高等教育自学考试教学指导组　倪鼎力　编

高等数学(一)

全国高等教育自学考试公共课辅导丛书

→应试高分指导

→命题规律分析

→试卷答案详释

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

全国高等教育自学考试公共课辅导丛书

高等数学(一)

高等教育自学考试教学指导组　倪鼎力　编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

高等数学.1/倪鼎力编.—北京：北京理工大学出版社，2002.9
ISBN 7-81045-990-2

Ⅰ.高… Ⅱ.倪… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 046411 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68912824(发行部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
电子邮箱 / chiefedit@bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京房山先锋印刷厂
装　　订 / 天津市武清区高村印装厂
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 18.25
字　　数 / 449 千字
版　　次 / 2002 年 9 月第 1 版　　2002 年 9 月第 1 次印刷
印　　数 / 1～5000 册　　　　责任校对 / 陈玉梅
定　　价 / 26.00 元　　　　责任印制 / 母长新

出版说明

高等教育自学考试是以国家考试为主导、个人自学、社会助学为主要条件的高等教育形式。它的存在与发展受到了社会各界的欢迎与高度重视，也引起了世界的瞩目。为了使自学考生通过正确的方法与技巧学好各门公共课，深入理解各门课程的基本概念、基本原理，提高理论水平和解决分析问题的能力，并在自学考试中取得好成绩，我们组织了人大、北师大、理工大等高校的教授、命题专家及多年从事教学与自学考试辅导，并具有丰富经验的教师，依据最新的自学考试大纲和指定教材，吸取全国高等教育自学考试指导委员会的最新精神，精心编写了这套《全国高等教育自学考试公共课辅导丛书》。

本套丛书公共课包括计算机应用基础、大学语文、高等数学、毛泽东思想概论、法律基础与思想道德修养、马克思主义政治经济学原理、马克思主义哲学原理、邓小平理论概论共8个科目。其特征如下：

一、体例新颖，针对性强。对一门学科的理解与掌握，最关键的是要理清其独特的知识脉络与体系，在这个清晰的框架中，再深入把握基本概念和基本原理。在理解概念和原理过程中再把握每一章节内部、各章节之间、学科之间的纵横联系，这样才能加深理解，并能融会贯通。这套丛书就是基于这一思想，通过知识网络图解、内容详解与分析或提示，使考生掌握知识的内在逻辑关系。

二、突出重点，解答疑点。自学考生刚开始接触某一门新课时，很难及时发现和找到这门课的重点，并且还有大量的疑点。本丛书围绕考核知识点的要求，突出了重点，并对疑点作了点评或提示。

三、模拟实战，培养能力。通过大量围绕每章知识点各种题型的多侧面强化模拟训练，使考生掌握每章要点和难点，提高应试能力。

四、最新真题与答案。通过对最新真题的了解，能使考生把握最新考试动态与命题方向。

为了方便考生检测自己的复习效果，本教学指导组又针对本套丛书编写了相应的《全国高等教育自学考试公共课真题与模拟试卷》丛书。可帮助考生进一步掌握知识点、考点和难点，提高应试的技巧，掌握应试的方法，从而取得理想成绩。

编写一套高质量的自考辅导用书，是一项艰巨而又十分有意义的社会工作。希望这套丛书对广大自学考生有较大帮助，也祝愿广大自考考生取得优异成绩，事业兴旺发达！

高等教育自学考试教学指导组

高等教育自学考试教学指导组

编委会成员　（按姓氏笔划为序）

邓欣吉　　刘翠霄　　刘建军

朱华东　　陈　英　　李常青

倪鼎力　　曹培强　　谢新水

前　　言

《高等数学》是高等教育自学考试的重要的公共基础课。对于培养学生的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力，进而提高学生分析问题、解决问题的能力都是十分重要的。同时，学习高等数学也为学生进一步学习专业课程奠定了数学基础。

