1996年
研究生入学考试
数学复习指南
（1－5类）

陈文灯教授 主编

1996 年研究生入学考试
数学复习指南
（1—5 类）

陈文灯教授　主编

京华出版社

(京)新登字 215 号

责任编辑:孙建庆
封面设计:冬　冰

京华出版社出版发行
(100007　北京张自忠路 3 号东院)
北京人民警院印刷厂印刷
各地新华书店经销
*
850×1168mm　32 开　34.25 印张　880 千字
1995 年 7 月第 1 版　1995 年 7 月第 1 次印刷
印数:1—10000 册
ISBN 7-80600-108-5/G・46　　定价:30.00 元

前　言

本书是根据教委颁布的“考研数学复习大纲”，参照教委考试中心“87—95年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题”的格式，融入作者十几年“考研班”辅导的经验而编写的一本应试之作。在编写过程中我们参考了陈文灯教授等编撰的《高等数学复习指导——思路、方法、技巧》等书。本书对难度较大的题型均作出思维定式处理，读者在短期内，对照归纳、总结的方法、技巧，阅读相关的典型例题便可达到融汇贯通，举一反三，触类旁通的境界。

本书的特点：

(1)对“大纲”所要求的重要概念，理论进行剖析，增强读者的理解和记忆，避免犯概念性及错用公式、定理的解题错误。

(2)针对“考研”的题型，安排相应的章节，深入分析探究，总结出解题方法和技巧，便于读者掌握和应用。

(3)用“举题型讲方法”的格式代替各书普遍采用的“讲方法套题型”的作法，使读者应试时思路畅道“有的放矢”。

(4)介绍许多新的快速的解题方法和技巧，大大提高读者的解题速度和准确性。

(5)广泛采用表格法，使读者对要点一目了然。

本书是考研应试者的良师诤友，是取得成功的一本有价值的参考书。

参加本书编写的有陈文灯、黄先开、郭玉芝、李金生、黄惠青、田增保等。陈文灯任主编。黄先开、郭玉芝为副主编。

由于成书匆忙，错误和不当之处在所难免，请读者批评指正。

编者

1995.5.

目　　录

第一篇　高等数学

第一章　函数极限连续

§1.1　函数

Ⅰ)**定义**　设有两个变量 x、y，如果对于 x 的变域 D 中的每一值，按照一定的法则，变量 y 有一个确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y=f(x)$$

函数概念的两个要素：

(1)定义域≜自变量 x 的变化范围，记为 D_f(若函数是解析式子表示的，则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域)。

(2)对应关系≜给定 x 值，求 y 值的方法。

〔**解题提示**〕　当且仅当给定的两个函数，其定义域和对应关系完全相同时，才表示同一函数，否则就是两个不同的函数。

例 1.1　下列各组函数中，哪些组是等价的？

(1)　$y=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$　与　$y=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^3}}$

(2)　$y=\sqrt{log^2_{\frac{1}{3}}x-2log_{\frac{1}{3}}xlog_3x+log_3{}^2x}$

与　$y=log_{\frac{1}{3}}x-log_3x$

(3) $y=(\int_0^{x^2} f(t)dt)'$ 与 $y=2xf(x^2)$

其中 $f(u)$为连续函数。

〔解〕(1)该组的定义域均为 $x\neq0$，且对应关系也相同，故该组两函数是等价的。

(2) $y=\sqrt{log^2_{\frac{1}{3}}x-2log_{\frac{1}{3}}xlog_3x+log_3^2x}$

$$=\begin{cases}log_{\frac{1}{3}}x-logx_3x, & \text{当 } 0<x\leqslant1\\ log_3x-log_{\frac{1}{3}}x, & \text{当 } x>1\end{cases}$$

该组的两个函数定义域均为$(0,+\infty)$，但对应关系不同，故是不等价的。

(3) $\because y=(\int_0^{x^2} f(t)dt)'=f(x^2)\cdot 2x$

$\therefore$该组的两函数是等价的。

注：函数的表示法只与定义域和对应关系有关，而与用什么字母表示无关，即

$$f(x)=f(t)=f(u)=\cdots$$

例 1.2 设 $f(x)$满足方程：$af(x)+bf(\frac{1}{x-1})=e^x$，其中 $|a|\neq|b|$，求$\frac{df(x)}{dx}$

