68

离散数学问题解析

陈国勋　刘书芳　王素琴
周文俊　徐荣才　宋庆涛　编著

黄河水利出版社

图书在版编目(CIP)数据

离散数学问题解析/陈国勋等编著. —郑州:黄河水利出版社,1999.7

ISBN 7-80621-311-2

Ⅰ.离… Ⅱ.陈… Ⅲ.离散数学-解题 Ⅳ.0158-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 19370 号

责任编辑:许立新　　封面设计:朱　鹏

责任校对:赵宏伟　　责任印制:温红建

出版发行:黄河水利出版社

地址:河南省郑州市顺河路黄委会综合楼 12 层　邮编:450003

E-mail:yrcp@public2.zz.ha.cn

印　刷:黄河水利委员会印刷厂

开　本:787mm×1092mm　1/16　　印　张:19

版　别:1999 年 7 月　第 1 版　　印　数:1—3000

印　次:1999 年 7 月　郑州第 1 次印刷　　字　数:436 千字

定价:26.00 元

前　　言

离散数学是计算机及有关专业基础课，在计算机科学和其他科学中具有重要作用。自我们编著的《离散数学》（河南大学出版社 1994 年版）出版以来，深受读者的厚爱，并纷纷要求编写一本相应的辅导教材。《离散数学问题解析》就是我们在郑州大学和华北水利水电学院多年教学实践与教学资料积累的基础上，编写的一部与《离散数学》一书配套的辅助性教材。本教材内容包括：内容要点、例题解析、习题、难题提示、习题解答。内容要点是《离散数学》相应章节的概括，也是习题解答的基础；例题解析部分每题都给出了解题思路，部分典型例题还给出了多种解法，对读者深化教材内容、扩大视野、提高思维能力有很大的启发和帮助。该教材习题量大，有近 1 000 道习题；习题类型多样，有思考题、计算题、证明题、应用题；难易题目齐全，有基本题、标准题、难题。适于不同层次读者使用，易于培养学生的综合能力。与教材紧密配套，可用于习题课教材，同时也可单独使用。

本书各章的编写分工如下：陈国勋、徐荣才编写第一、二、三、十章，王素琴、宋庆涛编写第四、五、六章，刘书芳、周文俊编写第七、八、九章。

本书编写过程中得到了郑州大学计算机系与华北水利水电学院动力系领导的关心支持，郑州大学计算机系马乃兰、郎玉清、高明磊老师给予了大力协助，郑州大学计算机系资料室庞军、程文扬两位老师提供了部分资料，谨在此表示感谢！

由于编者水平有限，书中有不妥和错误之处，恳请广大读者批评指正。

编者

1999 年 3 月

目　录

第一章 命题逻辑

一、内容要点

§1.1 基本概念

命题 是一原始概念,可解释为非真即假的陈述句。

真值 正确(错误)的命题称为真值为真(假)的命题,其真值记以 $T(F)$或 $1(0)$。

一种真值指派 对一组命题变元给定的一组真值。

简单命题 只表示一种内容的命题。

复合命题 包含不只一种内容的命题。

命题变元 指任意的简单命题。

命题常元 指具体的简单命题。

连接词 对命题进行复合的符号,常用的有$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$,它们分别称为否定、合取、析取、条件、双重条件连接词。此外,还有$\bar{\vee}$、$\uparrow$、$\downarrow$,它们分别称为异或、与非、或非连接词。

公式 是如下递归定义的符号串:(1)命题变元是公式;(2)若 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 是公式,则 $(\neg\mathscr{A})$、$(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})$、$(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$、$(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$、$(\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B})$均是公式;(3)所有公式都是有限次使用(1)与(2)得到的符号串。

公式的真值表 对公式中所有命题变元给出一种真值指派,公式有确定的真值。公式的一切可能真值指派及对应的真值构成的表称为此公式的真值表。

重言式 对所有真值指派均取真值 T 的公式,记以 $\mathscr{T}$。

矛盾式 对所有真值指派均取真值 F 的公式,记以 $\mathscr{F}$。

可满足的公式 不是矛盾式的公式。

定理 1.1.1 若 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B}$ 均为重言式,则 $\mathscr{B}$ 也是重言式。

定理 1.1.2 设 $\mathscr{A}$ 为含有命题变元 $p_1\cdots,p_n$ 的公式,而 $\mathscr{A}_1\cdots,\mathscr{A}_n$ 为任意公式,若 $\mathscr{A}$ 为重言式,则在 $\mathscr{A}$ 中 p_i 出现的每一处代以 $\mathscr{A}_i(1\leqslant i\leqslant n)$后得到的 $\mathscr{B}$ 也是重言式。

性质 1.1.1 若 $\mathscr{A}$ 是重言式,则$\neg\mathscr{A}$是矛盾式,且$\neg\neg\mathscr{A}$是重言式。

性质 1.1.2 若 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 是重言式,则 $\mathscr{A}\vee\mathscr{B}$,$\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}$,$\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B}$,$\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}$ 均为重言式。

§ 1.2 公式的等价关系

$\mathscr{A}$与 $\mathscr{B}$ 等价 指 $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}$ 是重言式的二公式 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的关系,记以 $\mathscr{A}\Leftrightarrow\mathscr{B}$。

$\mathscr{A}$的对偶式 设 $\mathscr{A}$ 为仅含$\neg$、$\wedge$、$\vee$之公式,将 $\mathscr{A}$ 中 $\wedge$ 与 $\vee$ 互换、$\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{F}$ 互换所得之公式,记以 A^d。

定理 1.2.1 若 $\mathscr{A} \Leftrightarrow \mathscr{B}$,则对于 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 中命题变元的任一真值指派,$\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的取值相同,反之亦然。