但长期以来，《高等数学》也是一门考生最感困难的课程。这其中有时间紧、基础差的因素，也有内容多、要求高的因素等。这些都说明，考生在学习的过程中，需要得到正确的指导和有效的帮助。

编者从事《高等数学》自学考试的教学工作十余年。通过对教材的反复钻研，对考生的深入了解，对考题的仔细分析，有了自己的心得体会，并积累了丰富的经验。编成此书，奉献给大家。希望它能成为考生的良师益友。

本书是根据全国高等教育自学考试指定教材《高等数学(一)微积分》，按照章节进行概括和总结编写的。每章有四部分内容：

1. 学习目的和要求　指出大纲中对学习本章的要求。使考生明确目标，把握主次，心中有底。

2. 主要内容与讲解　总结本章的主要内容，便于考生掌握全章的知识结构。并对有关内容进行全面详细地讲解。讲解中包括：对每一个数学概念应如何正确理解及可能产生的错误认识；对每一种数学方法应如何正确掌握及可能产生的错误做法；知识的前后联系，方法的总结提高，应用的技巧经验等等。

对教材中的内容，结合初学者可能出现的错误，进行深入浅出的讲解，是本书的一大特色。通过讲解可使考生能够真正达到：概念清楚、方法熟练、应用灵活的程度。

3. 典型例题分析　选取指定教材习题中、历年考题中的典型题目、有一定难度的题目，进行详细的分析和解答。给出了解题的思路、解题的方法和解题的技巧。

通过对典型例题的分析，可使考生达到：举一反三，触类旁通，融会贯通的境界。

4. 自测题　为帮助考生检查、巩固所学知识，提高解题能力。在每章后都附有相当数量的练习题。并在书后给出答案和提示。可供考生自测练习之用。

本书是自学考试考生的辅导教材。也可作为学历文凭考试的考生以及其他成人大学学生，高校在校学生等，学习高等数学的参考书。

由于作者写作时间较紧，难免有不妥之处，欢迎各位读者批评、指正。

编　者

目　　录

第一章　函数及其图形

一、学习目的和要求

学习本章，要求联系集合和映射掌握函数概念，并掌握函数的单调、有界、奇偶、周期等特性分析表示、图形和特征，并要求读者具有由常见的经济管理问题建立相应的函数关系的能力，养成图文并重的思维方法。

二、主要内容与讲解

(一)集合与映射

1.集合的概念

(1)集合　集合是具有某个共同属性的一些对象的全体，构成集合的每一个对象称为该集合的元素。一般用大写字母：A、B、C…表示集合。用小写字母：a、b、c…表示集合中的元素。

如果 a 是集合 A 的元素，则记作：$a\in A$，读作 a 属于 A。如果 a 不是集合 A 的元素，则记作：$a\overline{\in}A$（或 $a\notin A$），读作 a 不属于 A。

在数集中：**N** 表示自然数集；**Z** 表示整数集；**Q** 表示有理数集；**R** 表示实数集。

(2)集合的表示

①列举法：列出集合的所有元素，放在大括号：$\{\}$中，元素间用逗号隔开。

②描述法：把集合中元素所具有的共同属性描述出来。用 $A=\{x\mid x$ 具有的属性$\}$表示。

(3)集合的类型

①有限集：元素是有限个的集合，称为有限集。

②无限集：元素是无限个的集合，称为无限集。

不含任何元素的集合，称为空集。记作：$\varnothing$；由所研究的所有事物构成的集合，称为全集。记作：Ω（或$\cup$）。

(4)子集、集合的相等

①子集：如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则 A 称为 B 的子集，记作：$A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作：A 包含于 B 或 B 包含 A。

任何一个集合都是它自身的子集，即 $A\subset A$。空集是任何一个集合的子集，即 $\varnothing\subset A$。

因此，任何一个非空集合都有两个当然的子集：空集和本身。

②集合的相等：若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即集合 A 和集合 B 含有相同的元素，则称两个集合 A 与 B 相等。记作：$A=B$。

