


GAODENG SHUXUE XITIJI

高等数学习题集

上海理工大学理学院
《高等数学习题集》编写组 编

 上海财经大学出版社

高等数学习题集

上海理工大学理学院
《高等数学习题集》编写组 编

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题集/上海理工大学理学院《高等数学习题集》编写组
编. —上海:上海财经大学出版社,2002.8
ISBN 7-81049-776-6/O·15

I. 高… II. 上… III. 高等数学-高等学校-习题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 051490 号

GAODENG SHUXUE XITANJI

高等数学习集题

上海理工大学理学院《高等数学习题集》编写组 编

责任编辑 袁 敏 封面设计 周卫民

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙 邮编 200434)

网 址: <http://www.sufep.com>

电子邮箱: webmaster@sufep.com

全国新华书店经销

上海市印刷七厂一分厂印刷装订
2002 年 10 月第 1 版 2002 年 10 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16 18 印张 460 千字
印数:0 001—5 400 定价:22.00 元

前 言

高等数学是高等院校的一门主干基础课,为了使能够通过解题来掌握高等数学的基本概念、基本理论和基本方法,上海理工大学数学教研室根据国家教委审定的高等工科院校《高等数学课程教学基本要求》(教学大纲),并结合任课教师多年的教学经验,经过反复研讨、筛选、试用后,最终编制成《高等数学习题集》一书。

本习题集是按照同济大学编写的《高等数学》的教学内容次序编排的。本习题集由两大篇组成:第一篇是基础练习题,供学生每次课后作业用;第二篇是能力提高题,供学生复习、提高用。本习题集可作为高等工科院校、成人高校的学生及自学者学习《高等数学》的配套用书。

本习题集内容由易渐难、循序渐进,既有基本概念题,又有综合应用题,题型丰富、覆盖面广,有一定的深度和难度,是课后学生复习、巩固、提高高等数学知识的一本很好的习题集。本习题集可逐页取下,以方便教师携带及批改。在本次出版之前,本习题集的简装本已在多所院校试用了两年,效果很好,深受学生和教师的欢迎。经过两年的教学实践,我们对习题集的内容进行了补充和修改,使内容得到了提高及更趋完整化。

本习题集由上海理工大学数学教研室下列教师编写:

(按姓氏笔画排列)

王美娟 叶亚盛 李宝庆

苏文悌 张 菁 苟列红

查富宝 施月萍 蔡康盛

在编写本书的过程中得到了李英、刘国华、刘凌等老师的大力帮助,并得到了我校、院等各级领导的大力支持,在此表示衷心的感谢。

由于编者水平所限,书中难免出现错误与不当之处,敬请读者批评指正。

《高等数学习题集》编写组
2002年8月

目 录

前 言	(1)
-----------	-------

第一篇 基础练习题

第一章 函数与极限	(3)
第二章 导数与微分	(17)
第三章 中值定理与导数的应用	(29)
第四章 不定积分	(43)
第五章 定积分	(55)
第六章 定积分的应用	(64)
第七章 空间解析几何与向量代数	(73)
第八章 多元函数微分法及应用	(89)
第九章 重积分.....	(103)
第十章 曲线积分与曲面积分.....	(117)
第十一章 无穷级数.....	(135)
第十二章 微分方程.....	(147)

第二篇 能力提高题

第一章 函数与极限.....	(163)
第二章 导数与微分.....	(171)
第三章 中值定理与导数的应用.....	(175)
第四章 不定积分.....	(185)

第五章 定积分·····	(193)
第六章 定积分的应用·····	(199)
第七章 空间解析几何与向量代数·····	(205)
第八章 多元函数微分法及应用·····	(213)
第九章 重积分·····	(223)
第十章 曲线积分与曲面积分·····	(231)
第十一章 无穷级数·····	(239)
第十二章 微分方程·····	(245)
答案与提示·····	(251)

第一篇 基础练习题

第一章 函数与极限

习题 1-1 函数

1. 填空题:

(1) 函数 $y = \sqrt{2+x} + \frac{1}{\ln(1-x)}$ 的定义域为_____.

(2) 函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 是奇函数还是偶函数? _____ 函数.

(3) 函数 $y = \frac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数为_____，而分段函数

$$y = \begin{cases} 1-2x^2, & x < -1, \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2, \\ 12x-16, & x > 2 \end{cases}$$

的反函数为_____.