定理 1.2.2 设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{A}_1$ 的一子公式,$\mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{A}$。若 $\mathscr{B}_1$ 是在 $\mathscr{A}_1$ 中一处或多处出现的 $\mathscr{A}$ 代以 $\mathscr{B}$ 所得的公式,则 $\mathscr{B}_1 \Leftrightarrow \mathscr{A}_1$。

性质 1.2.1 若 $\mathscr{A} \vee \mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{C} \vee \mathscr{B}$, $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{C} \wedge \mathscr{B}$,则 $\mathscr{A} \Leftrightarrow \mathscr{C}$。

性质 1.2.2 (1)若 $\mathscr{A} \vee \mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{C} \vee \mathscr{B}$, $\mathscr{A} \vee \neg\mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{C} \vee \neg\mathscr{B}$,则 $\mathscr{A} \Leftrightarrow \mathscr{C}$。

(2)若 $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{C} \wedge \mathscr{B}$, $\mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{C} \wedge \neg\mathscr{B}$,则 $\mathscr{A} \Leftrightarrow \mathscr{C}$。

定理 1.2.3 设 $\mathscr{A}$ 为仅含连接词 $\neg$、$\vee$、$\wedge$ 的公式,将 $\mathscr{A}$ 中 $\wedge$ 与 $\vee$ 互换,命题变元以其否定代之得 $\mathscr{A}^*$,则 $\mathscr{A}^* \Leftrightarrow \neg\mathscr{A}$。

系 1.2.1 若 $\mathscr{A}$ 仅含 $\neg$、$\vee$、$\wedge$ 及 $\mathscr{T}$、$\mathscr{F}$,而将 $\wedge$ 与 $\vee$ 互换,$\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{F}$ 互换,命题变元与它本身的否定互换得 $\mathscr{A}^*$,则有 $\mathscr{A}^* \Leftrightarrow \neg\mathscr{A}$。

系 1.2.2 若 $\mathscr{A} \Leftrightarrow \mathscr{B}$,则 $\mathscr{A}^d \Leftrightarrow \mathscr{B}^d$。

系 1.2.3 (1) $\bigvee_{i=1}^{n}(\neg\mathscr{A}_i) \Leftrightarrow \neg(\bigwedge_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i)$

(2) $\bigwedge_{i=1}^{n}(\neg\mathscr{A}_i) \Leftrightarrow \neg(\bigvee_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i)$

§1.3 范　　式

文字 指命题变元或命题变元的否定。

子句 有限个文字的析取式。

短语 有限个文字的合取式。

析取范式 有限个短语的析取式。

合取范式 有限个子句的合取式。

极小项 设 $p_1 \cdots, p_n$ 是 n 个命题变元,一个短语若恰好包含所有这 n 个命题变元或其否定,二者不能同时出现且仅有一个出现,则称此短语为关于 $p_1 \cdots, p_n$ 之一个极小项。

极大项 设 $p_1 \cdots, p_n$ 是 n 个命题变元,一个子句若恰好包含所有这 n 个命题变元或其否定,二者不能同时出现且仅有一个出现,则称此子句为关于 $p_1 \cdots, p_n$ 之一个极大项。

主析(合)取范式 设公式 A 中全体命题变元为 $p_1 \cdots, p_n$,其仅含有相异极小(大)项的析(合)取等价公式称为 A 的主析(合)取范式。

判定问题 指使得经过有限步后能确定一个公式是重言式、矛盾式或可满足的三种情形中哪一种的问题。

定理 1.3.1 任意公式都存在等价于它的析取范式与合取范式。

性质 1.3.1 对于 n 个命题变元来说,其可能不同的极小项共有 2^n 个。

性质 1.3.2 对于 n 个命题变元的 2^n 个极小项的某一个来说,有且仅有一组真值指派使得此极小项的真值为 T。

性质 1.3.3 具有 n 个命题变元的 2^n 个极小项互不等价。

定理 1.3.2 不是矛盾式的任意公式都存在惟一的主析取范式与之等价。

定理 1.3.3 由不是矛盾式的公式 $\mathscr{A}$ 的真值表可求得与之等价的主析取范式。

性质 1.3.4 n 个命题变元的不同极大项数目是 2^n。

性质 1.3.5 n 个命题变元的每一个极大项有且仅有一组真值指派使其真值为 F。

性质 1.3.6 n 个命题变元的 2^n 个极大项互不等价。

定理 1.3.4 不是重言式的每一个公式都存在惟一的主合取范式与之等价。

性质 1.3.7 短语为矛盾式当且仅当至少有一个命题变元及其否定同时出现在此短语中。

性质 1.3.8 子句为重言式当且仅当至少有一命题变元及其否定,同时出现于此子句中。

定理 1.3.5 公式是矛盾式当且仅当在等价于它的析取范式中,每个短语均至少包含一个命题变元及其否定。

定理 1.3.6 公式为重言式的充要条件是在等价于它的合取范式中,每个子句均至少包含一个命题变元及其否定。

§1.4 公式的蕴涵关系

$\mathscr{A}$ **蕴涵** $\mathscr{B}$ 指 $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 为重言式的二公式 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的关系,记以 $\mathscr{A}\Rightarrow\mathscr{B}$。

有效的论证形式 对于论证形式“$\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2\cdots,\mathscr{A}_n;\therefore\mathscr{A}$”,如有真值指派使得 $\mathscr{A}_1\cdots,\mathscr{A}_n$ 均取值 T 而 $\mathscr{A}$ 取真值 F,则称此论证形式是无效的;在其余情形,称此论证形式是有效的。

性质 1.4.1 若由 $\mathscr{B}$ 的真值为 F 而得到 $\mathscr{A}$ 的真值为 F,则 $\mathscr{A}\Rightarrow\mathscr{B}$。

性质 1.4.2 若由 $\mathscr{A}$ 的真值为 T 而得到 $\mathscr{B}$ 的真值为 T,则 $\mathscr{A}\Rightarrow\mathscr{B}$。