2.集合的运算

(1)交集　由既属于集合 A 又属于集合 B 的公共元素构成的集合，称为 A 与 B 的交（或积）。

记作：$A\cap B$。读作：A 交 B。即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$

如图 1－1 所示。

有：$A\cap B\subset A$ $\quad A\cap B\subset B$ $\quad A\cap A=A$ $\quad A\cap\varnothing=\varnothing$ $\quad A\cap\Omega=A$

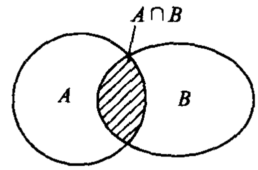


图 1－1

(2)并集　由集合 A 与集合 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的并(或和)。记作：$A\cup B$，读作：A 并 B。

即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$

如图 1－2 所示。有：$A\subset B\cup A$ $\quad B\subset A\cup B$ $\quad A\cup A=A$

$A\cup\varnothing=A$ $\quad A\cup\Omega=\Omega$

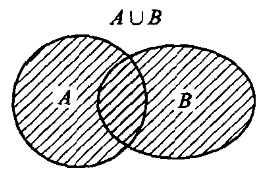


图 1－2

(3)补集　满足下列两个条件的集合称为集合 A 关于集合 B 的补集：一是集合 A 是集合 B 的子集；二是集合中的元素属于 B 但不属于 A。记作 A_B^C 或 A^C。即 $A_B^C=\{x\mid x\in B$ 且 $x\overline{\in}A\}$。

如图 1－3 所示。有：$A\cup A_B^C=B,A\cap A_B^C=\varnothing$

(4)集合运算律

①交换律：$A\cap B=B\cap A$ $\qquad A\cup B=B\cup A$

②结合律：$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ $\qquad A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

③分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$\qquad\qquad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

④对偶律：$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$ $\qquad (A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

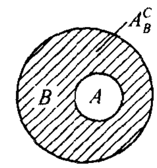


图 1－3

3. 区间与邻域

(1)区间

①有限区间

(i)开区间：$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$表示满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合。

(ii)闭区间：$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$表示满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合。

(iii)半开半闭区间：$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$表示满足不等式 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合。类似有：$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$表示满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的实数 x 的集合。

有限区间的区间长度为 $b-a$。

②无限区间

(i)$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$表示满足不等式 $x>a$ 的实数 x 的集合。

(ii)$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$表示满足不等式 $x\geqslant a$ 的实数 x 的集合。

(iii)$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$表示满足不等式 $x<b$ 的实数 x 的集合。

(iv)$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$表示满足不等式 $x\leqslant b$ 的实数 x 的集合。

(v)$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$表示全体实数的集合。

(2)邻域

①邻域：$|x-x_0|<\delta$，称为点 x_0 的 δ 邻域。x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。即是开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，如图 1－4 所示。

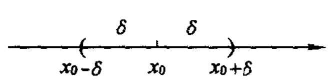


图 1－4

②空心邻域:$0<|x-x_0|<\delta$,称为点 x_0 的 δ 空心邻域。

即是:$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$,也就是在 x_0 的 δ 邻域中去掉了中心 x_0 点。

4.映射的概念

定义 1.1 若两个集合 X,Y 间的一种对应关系 f 满足条件:

(1)对于第一个集合 X 的每一个元素,都能按某种规则与第二个集合 Y 的某个元素对应。

(2)对于第一个集合 X 的每一个元素,第二个集合 Y 中与它对应的元素只有一个。则称这样的对应关系 f 为从 X 到 Y 的映射,记作 $f:X\rightarrow Y$。