〔解〕先求出 $f(x)$的表达式。为此，利用函数表达式与用什么字母表示无关的特性有

$$af(x)+bf(\frac{x}{x-1})=e^x \quad (1)$$

令$\frac{x}{x-1}=t$， 得 $x=\frac{t}{t-1}$， 于是(1)$\Rightarrow$

$$af(\frac{t}{t-1})+bf(t)=e^{\frac{t}{t-1}} \quad \text{即}$$

$$bf(x)+af(\frac{x}{x-1})=e^{\frac{x}{x-1}} \quad (2)$$

解(1)、(2)联立方程组，得

$$f(x)=\frac{ae^{x}-be^{\frac{x}{x-1}}}{a^{2}-b^{2}}$$

再将 $f(x)$ 对 x 求导，得

$$\frac{df}{dx}=\frac{a}{a^{2}-b^{2}}e^{x}+\frac{b}{a^{2}-b^{2}}\frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^{2}}$$

Ⅰ） 函数的定义域的求法

记住下列简单函数的定义域：

$y=\frac{1}{x}$， $D_f: x\neq 0$， $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$y=\sqrt[2n]{X}$， $D_f: x\geqslant 0$， $[0,+\infty)$

$y=log_a x$， $D_f: x>0$， $(0,+\infty)$

$y=sinx$ 或 $cosx$，D_f: x 为任意实数， $(-\infty,+\infty)$

$y=tgx$， $D_f: x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$

$y=ctgx$， $D_f: x\neq k\pi$ $k\in Z$

〔解题提示〕求复杂函数的定义域，就是求解简单函数的定义域所构成的不等式组的解集。

例 1.3 求下列函数的定义域

(1) $y=log_{x-1}(16-x^{2})$；

(2) $F(x)=\int_{x^{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{sint}{t}dt$；

(3) $y=arcsin\frac{2x-1}{7}+\frac{\sqrt{2x-x^{2}}}{lg(2x-1)}$

〔解〕(1) $\begin{cases}16-x^{2}>0\\ x-1>0\\ x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|<4\\ x>1\\ x\neq 2\end{cases}\Rightarrow$

$1<x<2$ 及 $2<x<4$，即 $(1,2)\cup(2,4)$

(2)该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。初学者易写成 $D_f: x$

$\neq 0$,究其原因是对可积函数类不甚了解。因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,所以 $x=0$ 是被积函数的第一类间断点,因此 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在包含 $x=0$ 的区间内积分有意义。

(3) $$\begin{cases}\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\\ 2x-x^2\geqslant 0\\ 2x-1>0\\ 2x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6\leqslant 2x\leqslant 8\\ x(x-2)\leqslant 0\\ 2x-1>0\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4\\ 0\leqslant x\leqslant 2\\ x>\frac{1}{2}\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow$$

$\frac{1}{2}<x<1$ 及 $1<x\leqslant 2$,即 $(\frac{1}{2},1)\cup(1,2]$

例 1.4 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -1, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求下列函数的定义域。(1)$f(2x)$; (2)$f(x+3)$。

〔解〕(1) $$f(2x)=\begin{cases}1\ , & 0\leqslant 2x\leqslant 1\\ -1\ , & 1<2x\leqslant 2\end{cases}$$
$$=\begin{cases}1\ , & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\\ -1\ , & \frac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

$\therefore D_f$:〔0,1〕

(2) $$f(x+3)=\begin{cases}1\ , & 0\leqslant x+3\leqslant 1\\ -1\ , & 1<x+3\leqslant 2\end{cases}$$
$$=\begin{cases}1\ , & -3\leqslant x\leqslant -2\\ -1\ , & -2<x\leqslant -1\end{cases}$$

D_f:〔$-3,-1$〕

Ⅱ) 函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义,如果对于 $\forall\ x\in$ X 恒有

$$f(x)=f(-x) \qquad (\text{或 } f(x)=-f(-x))$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数)。

偶函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称;奇函数的图象关于坐标原点对称。

〔解题提示〕

①判别给定函数的奇偶性,主要是根据奇偶性的定义,有时也用其运算性质。

② $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法。

③函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若定义域关于原点不对称,则该函数就不是奇偶函数。

④奇偶函数的运算性质:

1°奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数;

2°偶数个奇(或偶)函数的积为偶函数;