性质 1.4.3 若 $\mathscr{A}\Rightarrow\mathscr{B}$ 且 $\mathscr{B}\Rightarrow\mathscr{C}$,则 $\mathscr{A}\Rightarrow\mathscr{C}$。

性质 1.4.4 若 $\mathscr{A}\Leftrightarrow\mathscr{B}$,则 $\mathscr{A}\Rightarrow\mathscr{B}$ 且 $\mathscr{B}\Rightarrow\mathscr{A}$,反之亦然。

性质 1.4.5 若 $\mathscr{A}\Leftrightarrow\mathscr{B}$ 且 $\mathscr{A}\Rightarrow\mathscr{C}$,则 $\mathscr{B}\Rightarrow\mathscr{C}$。

性质 1.4.6 若 $\mathscr{B}\Leftrightarrow\mathscr{C}$ 且 $\mathscr{A}\Rightarrow\mathscr{B}$,则 $\mathscr{A}\Rightarrow\mathscr{C}$。

性质 1.4.7 若 $\mathscr{A}\Rightarrow\mathscr{B}$ 则 $\neg\mathscr{B}\Rightarrow\neg\mathscr{A}$。

性质 1.4.8 若 $\mathscr{A}\Rightarrow\mathscr{B}_1$ 且 $\mathscr{B}_1\Rightarrow\mathscr{B}_2\cdots,\mathscr{B}_{n-1}\Rightarrow\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_n\Rightarrow\mathscr{C}$,则 $\mathscr{A}\Rightarrow\mathscr{C}$。

性质 1.4.9 若 $\mathscr{A}\Rightarrow\mathscr{B}$ 且 $\mathscr{A}\Rightarrow\mathscr{C}$ 则 $\mathscr{A}\Rightarrow\mathscr{B}\wedge\mathscr{C}$。

性质 1.4.10 若 $\mathscr{A}$ 是任一公式,$\mathscr{B}\Rightarrow\mathscr{C}$,则 $\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}\Rightarrow\mathscr{A}\wedge\mathscr{C}$。

定理 1.4.1 若 $\mathscr{C}_1\wedge\cdots\wedge\mathscr{C}_n\wedge\mathscr{A}\Rightarrow\mathscr{B}$,则

(1) $\mathscr{C}_1\wedge\cdots\wedge\mathscr{C}_n\Rightarrow\mathscr{A}\to\mathscr{B}$;

(2) $\mathscr{A}\Rightarrow\mathscr{C}_1\to(\mathscr{C}_2\to\cdots\to(\mathscr{C}_n\to\mathscr{B})\cdots)$。

定理 1.4.2 论证形式“$\mathscr{A}_1\cdots,\mathscr{A}_m;\therefore\mathscr{A}$”是有效的,当且仅当 $\mathscr{A}_1\wedge\cdots\wedge\mathscr{A}_m\Rightarrow\mathscr{A}$。

§1.5 连接词的完备集合

完备的连接词集合 若任一公式都可借助于仅含此集中连接词的等价公式来表达。

独立的连接词 若它不能由连接词集中其他连接词来表达。

系 1.5.1 所有一元与二元连接词均可用 $\neg$ 与 $\vee$ 来表达。

系 1.5.2 所有一元与二元连接词均可用 $\neg$ 与 $\wedge$ 来表达。

系 1.5.3 所有一元与二元连接词均可用 $\neg$ 与 $\to$ 来表达。

定理 1.5.1 $\{\neg,\vee\}$ 是完备的。

定理 1.5.2 $\{\neg,\vee\}$ 中 $\neg$ 与 $\vee$ 均是独立的。

定理 1.5.3 $\downarrow$与$\uparrow$均是完备的。

性质 1.5.3 (1) $(p\bar{\vee}q)\bar{\vee}r \Leftrightarrow p\bar{\vee}(q\bar{\vee}r)$

(2) $p\bar{\vee}q \Leftrightarrow q\bar{\vee}p$

(3) $p\wedge(q\bar{\vee}r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\bar{\vee}(p\wedge r)$

性质 1.5.4 (1) $p\uparrow q\Leftrightarrow q\uparrow p, p\downarrow q\Leftrightarrow q\downarrow p$

(2) $p\uparrow(q\uparrow r)$与$(p\uparrow q)\uparrow r$ 不等价。

(3) $p\downarrow(q\downarrow r)$与$(p\downarrow q)\downarrow r$ 不等价。

§1.6 形式系统 L

命题逻辑的形式系统 L 它由下面四个部分组成：

(1) 符号字母表(无限多个)：$\neg, \rightarrow, (,), p_1, p_2 \cdots$

(2) wf 集：①对每个整数 $i \geqslant 1$, p_i 是 wf；

②若 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 是 wf，则 $(\neg\mathscr{A})$与 $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$也是 wf；

③一切 wf 均由有限次地使用①与②产生。

(3)公理：对任何 wf. $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$、$\mathscr{C}$，下列的 wf 是 L 的公理。

($L1$) $(\mathscr{A}\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A}))$

($L2$) $((\mathscr{A}\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{C}))\rightarrow((\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})\rightarrow(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{C})))$

($L3$) $(((\neg\mathscr{A})\rightarrow(\neg\mathscr{B}))\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A}))$

(4)演绎规则(MP)：对于 L 中 wf. $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$，由 $\mathscr{A}$ 与 $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$可推出 $\mathscr{B}$。

L 中的一个形式证明 它是 wf 的一个有限序列 $\mathscr{A}_1\cdots,\mathscr{A}_n$，使得对于每个$i(i\leqslant i\leqslant n)$，或 $\mathscr{A}_i$ 是L 中的一条公理，或 $\mathscr{A}_i$ 是由序列中前面两个成员比如 $\mathscr{A}_j$ 与 $\mathscr{A}_k(j<i,k<i)$使用 MP 推出。

L 中的一条形式定理 指 L 中的一个形式证明之有限序列中最后一 wf，如 $\mathscr{A}_n$，且记以 $\vdash_L \mathscr{A}_n$。