讲　解

1.关于集合与映射

(1)*集合是数学中最基本的概念之一* 1882 年德国数学家康托尔创立了集合论。近代数学就建立在集合论的基础之上。

(2)*集合元素的特征* 集合中的元素具有三个特征:第一是确定性。集合若给定则其元素就确定。即对于任何一个事物或者是这个集合的元素,或者不是这个集合的元素,二者必居其一。元素不确定时不能构成集合。例如"著名的科学家","很大的实数"等都不能构成集合,因为"著名的","很大的"都是不确定的。第二是互异性。集合中的元素都是互不相同的,在集合中元素不能重复。例如:$\{1,2,3\}\cup\{2,3,4\}=\{1,2,3,4\}$,而不能写成:$\{1,2,2,3,3,4\}$。第三是无序性。集合中的元素没有顺序问题,哪个元素写在前,哪个元素写在后,没有关系。只要两个集合含有的元素是相同的,这两个集合就是相等的。例如:$\{1,2,3\}=\{3,2,1\}$。

(3)*要分清关系* 元素与集合的关系和集合与集合的关系。这是两种不同的关系,前者是属于不属于的关系,后者是包含不包含的关系。因此其符号表示也不同,不要相混。例如:$3\subset\mathbf{N}$,$\mathbf{N}\in\mathbf{R}$ 等表示都是错误的。

(4)*空集 $\varnothing$ 与集合 $\{0\}$ 不同* 空集 $\varnothing$ 是不含任何元素的集合。例如,集合 $\{x\mid x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}$ 就是一个空集。因为方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内没有解。而 $\{0\}$ 是含有一个元素"0"的集合。例如集合:$\{x\mid |x|<1,x\in\mathbf{Z}\}=\{0\}$。

(5)*映射是两个集合间的一种对应关系 $f:X\rightarrow Y$* 这种关系要求:(1)集合 X 中的每个元素都与集合 Y 中的某个元素对应。(2)对于集合 X 中的每一个元素,集合 Y 中与它对应的元素只有一个。

这里需要注意:①集合 X 中的每个元素在集合 Y 中都有对应的元素,但是集合 Y 中的每个元素不一定都与集合 X 中的元素对应。②集合 X 中的每个元素在集合 Y 中只有一个元素与它对应,但集合 Y 中的一个元素可以与集合 X 中的多个元素对应。也就是说,相对于 $X\rightarrow Y$:不允许 $1\rightarrow$多,但允许多$\rightarrow 1$。

函数是一个特殊的映射。特殊在两个集合 X,Y 均为数集。

2.关于区间与邻域

(1) *区间* 微积分研究的对象是函数。函数揭示了变量之间的关系。变量在变化的过程中有一个变化的范围,如何表示这个范围呢?这就引出了区间的概念。

区间分为有限区间和无限区间，这两种区间是不同的。在有限区间上成立的结论，在无限区间上不一定成立。例如，在定积分中：若 $f(x)$ 为奇函数，则有：$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$。这里要求的积分区间是对称的有限区间。若换成无限区间就不一定成立了。例如，$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\mathrm{d}x$ 应该是发散，而不等于零。

在区间的概念中，另一个需要注意的问题是，这个区间是开区间、闭区间、还是半开区间。也就是说，这个区间是否包含区间的端点，包含一个端点还是两个端点。例如，在学习第四章的中值定理时，中值定理的第一个条件都是：$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续。因此，在判断函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是否满足中值定理这个条件时，就不仅需要判断 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内是否连续，还需判断 $f(x)$ 在两个端点 a,b 处是否连续。

(2) 邻域　$|x-x_0|<\delta$，是一个很小的区间。它以 x_0 为中心，δ 为半径。即为：$(x_0-\delta, x_0+\delta)$，其长度为：$x_0+\delta-(x_0-\delta)=2\delta$。有时，我们需要在一个很小的范围里考虑问题。例如，极限的问题，极值的问题等。这就用到了邻域的概念。

还有的问题，其结论与 x_0 点的情况无关。例如，研究 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限。这个极限是否存在与函数 $f(x)$ 在 x_0 处是否有定义无关，这时需要去掉中心 x_0 点，就有了空心邻域的概念。空心邻域：$0<|x-x_0|<\delta$，它表示：$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$。

