1，

$\therefore\quad 2^{365}$的最末一位数是2。

例 10 如果$a>1$，$x>0$，且$(2x)^{\log_a 2}-(3x)^{\log_a 3}=0$，求$x$的值。

解： $\because\ (2x)^{\log_a 2}=(3x)^{\log_a 3}$两边取对数得

$$\log_a 2(\log_a 2+\log_a x)=\log_a 3(\log_a 3+\log_a x)$$

$$\therefore\ (\log_a 2-\log_a 3)\log_a x=(\log_a 3)^2-(\log_a 2)^2$$

$$\log_a x=-(\log_a 3+\log_a 2)$$

$$=\log_a \frac{1}{6}.$$

故 $x=\dfrac{1}{6}$.

二、指数方程与对数方程

在指数里含有未知数的方程叫指数方程，在对数符号后面含有未知数的方程叫对数方程。

例 1 解方程$8^x=4^{x+1}$.

解： 原方程可化为 $2^{3x}=2^{2x+2}$.

同一底$a(a>0$且$a\neq 1)$的幂相等，必须且只须它们的幂

指数相等．因此

$$3x=2x+2,$$

$$\therefore\quad x=2.$$

例 2 解方程 $13^{2x+5}=14^{x+7}$.

解：两边取对数，$(2x+5)\lg13=(x+7)\lg14$,

$$\therefore\quad 2x\lg13-x\lg14=7\lg14-5\lg13,$$

$$\therefore\ x=\frac{7\lg14-5\lg13}{2\lg13-\lg14}.$$

例 3 解方程$9^{2\sqrt{2x}}-4\times3^{2\sqrt{2x}}+3=0$.

解：方程变形为

$$(9^{\sqrt{2x}})^2-4\times9^{\sqrt{2x}}+3=0,$$

$$\therefore\quad 9^{\sqrt{2x}}=1,\ 9^{\sqrt{2x}}=3.$$

故 $x_1=0$, $x_2=\dfrac{1}{8}$.

例 4 解方程 $5^{x+3}+3^{x^2+1}=8\times3^{x^2}+2\times5^{x+2}$.

解：移项变形为

$$5\times5^{x+2}-2\times5^{x+2}=8\times3^{x^2}-3\times3^{x^2}$$

即 $3\times5^{x+2}=3^{x^2}\times5$,

$$\therefore\quad 5^{x+1}=3^{x^2-1}.$$

要使两个同指数幂相等，则对于$5^{x+1}=(3^{x-1})^{x+1}$

（1）它们的指数同时为零，即 $x+1=0$，

∴ $x_1=-1$.

（2）当指数不为零时，必须且只须它们的底数相等，即 $5=3^{x-1}$，

∴ $x_2=1+\log_3 5$.

故原方程有解：$x_1=-1$，$x_2=1+\log_3 5$.

例 5 解下列对数方程：

（1）$\lg(x^2+11x+8)-\lg(x+1)=1$.

解：把原方程变形为

$$\lg\frac{x^2+11x+8}{x+1}=\lg 10$$

同一个底的对数相等，必须且只须它们的真数相等．因此

$$\frac{x^2+11x+8}{x+1}=10.$$

解这个方程，得 $x_1=-2$，$x_2=1$.

检验：$x=-2$ 时 $x+1=-1$，负数的对数没有意义，所以 $x=-2$ 为增根．而 $x=1$ 是原方程的根．

（2）$\log_x 25+2\log_{25}x=3$.

解：∵ $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$，故原方程可变形为

$$\frac{1}{\log_{25}x}+2\log_{25}x=3,$$

即 $2(\log_{25}x)^2-3\log_{25}x+1=0$.

∴ $\log_{25}x=1$ 或 $\log_{25}x=\dfrac{1}{2}$，