由 Γ 出发的演绎 令 Γ 是L 的一个 wf 集，对于 L 的 wf 序列 $\mathscr{A}_1\cdots,\mathscr{A}_n$ 中每个 $\mathscr{A}_i(1\leqslant i\leqslant n)$，或是 L 的一条定理，或是 Γ 的一个成员，或是由前面两个成员依 MP 推出的结果，则称此序列为由 Γ 出发的演绎，且记以 $\Gamma\vdash_L\mathscr{A}_n$。

规则 1.6.1 (演绎定理)若 $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}\vdash_L\mathscr{B}$，则 $\Gamma\vdash_L(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$。

规则 1.6.2 若 $\Gamma\vdash_L(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$，则 $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}\vdash_L\mathscr{B}$。

规则 1.6.3(HS) $\{(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B}),(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{C})\}\vdash_L(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{C})$。

§1.7 系统 L 的可靠性、相容性与完备性

可靠性定理 L 的每个定理是重言式。

完备性定理 L 的每个重言式是L 的一条形式定理。

L 的扩张 由改变或扩大 L 的公理集使得L 的一切定理仍为定理的形式系统。

相容扩张 无 L 中 wf. $\mathscr{A}$使 $\mathscr{A}$与$\neg\mathscr{A}$同时为其定理的 L 扩张。

完全扩张 对 L 中每个 wf. $\mathscr{A}$,或 $\mathscr{A}$ 或 $\neg\mathscr{A}$ 为其定理的 L 扩张。

§1.8 定理的机械化证明

形式系统 W 的公式串

(1)任意一个公式是一个公式串;

(2)若 α 与 β 均是公式串,则 α,β 和 β,α 也是,并认为是同一公式串;

(3)所有公式串都是有限次使用(1)与(2)得到的,且空串也是公式串。

相继式 设 α 与 β 是公式串,称 $\alpha \mapsto \beta$ 为前件是 α、后件是 β 的相继式。

公理(J) α 与 β 是公式串,且 α 与 β 中每一个公式都仅仅是命题变元。那么 $\alpha \mapsto \beta$ 是公理当且仅当 α 与 β 至少有一个公共的命题变元。

形式系统 W 的推理规则 设 α 与 β 为公式串,A 与 B 是公式。

($\neg_l$) $\neg A,\alpha \mapsto \beta$ 当且仅当 $\alpha \mapsto \beta, A$

($\neg_r$) $\alpha \mapsto \neg A,\beta$ 当且仅当 $\alpha, A \mapsto \beta$

($\wedge_l$) $\alpha, A\wedge B \mapsto \beta$ 当且仅当 $\alpha, A, B \mapsto \beta$

($\wedge_r$) $\alpha \mapsto A\wedge B,\beta$ 当且仅当 $\alpha \mapsto A,\beta$ 且 $\alpha \mapsto B,\beta$

($\vee_l$) $A\vee B,\alpha \mapsto \beta$ 当且仅当 $A,\alpha \mapsto \beta$ 且 $B,\alpha \mapsto \beta$

($\vee_r$) $\alpha \mapsto A\vee B,\beta$ 当且仅当 $\alpha \mapsto A,B,\beta$

($\rightarrow_l$) $A\rightarrow B,\alpha \mapsto \beta$ 当且仅当 $\alpha \mapsto A,\beta$ 且 $B,\alpha \mapsto \beta$

($\rightarrow_r$) $\alpha \mapsto A\rightarrow B,\beta$ 当且仅当 $\alpha, A \mapsto \beta, B$

($\leftrightarrow_l$) $A\leftrightarrow B,\alpha \mapsto \beta$ 当且仅当 $A,B,\alpha \mapsto \beta$ 且 $\alpha \mapsto A,B,\beta$

($\leftrightarrow_r$) $\alpha \mapsto A\leftrightarrow B,\beta$ 当且仅当 $\alpha, A \mapsto B,\beta$ 且 $B,\alpha \mapsto A,\beta$

W 的一形式证明 指一个相继式的有限序列 $\alpha_1\cdots,\alpha_n$,对于每个 $\alpha_i(1\leqslant i\leqslant n)$,或是 W 中一公理,或是由前面相继式 $\alpha_j(j<i)$ 经规则而得。

W 的定理 指形式证明有限序列中最后一个成员。

二、例 题 解 析

例 1 证明 $\neg(q\wedge r)\wedge(r\rightarrow p)\Leftrightarrow\neg(r\wedge(p\rightarrow q))$。

思路 1: 利用部分真值指派法证:

$\neg(q\wedge r)\wedge(r\rightarrow p)\leftrightarrow\neg(r\wedge(p\rightarrow q))$ 为重言式。

证: 当 p 取 T 时,原式化为 $\neg(q\wedge r)\leftrightarrow\neg(r\wedge q)$ 是重言式;

当 p 取 F 时,原式化为 $\neg(q\wedge r)\wedge\neg r\leftrightarrow\neg r$;

当 r 取 T 时,上式化为 $F\leftrightarrow F$,是重言式;

当 r 取 F 时,上式化为 $T\leftrightarrow T$,是重言式。

思路 2: 利用等价代换来证明两边等价。

证: 左边 $\Leftrightarrow(\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg r\vee p)\Leftrightarrow\neg r\vee(p\wedge\neg q)$

$\Leftrightarrow\neg(r\wedge(\neg p\vee q))\Leftrightarrow$ 右边。

思路 3: 利用逻辑内容解释法来证明两边相互蕴涵。

证: 若左边取值为 F 时,则 q 取 T, r 取 T 或 r 取 T, p 取 F,从而 $p\to q$ 取 T,故右边取值为 F,于是,右$\Rightarrow$左;

若右边取值为 F 时,则 r 取 T, $p\to q$ 取 T。

当 p 取值为 T 时,则 q 取 T,从而 $\neg(q\wedge r)$ 取 F,故左边取值为 F;