(二)函数

1. 函数的概念

(1)函数的定义

①**定义 1.2**　若 X 和 Y 都是实数集合，则两实数集合之间的映射 $f:X\to Y$ 称为函数。称 X 为函数 f 的定义域，记作：D_f。函数 f 记作：$y=f(x)\ x\in D_f$。其中 x 称为自变量，y 称为因变量。因变量 y 的变化范围称为函数的值域，记作：R_f 或 Z_f。

②函数的五个因素：自变量 x；定义域 D_f；因变量 y；对应规则 f；值域 R_f。

在五个因素中，关键的是两个要素：定义域 D_f 和对应规则 f。

(2)函数的表示

①解析法：用解析表达式表示一个函数的方法称为解析法，也称为公式法。

分段给出解析式的函数称为分段函数；

由二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定的 y 与 x 的函数关系称为隐函数。

②表格法：将自变量所取的值和对应的函数值列成表格，用以表示函数关系的方法称为表格法。

③图示法：在直角坐标系中，作出函数的图象—曲线(包括直线)，来表示函数关系的方法称为图示法。

2. 函数的几何特性

(1)单调性

①**定义 1.3**　设有函数 $y=f(x)$，$x\in D_f$，若对任意两点 $x_1,x_2\in D_f$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，$[f(x_1)>f(x_2)]$，则称函数 $f(x)$ 在 D_f 内严格单调增加[严格单调减少]。

②在几何上，严格单调增加(减少)的函数，它的图形是随 x 的增加而上升(下降)的曲线。

(2)有界性

①**定义 1.4** 若存在两个数 A 和 B，对一切 $x \in D_f$，恒有 $A \leqslant f(x) \leqslant B$。则称函数 $y=f(x)$ 在 D_f 内是有界函数，否则称为无界函数。

②在几何上，如果函数的图象介于两条水平直线 $y=A$ 与 $y=B$ 之间，则函数就是有界的；如果函数的图象可以向上或向下无限延伸，则函数就是无界的。

(3)奇偶性

①**定义 1.5** 设函数 $y=f(x)$，其定义域 D_f 关于原点 O 对称，那么

(i)若对任何 $x \in D_f$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为偶函数。

(ii)若对任何 $x \in D_f$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为奇函数。

②在几何上，偶函数的图形对称于 y 轴，奇函数的图形对称于原点。

(4)周期性

①**定义 1.6** 设函数 $y=f(x)$，$x \in(-\infty,+\infty)$，若存在 $w \neq 0$，对一切 $x \in(-\infty,+\infty)$，恒有 $f(x+w)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数。w 称为 $f(x)$ 的一个周期。而将最小的正周期(如果存在)，称为函数的周期。

②在几何上，周期函数的特点是，自变量每增加或减少一个周期后，图形重复出现。

3.复合函数和反函数

(1)复合函数

定义 1.7 设有两个函数 $y=f(u)$，$u \in D_f$，和 $u=g(x)$，$x \in D_g$，如果函数 $u=g(x)$ 的值域 R_g 包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_f 中，即 $R_g \subset D_f$，则称函数 $y=f[g(x)]$，为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数，u 称为中间变量。复合函数也可以由三个、四个甚至于更多个函数复合而成。

(2)反函数

①**定义 1.8** 设 $y=f(x)$ 为给定的一个函数，如果对其值域 R_f 中的任一值 y，都可通过 $y=f(x)$ 在其定义域 D_f 中确定惟一的 x 与它对应，则得到一个定义在 R_f 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，则称之为 $y=f(x)$ 的反函数，记作：$x=f^{-1}(y)$。习惯上，记作：$y=f^{-1}(x)$。其定义域为 R_f，值域为 D_f。