3°一奇函数与一偶函数的乘积为奇函数。

例 1.5 判别下列函数之奇偶性:

(1) $y=ln(x+\sqrt{x^2+1})$

(2) $y=F(x)(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2})$ 其中 $a>0, a\neq 1, F(x)$ 为奇函数。

(3) $y=\int_0^x f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 为奇函数。

〔解〕(1)令 $f(x)=ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$$f(-x)=ln(-x+\sqrt{x^2+1})$$

$$=ln\frac{(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$=-f(x)$$

故 $f(x)=ln(x+\sqrt{x^2+1})$为奇函数。

〔解题提示〕凡遇到根式 $a+\sqrt{b}$（其共轭根式为($a-\sqrt{b}$ 或 $-a+\sqrt{b}$)，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$（其共轭根式为 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$)，不论其在分子或分母上都应用其共轭根式处理)。

(2)令$g(x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}$， 则

$$g(x)+g(-x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}+\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=0$$

$\therefore g(x)$为奇函数。

又 $F(x)$为奇函数

故 $y=F(x)(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2})$为偶函数。

(3)令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

$$\because F(-x)=\int_0^{x} f(t)dt \xlongequal{令 t=-u} \int_0^x f(-u)(-du)$$

$$\xlongequal{\because f(x)=-f(-x)} \int_0^x[-f(u)](-du)=$$

$$\int_0^x f(u)du=\int_0^x f(t)dt=F(x)$$

$\therefore y=\int_0^x f(t)dt$，当 $f(x)$为奇函数时，是偶函数。

2.周期性

设函数 $f(x)$在区间 X 上有定义，若存在一个与 x 无关的正数 T，使对于任一 $x\in$ X，恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$是以 T 为周期的周期函数。通常把满足关系式的最小正数 称为函数 $f(x)$的周期。

〔解题提示〕

①判别给定的函数 $f(x)$是否为周期函数，主要是根据周期

的定义，有时也用其运算性质。

②周期函数的运算性质：

1°若 T 为 $f(x)$ 的周期，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$

2°若 $f(x),g(x)$ 均是以 T 为周期的函数则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数。

3°若 $f(x),g(x)$ 分别是以 $T_1,T_2,T_1\neq T_2$ 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1、T_2 的最小公倍数为周期的函数。

例 1.6　当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)=0$　且

$$f(x+\pi)=f(x)+\sin x$$

则在 $(-\infty,+\infty)$ 内，$f(x)$ 是　　(b)

(a) 是以 π 为周期的函数，(b) 是以 2π 为周期的函数，

(c) 是以 3π 为周期的函数，(d) 不是周期函数。

〔解〕考研的试题是单项选择题，因此我们在本书中所列举的也是属这类。

由题设条件 $f(x+\pi)\neq f(x)$，所以 (a) 不入选。

$$\because f(x+2\pi)=f[(x+\pi)+\pi]$$

$$\overset{\text{由题设}}{=\!=\!=}f(x+\pi)+\sin(x+\pi)$$

$$\overset{\text{再由题设}}{=\!=\!=\!=}[f(x)+\sin x]-\sin x=f(x)$$

$\therefore f(x)$ 是以 2π 为周期的函数。故 (b) 入选。

3. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在 X 上有定义，如果存在 $M>0$，使得对于一切 $x\in$ X，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在 X 上有界；若不存在这样的 $M>0$，则称 $f(x)$ 在 X 上无界。

注意：

①函数 $f(x)$有无界是相对于某个区间而言；

②分辨无界函数与无穷大量；

③几个常见的有界函数：

$$|\sin x|\leqslant 1,\quad |\cos x|\leqslant 1,\quad (-\infty,+\infty)$$

$$|\operatorname{arctg} x|\leqslant\frac{\pi}{2},\quad |\operatorname{arcctg} x|\leqslant\pi,\quad (-\infty,+\infty)$$

④设函数 $f(x)$，$g(x)$均是(a,b)内的有界函数，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$均是(a,b)内的有界函数。

4. 单调性

设函数 $y=f(x)$在区间 X 上有定义，如果对$\forall\ x_1,x_2\in X$，$x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\qquad (或\ f(x_1)>f(x_2))$$