当 p 取值为 F 时,则 $r\to p$ 取 F,故左边取值也为 F,于是,左$\Rightarrow$右。

思路 4: 证明两公式对应的主合取范式相同。

证: 左边$\Leftrightarrow(\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg r\vee p)\Leftrightarrow\Pi 1,3,7$

右边$\Leftrightarrow\neg(r\wedge(\neg p\vee q))\Leftrightarrow\neg r\vee(p\wedge\neg q)$

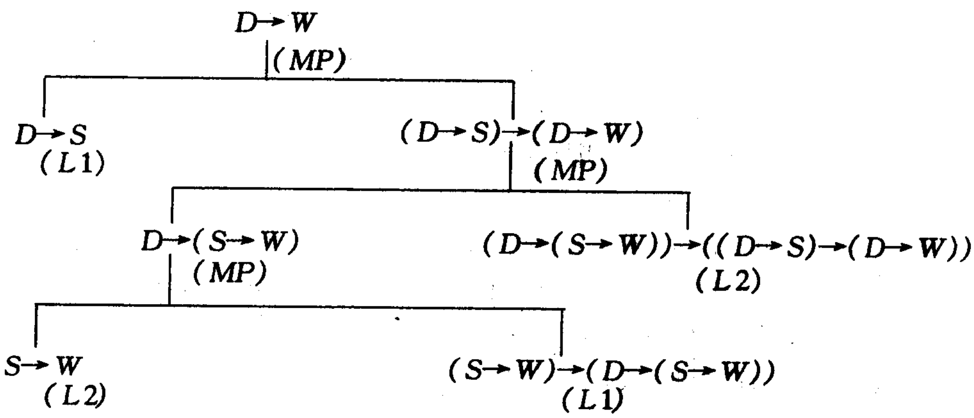
$\Leftrightarrow\Sigma 0,2,4,5,6\Leftrightarrow\Pi 1,3,7$

例 2 利用 L 系统中的公理和规则证明。

$(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$ 是 L 中的定理。

思路: 因无"$\neg$",故仅用$(L1)$,$(L2)$及 MP。

分析: 设 D 表示 $B\to C$, S 表示 $A\to(B\to C)$, W 表示 $(A\to B)\to(A\to C)$,于是应证 $D\to W$ 是 L 中的定理。



证:

(1) $S\to W$	$(L2)$
(2) $(S\to W)\to(D\to(S\to W))$	$(L1)$
(3) $D\to(S\to W)$	$((1),(2),MP)$
(4) $(D\to(S\to W))\to((D\to S)\to(D\to W))$	$(L2)$
(5) $(D\to S)\to(D\to W)$	$((3),(4),MP)$
(6) $D\to S$	$(L1)$
(7) $D\to W$	$((5),(6),MP)$

例 3 证明下列论证形式是有效的。

(1) $\neg p\vee q,\neg(q\wedge\neg r),\neg r;\ \therefore\neg p$

思路: 利用等价代换将每个公式变成仅含$\neg$与$\to$的公式,尔后利用蕴涵的传递性。

证: $(\neg p\vee q)\wedge\neg(q\wedge\neg r)\wedge\neg r\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)\wedge\neg r$

$\Leftrightarrow\neg r\wedge(\neg r\to\neg q)\wedge(\neg q\to\neg p)\Rightarrow\neg p$

(2) $p\vee q,q\to r,p\to s,\neg s;\ \therefore\ r\wedge(p\vee q)$

思路: 令 $\mathscr{A}$ 表示$(p\vee q)\wedge(q\to r)\wedge(p\to s)\wedge\neg s$,由蕴涵的简化规则知,$\mathscr{A}\Rightarrow(p\vee q)$。

依性质1.4.9,余下只须证明 $\mathscr{A} \Rightarrow r$。可利用等价代换将每个公式变成仅含$\neg$与$\rightarrow$的公式，尔后利用蕴涵的传递性。

证:$\mathscr{A} \Leftrightarrow \neg s \wedge (\neg s \rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow r$

三、习　　题

1.将下面复合命题译成符号：

(1) 如果生产任务一定并且生产效率有所提高,那么生产时间必然会减少。

(2) 只要风调雨顺,农业就会获得大丰收。

(3) 如果太阳没有出来,则或者下雨或者阴天,而且温度也下降。

(4) 如 x 是有理数而且 y 是整数,则 z 不是实数。

(5) 或者你没有给我写信,或者它在路上丢失了。

(6) 如果你给我写了信,那么信在路上丢失了。

(7) 两数之和是偶数当且仅当两数均为偶数或两数均为奇数。

(8) 如 y 是整数,则 z 不是实数,只要 x 是有理数。

(9) 说逻辑枯燥无味和毫无价值,这是不对的。

(10) 指南针永指南北,除非它旁边有铁块。

2.(1) 由题1中选出一对具有相同形式的命题。

(2) 由题1中选出一对具有相同意义的命题。

(3) 试否定下列命题:①上海是一个城镇;②每一个自然数都是偶数。

3.试作出下列公式的真值表:

(1) $((\neg p) \wedge (\neg q))$　　(2) $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg(q \rightarrow p)))$

(3) $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$　　(4) $((p \wedge q) \rightarrow r)$

(5) $((p \leftrightarrow (\neg q)) \vee q)$　　(6) $((p \wedge q) \vee (r \wedge s))$

(7) $(((\neg p) \wedge q) \rightarrow ((\neg q) \wedge r))$　　(8) $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$

4.下列各对公式具有相同真值表吗?

(1) $((\neg p) \vee q)$, $(p \rightarrow q)$

(2) $((\neg p) \rightarrow (q \vee r))$, $((\neg q) \rightarrow ((\neg r) \rightarrow p))$

5.下列公式是否为重言式?