②求反函数的方法：第一步根据 $y=f(x)$ 解出 x；第二步交换字母：将 x 与 y 交换。

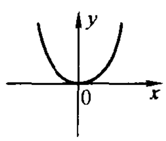
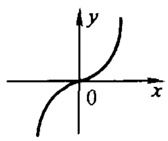
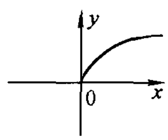
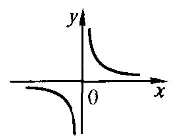
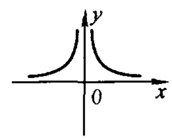
③反函数存在定理：若函数 $y=f(x)$，$x \in D_f$。是严格单调增加(或减少)的，则存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，$y \in R_f$，且此反函数也是严格单调增加(或减少)的。

4.初等函数

(1)基本初等函数 基本初等函数包括五种函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数。

①幂函数：$y=x^{\alpha}$(α 为实常数)。幂函数的定义域随 α 的值而定。但在区间 $(0,+\infty)$ 内总有定义。表 1-1 给出几种幂函数的情况。

表 1－1

函数	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$	$y=x^{-2}$
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值域	$[0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
奇偶性	偶函数	奇函数	非奇非偶	奇函数	偶函数
单调性	非单调函数	单调增函数	单调增函数	单调减函数	非单调函数
图象					

从表中可以看出：当 $\alpha>0$ 时，图象过点$(0,0)$和$(1,1)$且在第一象限内递增；当 $\alpha<0$ 时，图象过点$(1,1)$且在第一象限内递减。

幂函数都是无界函数。且当 $\alpha\neq0$ 时，幂函数都不是周期函数。

②指数函数：$y=a^x\quad(a>0$ 且 $a\neq1)$。定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$。图象过点$(0,1)$。当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 为单调增函数；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 为单调减函数。我们经常用到以 e 为底的指数函数 $y=e^x$，$e\approx2.718$。图 1－5 是 $y=2^x$ 和 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的图象。

③对数函数：$y=\log_a x\quad(a>0$ 且 $a\neq1)$。对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数。定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$。图象过点$(1,0)$。当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 为单调增函数；当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 为单调减函数。我们经常用到以 e 为底的对数函数 $y=\ln x$，称为自然对数。图 1－6 是 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象。

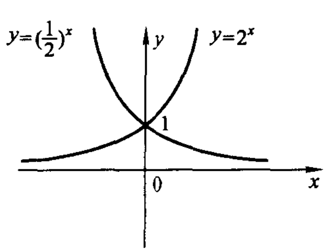


图 1－5

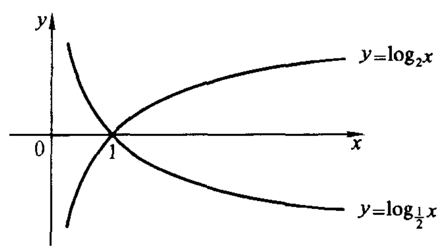
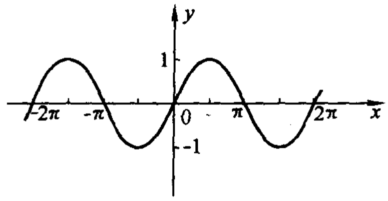
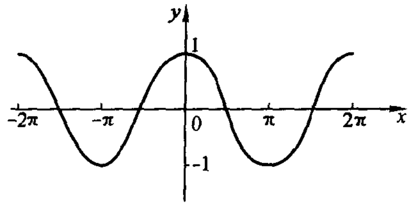
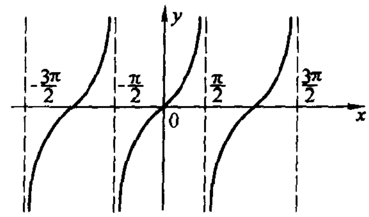
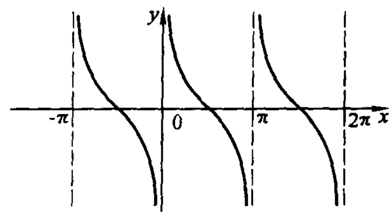
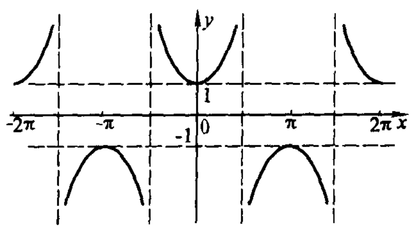
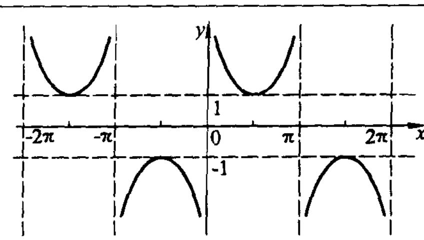