则称 $f(x)$在 X 上是单调增加的(或单调减少的)。

Ⅳ） 分段函数 初等函数

1. 如果一个函数在其定义域内，对应于不同的区间段有着不同的表达形式，则该函数称为分段函数。

常见的几个分段函数：

1°符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & 当\quad x>0\\ 0, & 当\quad x=0\\ -1, & 当\quad x<0\end{cases}$$

2°y 是 x 的最大整数部分，记为

$$y=[x]$$

3°狄利克莱(*Dirichlet*)函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\ 为有理数时,\\ 0, & 当\ x\ 为无理数时。\end{cases}$$

2. 反函数

设函数 $y=f(x)$的值域为 Z_f，如果对于 Z_f 中任一 y 值，从

关系式 $y=f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数。记为

$$x=\varphi(y)$$

它称为函数 $y=f(x)$ 的反函数。习惯上，$y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$。

注意：

①$y=f(x)$ 的图象与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图象重合；$y=f(x)$ 的图象与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。

②只有一一对应的函数才有反函数。

求反函数的步骤：

(1)把 x 从方程 $y=f(x)$ 中解出；

(2)把第一步所得到的表达式中的 x 与 y 对换，即得所求函数的反函数。

例 1.7　设 $f(x)=\begin{cases}3x, & -2<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 2^x, & 2<x\leqslant 4,\end{cases}$ 则 $f^{-1}(x)=(c)$

$(a)\begin{cases}\frac{1}{3}x, & -2<x<1\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ log_2 x, & 2<x\leqslant 4,\end{cases}$　　$(b)\begin{cases}\frac{1}{3}x, & -6<x<3\\ -\sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 4\\ log_2 x, & 4<x\leqslant 16,\end{cases}$

$(c)\begin{cases}\frac{1}{3}x, & -6<x<3\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 4\\ log_2 x, & 2<x\leqslant 4,\end{cases}$　　(d)以上都不对

〔解〕求分段函数的反函数，只要分别求出各区间段的反函数及定义域即可。

由 $y=3x,\quad -2<x<1$，可得

$x=\frac{y}{3}$， $-6<y<3$，于是反函数为

$y=\frac{1}{3}x$， $-6<x<3$

由 $y=x^2$， $1\leqslant x\leqslant 2$ 可得

$x=\sqrt{y}$， $1\leqslant y\leqslant 4$， 于是反函数为

$y=\sqrt{x}$， $1\leqslant x\leqslant 4$，

由 $y=2^x$， $2<x\leqslant 4$， 可得

$x=log_2y$， $4<y\leqslant 16$， 于是反函数为

$y=log_2x$， $4<x\leqslant 16$

综上所述，所求函数的反函数为 $y=\begin{cases}\frac{1}{3}x, & -6<x<3\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 4\\ log_2x, & 4<x\leqslant 16\end{cases}$

故(c)入选。

3. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ，若 $D_f\cap Z_\varphi\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数。

y—因变量，u—中间变量，x—自变量

4. 初等函数

由基本初等函数 $c, x^m, a^x, log_a{}^x$，三角函数($sinx, cosx, tgx, ctgx$)，反三角函数($arcsinx, arccosx, arctgx, arcctgx$)通过四则运算或复合而成的只能用一个式子表示的函数称为初等函数。

一般讲，分段函数不是初等函数，但也有例外。例如 $y=\sqrt{x^2}$，就是初等函数，也是分段函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

5. 函数复合的方法

将两个或两个以上函数进行复合是本节的难点。以下根据函数的特点分别讲述几种方法。

①代入法(适用于初等函数的复合)

把一个函数的表达式代替另一个函数中的自变量，这样就得到这两个函数的复合函数。这种方法称之为代入法。

例 1.8 求下列复合函数

(1)设 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$,求 $f[f(f(x))]$并 D_f

(2)设 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x)\cdots)}_{n次}$并 D_f

〔解〕

$$(1)f(f(x))=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}=\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}=\frac{\frac{-2}{x+1}}{\frac{2x}{x+1}}=-\frac{1}{x}$$

$$f[f(f(x))]=\frac{-\frac{1}{x}-1}{-\frac{1}{x}+1}=\frac{x+1}{1-x}\qquad D_f:x\neq 0,1,-1$$

$$(2)f_2(x)=f(f(x))=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+(\frac{x}{1+x^2})2}}=$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+2f_2^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

由此可推测

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$