(1) $(p \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow p))$

(2) $((q \vee r) \rightarrow ((\neg r) \rightarrow q))$

(3) $((p \wedge (\neg q)) \vee ((q \wedge (\neg r)) \vee (r \wedge (\neg p))))$

(4) $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge (\neg q)) \vee r))$

6.证明下列公式对是等价的:

(1) $(p \rightarrow q)$,　$((\neg q) \rightarrow (\neg p))$

(2) $((p \vee q) \wedge r)$,　$((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$

(3) $(((\neg p) \wedge (\neg q)) \rightarrow (\neg r))$,　$(r \rightarrow (q \vee p))$

(4) $(((\neg p) \vee q) \rightarrow r)$,　$((p \wedge (\neg q)) \vee r)$

7.说明公式 $(((\neg p) \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (\neg q)))$ 不是重言式,试找出 A 与 B,使得公式

$(((\neg A)\to B)\to(A\to(\neg B)))$是矛盾式。

8.设 A、B、C 是任意公式,试证下列每对公式是等价的:

(1) $(A\to B)\wedge(C\to B)$, $A\vee C\to B$

(2) $\neg(A\leftrightarrow B)$, $(A\vee B)\wedge\neg(A\wedge B)$

9.设 A,B,C 是任意公式,证明下列公式为重言式:

(1) $(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$

(2) $((A\vee B)\wedge\neg(\neg A\wedge(\neg B\vee\neg C)))\vee(\neg A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge\neg C)$

10.用定理1.2.2证明二公式等价:$((\neg(\neg p\vee q))\vee r)$与$((p\to q)\to r)$。

11.使用定理1.2.2及系1.2.3证明公式$((\neg(p\vee(\neg q)))\to(q\to r))$与下列每一个公式等价,并写出其对偶式。

(1) $((\neg(q\to p))\to((\neg q)\vee r))$　　(2) $(((\neg p)\wedge q)\to(\neg(q\wedge(\neg r))))$

(3) $((\neg((\neg q)\vee r))\to(q\to p)$　　(4) $(q\to(p\vee r))$

12.试化简下列公式:

(1) $((p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p))\wedge r$　　(2) $p\vee(\neg p\vee(q\wedge\neg q))$

(3) $(p\wedge(q\wedge s))\vee(\neg p\wedge(q\wedge s)$

13.求出等价于下列公式的析取范式及主析取范式:

(1) $(p\to q)$　　(2) $(p\to((\neg q)\vee r))$

(3) $((p\wedge q)\vee((\neg q)\leftrightarrow r))$　　(4) $\neg((p\to(\neg q))\to r)$

(5) $(((p\to q)\to r)\to s)$

14.求出等价于下列公式的合取范式及主合取范式:

(1) $(((\neg p)\vee q)\to r)$　　(2) $(p\leftrightarrow q)$

(3) $(p\wedge q\wedge r)\vee((\neg p)\wedge(\neg q)\wedge r)$　　(4) $(((p\to q)\to r)\to s)$

15.判断下列公式是否为重言式、矛盾式或二者均不是。

(1) $(p\to(q\wedge r)\wedge(\neg p\to(\neg q\wedge\neg r)))$　　(2) $p\to(p\wedge(q\to p))$

(3) $(q\to p)\wedge(\neg p\wedge q)$

16.试证下列蕴涵关系:

(1) $(A\wedge B)\Rightarrow(A\to B)$

(2) $(A\to B)\to B\Rightarrow A\vee B$

(3) $((A\vee\neg A)\to B)\to((A\vee\neg A)\to C)\Rightarrow(B\to C)$

(4) $(B\to A\wedge\neg A))\to(C\to(A\wedge\neg A))\Rightarrow(C\to B)$

17.对于下列每个论证写出对应的论证形式,并确定是否有效。

(1) 若函数 f 不连续,则函数 g 不可导。现 g 可导,因此 f 是连续的。

(2) 如果史密斯有电冰箱,则或者他卖了洗衣机,或者他向别人借了钱。史密斯没有向别人借钱,所以如果史密斯没有卖掉洗衣机,则他没有电冰箱。

(3) 如果史密斯获得冠军,则或者专家判断正确,或者他听错了。史密斯没有获得冠军,不然专家判断错误,所以他没听错。

(4) 如 U 是 V 的子空间,则 U 是 V 的子集,U 包含零矢量且 U 是封闭的。U 是 V 的子集,而且如 U 是封闭的,则 U 包含零矢量。因而如 U 是封闭的,则 U 是 V 的子空间。

18.假设“$A_1\cdots,A_n;\therefore A$”是有效论证形式,证明:“$A_1\cdots,A_{n-1};\therefore(A_n\to A)$”也是有效

论证形式。

19. 证明下面是有效论证形式：$p,(p\uparrow(q\uparrow r));\therefore r$。

20. 试写出仅含连接词$\neg$和$\vee$的等价于下列公式的公式：

(1) $(p\to(q\to r))$　　(2) $(((\neg p)\wedge(\neg q))\to((\neg r)\wedge s))$

(3) $((p\leftrightarrow(\neg q))\leftrightarrow r)$

21. 试求出仅含连接词$\neg$和$\wedge$的公式，使之等价于下列公式：

(1) $(p\to(\neg q\to r))$　　(2) $((p\vee q\vee r)\wedge((\neg p)\vee(\neg q)\vee(\neg r)))$

(3) $((p\leftrightarrow(\neg q))\leftrightarrow r)$

22. 试求出仅含连接词$\neg$和$\to$的公式使之等价于下列公式：

(1) $((p\wedge q)\vee(r\wedge s))$　　(2) $(p\leftrightarrow q)$　　(3) $(p\wedge q\vee r)$

23. 证明下列集合不是连接词完备集合：

(1) $\{\vee,\wedge\}$　　(2) $\{\neg,\leftrightarrow\}$

24. 已知公式 $p\uparrow(q\wedge\neg(r\downarrow p))$，试求其对偶，并写出与它们等价又仅含连接词$\neg$、$\wedge$、$\vee$的公式。