图 1－6

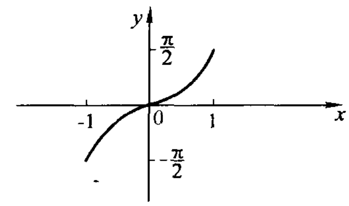
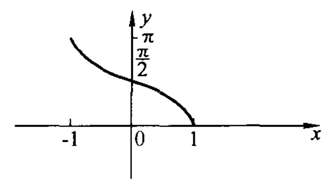
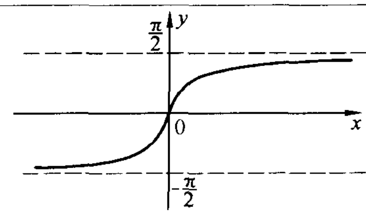
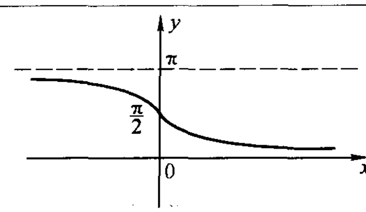
④三角函数：三角函数的定义域、值域、性质和图象如表 1－2。

表 1－2

函数	定义域	值域	性质	图象
$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	有界函数 奇函数 周期为 2π 的 周期函数	
$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	有界函数 偶函数 周期为 2π 的 周期函数	
$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $k\in\mathbf{Z}$	$(-\infty,+\infty)$	无界函数 奇函数 周期为 π 的 周期函数	
$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $k\in\mathbf{Z}$	$(-\infty,+\infty)$	无界函数 奇函数 周期为 π 的 周期函数	
$y=\sec x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $k\in\mathbf{Z}$	$(-\infty,-1]$ $\cup[1,+\infty)$	无界函数 偶函数 周期为 2π 的 周期函数	
$y=\csc x$	$x\neq k\pi$ $k\in\mathbf{Z}$	$(-\infty,-1]\cup$ $[1,+\infty)$	无界函数 奇函数 周期为 2π 的 周期函数	

⑤反三角函数:反三角函数的定义域、值域、性质和图象如表 1-3。

表 1-3

函数	定义域	值域	性质	图象
$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	有界函数 奇函数 单调增函数	
$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	有界函数 非奇非偶 单调减函数	
$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	有界函数 奇函数 单调增函数	
$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$	有界函数 非奇非偶 单调减函数	

(2)*初等函数* 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和复合运算而得到的函数称为初等函数。分段函数不是初等函数。

讲 解

1.关于函数的概念

(1)*常量与变量* 数量关系是数学研究的主要对象,而数量又分为常量和变量两种。但常量和变量是相对的而不是绝对的。某一个量在这个研究过程中是常量,而在另一研究过程中又可能是变量。例如一种商品的价格,在某一时刻购买该商品时,该商品的价格是常量;若研究某商品价格随季节而变化的情况,则该商品的价格又为变量了。

这种情况反映到数学中来,我们在学习极限、导数、积分、偏导数、重积分等过程中,要随时注意分清:哪个量是常量,哪个量是变量。避免由于常量、变量相混导致的错误。

(2)*函数的两要素* 在函数的定义中,关键是两要素:定义域与对应律。这是判断两个函数

是否相同的依据。例如 $y=\ln x^2$ 和 $y=2\ln x$,前者的定义域为:$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而后者的定义域为:$(0,+\infty)$。因为定义域不同,所以这两个函数不同。为了便于判断,也可加上值域而成为函数的三要素:定义域、值域和对应法则。在这三个要素中,只要有一个要素不同,这两个函数就不同。例如:$y=\sqrt{x^2}$ 和 $y=x$,立即看出二者的值域不同,前者 $R_f=[0,+\infty)$,后者 $R_f=(-\infty,+\infty)$,因而不是相同的函数。其实质是对应律不同:$y=\sqrt{x^2}=|x|$,与 $y=x$。

(3)**确定函数的定义域** 确定函数的定义域,就是在实数范围内,求出使函数表达式有意义的自变量的取值范围。具体来说,在求函数的定义域时,应考虑以下几点:

①分式函数的分母不得为零; ②偶次根式中,被开方式不得为负;

③对数符号中的真数部分必须为正; ④反正弦,反余弦符号下的式子,其绝对值不大于1;

⑤若函数表达式有若干项,则其定义域应是各项自变量取值的交集。

(4)**函数符号的使用** 函数 $y=f(x),x\in D_f$,是"y 是 x 的函数"的数学表达式。x 称为自变量;x 的取值范围称为函数的定义域,记作 D_f;y 称为因变量;y 的取值范围称为函数的值域,记作 R_f;f 称为对应法则。这就是函数的五个因素。其中 f 表示 y 与 x 的对应关系。例如,$y=f(x)=2x^2$,表示对于每一个自变量 x 的值,平方后再 2 倍就是因变量 y 的值。

$f(x)$中的 x 可以换成D_f 中的数值或表示数值的字母以及数学表达式,则表示将对应法则 f 施用于那个数值或表示数值的字母以及数学表达式。

例如,$f(x)=x^3$

则有:$f(2)=2^3=8$; $f(-x)=(-x)^3=-x^3$;

$f(x+1)=(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$; $f[f(x)]=f(x^3)=(x^3)^3=x^9$;

(5)**函数的表示** 在函数的定义中没有给出函数的表示方法,在实际中主要用到三种表示函数的方法:解析法、列表法和图象法。

三种方法各有长短。解析法可以通过函数的表达式对函数进行分析和研究,确定其定义域、值域,性质及图象的特点;列表法可以通过表格直接查到对应的函数值或自变量的值;但这两种方法都不够直观。而图象法表示函数关系就很直观,因变量 y 随自变量 x 变化的趋势从图象中就看得很清楚。但若根据图象求对应的函数值或自变量的值,就会产生误差。

因此,在实际中一般都是三种方法结合起来使用。但是也应注意:不是所有的函数都可以用三种方法表示。

例如 ①某市某日气温 T 随时间 t 变化的函数关系,一般就不能用解析式来表示。只能列出表格或者画出图象。

②狄利克雷函数:

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}\quad\text{不能用图象来表示。}$$

(6)**分段函数** 数学中的概念都是从实践中抽象出来的,分段函数的概念也是如此。在实际中有些函数关系是分段计算的。例如邮寄包裹等,反映到数学中来就是分段函数的概念。

分段函数是微积分研究的主要对象,应特别予以重视。分段函数不论分成几段,它都是一个函数。因此其定义域是各段自变量取值的并集;分段函数在求函数值时,应先确定相应的表达式,再代入求值;分段函数在画图时,应分段来画,并注意各段中自变量的取值范围。

若 x_0 为分段函数 $f(x)$的分段点,则判断极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$是否存在;判断 $f(x)$在 x_0 处是