25. (1) 仅用$\uparrow$表达 $p\to(\neg q\to p)$，再用$\downarrow$表示它。

(2) 仅用$\downarrow$表达 $p\uparrow q$；仅用$\uparrow$表达 $p\downarrow q$。

26. 试写出下列 wf 在 L 中的形式证明：

(1) $(p_1\to p_2)\to((\neg p_1\to\neg p_2)\to(p_2\to p_1))$

(2) $((p_1\to(p_2\to p_3))\to(p_1\to p_2))\to((p_1\to(p_2\to p_3))\to(p_1\to p_3))$

(3) $(p_1\to(p_1\to p_2))\to(p_1\to p_2)$

(4) $(p_1\to(p_2\to(p_1\to p_2)))$

27. 试证对于 L 中任何 wf. A、B、C，下列均是成立的：

(1) $\{(\neg A)\}\vdash_L(A\to B)$　　(2) $\{(\neg\neg A))\}\vdash_L A$

(3) $\{(A\to B),(\neg(B\to C)\to(\neg A))\}\vdash_L(A\to C)$

(4) $\{(A\to(B\to C))\}\vdash_L(B\to(A\to C))$

28. 用 L 的演绎定理证明下列 wf 是 L 的定理，其中 A 与 B 均是 L 的任意 wf。

(1) $(A\to(\neg(\neg A)))$　　(2) $((B\to A)\to((\neg A)\to(\neg B)))$

(3) $(((A\to B)\to A)\to A)$　　(4) $(\neg(A\to B)\to(B\to A)$

29. 令 L'是异于L 的形式系统，它们的差别在于：以公理模式

$$(L_3'):((\neg A\to\neg B)\to((\neg A\to B)\to A))$$

代(L_3)，证明对 L(同时也是 L')的任意 wf. A 与 B 有

(1) $\vdash_L((\neg A\to\neg B)\to((\neg A\to B)\to A))$

(2) $\vdash_{L'}((\neg A\to\neg B)\to(B\to A))$

推证 wf 是 L 的一条定理当且仅当它是L'的一条定理。

30. HS 规则是 L 演绎的一条合理的附加规则，在同样的意义下下述规则是否合理：由 wf. B 与$(A\to(B\to C))$推出$(A\to C)$。

31. 证明 L 的每个公理是重言式。

32. 令 A 是 L 的一个 wf 且令 L^+ 是包含 A 作为一条新公理而得到的 L 的一个扩张。证明 L^+ 的定理集与 L 的定理集不同当且仅当 A 不是 L 的定理。

33. 令 A 是 wf. $((\neg p_1 \to p_2) \to (p_1 \to \neg p_2))$，证明包含 A 作为一条新公理的 L 的扩张 L^+ 的定理集大于 L 的定理集。L^+ 是 L 的相容扩张吗?

34. 证明：如 B 是矛盾式，则 B 不可能是 L 的任何相容扩张的一条定理。

35. 令 L^{++} 是包含下面的第四个公理模式的 L 的一个扩张：

$$(\neg A \to B) \to (A \to \neg B)$$

证明 L^{++} 是不相容的。

36. 令 J 是 L 的一个相容完全扩张，A 是 L 的一公式，证明包含 A 作为一条新公理的 J 的扩张是相容的，当且仅当 A 是 J 的一条定理。

37. 设 A 是 L 中的一个 wf，命题字母 $p_1, p_2 \cdots, p_n$ 在其中出现，令 $A_1, A_2 \cdots, A_n$ 是 L 的任意 wf，且令 B 是 L 的一个 wf，它是将 A 中每个 p_i 出现处 $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 代以 A_i 而得到的。证明：若 A 是 L 的一条定理，则 B 也是 L 的一条定理。

38. 根据 L 的可靠性定理和完备性定理判断下列各公式是否为 L 中的定理。

(1) $p_1 \to (p_2 \to \neg(p_1 \to p_2))$

(2) $(p_1 \to p_2) \to ((p_3 \to p_1) \to (p_3 \to p_2))$

(3) $(p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_3 \to (p_1 \to p_2))$

(4) $(((p_1 \to p_2) \to p_3) \to p_4) \to ((p_2 \to p_3) \to (p_1 \to p_4))$

39. 用王浩系统的证明方法来确定下列各公式是否为定理。

(1) $\vdash \to \neg(p_1 \vee p_2) \to \neg p_1$

(2) $\vdash \to (\neg p_1 \wedge \neg p_2) \to (p_1 \leftrightarrow p_2)$

(3) $\vdash \to (p_1 \wedge p_2 \to p_3) \wedge \neg p_4 \wedge \neg p_3 \to \neg p_1 \vee \neg p_2$

(4) $\vdash \to ((p_1 \vee p_2) \to p_3) \leftrightarrow p_4$

四、难 题 提 示

23. (1)首先考虑只包含一个命题变元 p 及连结词 $\vee$ 与 $\wedge$ 之 wf. $C(p)$，证明 $C(T)$ 为 T，然后考察矛盾式。

(2) 首先考虑只包含命题变元 p 和 q 连结词 $\neg$ 与 $\leftrightarrow$ 之 wf. $C(p,q)$，证明 $C(p,q)$ 有偶数个 T。

24. $p \uparrow q$ 与 $p \downarrow q$ 互为对偶。

26. (1)用($L3$)，($L1$)。

(2)用两次($L2$)。

(3)用($L1$)及多次用($L2$)。

(4)用两次($L1$)。

27. (1)例 1.6.4(1)。

(2)用($L1$)和多次用($L3$)。

(3)用($L3$)，($L2$)。

(4)用$(L2)$,$(L1)$,HS。

28. (1)用题27(2)。

(2)用题27(2),题28(1)及 HS。

(3)用例1.6.2(2)与 HS。

(4)用题28(2)与例1.6.4(1)。

29. (1)用例1.6.4(2),$(L3)$与 HS。

(2)因$(L3)$之在演绎定理的证明中并未用到,所以演绎定理对 L'成立。

33. 用反证法。

34. 用反证法。

35. 设 A 和B 是重言式。

37. 用性质1.7.1,定理1.1.2及依性质1.7.7

38. 用性质1.7.1与性质1.7.7

五、习 题 解 答

1.(1)设 A:生产任务一定,B:生产效率有所提高,C:生产时间必然会减少,则符号化为 $A \wedge B \rightarrow C$

(2)设 A:风调雨顺,B:农业会获得大丰收,则符号化为 $A \rightarrow B$

(3)设 A:太阳没有出来,B:下雨,C:阴天,D:温度下降,则符号化为 $A \rightarrow (B \vee C) \wedge D$

(4)设 A:x 是有理数,B:y 是整数,C:z 是实数,则符号化为 $A \wedge B \rightarrow \neg C$

(5)设 A:你没有给我写信,B:信在路上丢了,则符号化为 $A \bar{\vee} B$

(6)设 A:你给我写了信,B:信在路上丢了,则符号化为 $A \rightarrow B$

(7)设 A:两数之和是偶数,B:两数均是偶数,C:两数均是奇数,则符号化为 $A \leftrightarrow (B \bar{\vee} C)$

(8)设 A:x 是有理数,B:y 是整数,C:z 是实数,则符号化为 $A \rightarrow (B \rightarrow \neg C)$

(9)设 A:指南针永指南北,B:指南针旁边有磁铁,则符号化为$\neg B \rightarrow A$

2.(1):(2),(6)

(2):(4),(8)

(3):①上海不是一个城镇;②并非每一个自然数都是偶数。

3.从略。

4.(1)有;(2)有。

5.(1),(2)是。

6.(1)**证**:由真值表即明。

(2)**证**:由分配律即明。

(3)**证**:由(1)知,左式与$(r \rightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q))$等价,再由摩根律即明。

(4)**证**:利用等价关系表中的(11)与(9)即明。

7.取 p 真与q 真。取 A 与B 均为重言式。

8.(1)**证**:左式$\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(\neg C\vee B)$ 等价关系(11)

$\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg C)\vee B$ 分配律

$\Leftrightarrow\neg(A\vee C)\vee B$ 摩根律

$\Leftrightarrow$右式 等价关系(11)

(2)**证**:利用等价关系表中的(12)与(9)知,左式与$\neg(A\wedge\neg B)\wedge\neg(A\wedge B)$等价,再利用摩根律即明。

9.(1)**证**:因 $A\rightarrow(B\rightarrow C)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B\vee C$ 等价关系(11)

$\Leftrightarrow\neg B\vee\neg A\vee C$ 交换律

$\Leftrightarrow B\rightarrow(A\rightarrow C)$ 等价关系(11)

及 $p\rightarrow p$ 是重言式即明。

(2)**证**:利用摩根律,分配律,吸收律可证第一项与 $A\vee B$ 等价,而第二项与$\neg(A\vee B)$等价,故原式是重言式。

10.**证**:因$\neg A\vee B\Leftrightarrow A\rightarrow B$,故左式$\Leftrightarrow\neg(p\rightarrow q)\vee r\Leftrightarrow$右式。

11.(1)**证**:由$\neg(q\rightarrow p)\Leftrightarrow(\neg(\neg q\vee p)\Leftrightarrow\neg(p\vee\neg q)$即明。

(2)**证**:由$\neg(p\vee\neg q)\Leftrightarrow\neg p\wedge q$ 及$\neg(q\wedge\neg r)\Leftrightarrow q\rightarrow r$ 即明。

(3)**证**:式(2)$\Leftrightarrow(q\wedge\neg r)\rightarrow\neg(\neg p\wedge q)$ 题6(1)

$\Leftrightarrow\neg(\neg q\vee r)\rightarrow(p\vee\neg q)$ 等价关系(11)(9)

$\Leftrightarrow$式(3) 等价关系(3)(11)

(4)**证**:式(4)$\Leftrightarrow\neg q\vee p\vee r$ 等价关系(11)

$\Leftrightarrow(p\vee\neg q)\vee(\neg q\vee r)$ 等价关系(1)(2)

$\Leftrightarrow$原式 等价关系(11)

由(4)的证明知,其对偶式为 $p\wedge\neg q\wedge r$

12.(1)**解**:因$(p\rightarrow q)\Leftrightarrow\neg q\rightarrow\neg p$,故由$\leftrightarrow$定义及交换律与同一律有:原式$\Leftrightarrow T\wedge r\Leftrightarrow r$

(2)**解**:由互补律与囿律知 原式$\Leftrightarrow T$

(3)**解**:由分配律与互补律知 原式$\Leftrightarrow q\wedge s$

13.(1)$p\rightarrow q\Leftrightarrow\neg p\vee q$ 析取范式

$\Leftrightarrow\Pi 2$

$\Leftrightarrow\Sigma 0,1,3$ 主析取范式

(2)原式$\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q\vee r$ 析取范式

$\Leftrightarrow\Pi 6$

$\Leftrightarrow\Sigma 0,1,2,3,4,5,7$ 主析取范式

(3)原式$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r)$ 析取范式

$\Leftrightarrow\Sigma 1,2,5,6,7$ 主析取范式

(4)原式$\Leftrightarrow\neg(\neg(\neg p\vee\neg q)\vee r)$ 等价关系(11)

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\wedge\neg r$ 等价关系(9)

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge\neg r)$ 析取范式

$\Leftrightarrow\Sigma 0,2,4$ 主析取范式

(5)原式$\Leftrightarrow\neg(\neg(\neg p\vee q)\vee r)\vee s$ 等价关系(11)

$\Leftrightarrow((\neg p\vee q)\wedge\neg r)\vee s$ 等价关系(9)