(4) 已知 $f(x) = e^x$, 则:

$$F(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] =$$

_____.

$$G(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)] =$$

_____.

$F(x), G(x)$ 中为偶函数的是_____, 为奇函数的是_____. 而 $f(x), F(x)$ 与 $G(x)$ 三者之间的关系式是_____.

2. 已知函数 $y = \ln(1+x)$, 求 δ 的范围, 使得当 $x \in U(0, \delta)$ 时, 对应的函数值 $y \in U(0, \ln 2)$.

3. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 试证明: $a \leq f(x) \leq b (x \in X)$ 的充分必要条件是: 存在 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M (x \in X)$.

习题 1-2 初等函数

1. 填空题:

(1) 函数 $y = \arcsin(x-3)$ 的定义域为

_____，而 $y = 2 \tan \frac{1}{x-2}$ 的定

义域为 _____，

其值域为 _____。

(2) 函数 $y = e^{\sin x}$ 是由函数 _____

_____ 和 _____

复合而成， $y = \arctan \sqrt{1+x^2}$ 是由函

数 _____ 复合而成。

(3) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ，则函数

$f[f(x)] =$ _____，其定义域为

_____。

(4) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$ ，

则函数 $f(3x+2)$ 的定义域为

_____，而函数

$f(x+1) + f(x-1)$ 的定义域为

_____。

(5) 设 $f(x) = e^{x^2}$ ， $f[\varphi(x)] = 1-x$ 且

$\varphi(x) \geq 0$ ，则 $\varphi(x) =$ _____。

$$2. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} -1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ 1, & |x| > 1, \end{cases} g(x) = e^x,$$

试求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$ ，并作出函数图形。

3. 设函数 $f(x) = \frac{1}{2}(x+|x|)$ ，

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0, \\ e^x, & x \geq 0, \end{cases} \text{ 求 } f[g(x)].$$

习题 1-3 数列的极限

1. 观察下列数列的极限, 将极限值填在空格上.

(1) $x_n = \frac{2}{\sqrt{n}}$, 极限为_____.

(2) $x_n = 3^{\frac{1}{n}}$, 极限为_____.

(3) $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$, 极限为_____.

(4) $a_n = (-1)^n e^{-n}$, 极限为

_____.

2. 用数列极限的定义证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$.

3. 设数列 $\{x_n\}$ 有界, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0.$$

习题 1-4 函数的极限

1. 利用函数极限的定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} = 4.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x} = 0.$$

$$2. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ x + 2, & x \geq 0, \end{cases}$$

试求 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$3. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x - a, & -1 \leq x < 0, \\ x + a, & 0 < x \leq 1, \end{cases} \text{ 问 } a$$

取何值时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在?

4. 利用极限定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = 0.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 3} = 3.$$

习题 1—5 无穷小与无穷大

1. 下列极限是否存在? 若存在, 求出极限值.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}.$$

2. 根据定义证明: $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

3. 根据无穷大的定义证明:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = \infty.$$

4. 写出下列函数的水平和垂直渐近线:

$$(1) y = e^x + 2.$$

$$(2) y = \begin{cases} \frac{1}{x^2-1}, & x > 0, \\ \tan x, & x \leq 0. \end{cases}$$

5. 根据函数极限或无穷大定义,填写下表:

	$f(x) \rightarrow A$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow x_0$	任给 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 当 $0 < x - x_0 < \delta$, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon$.			
$x \rightarrow x_0 + 0$				
$x \rightarrow x_0 - 0$				
$x \rightarrow \infty$			任给 $M > 0$, 总存在 $X > 0$, 当 $ x > X$, 即有 $f(x) > M$.	
$x \rightarrow +\infty$				
$x \rightarrow -\infty$				

习题 1-6 极限运算法则

1. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right).$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)^{10} (2x-5)^{20}}{(6x+1)^{30}}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 7x + 10).$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}.$$

2. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n + 1}{(n+2)^3}.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^{n+1}}{2^{n+1} - 3^{n+1}}.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}.$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1}, \quad x > 0.$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{n^2+3} \cdot \sin n! .$$

习题 1-7 极限存在法则
两个重要极限

1. 计算下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}$.

(3) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$.

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$.

2. 计算下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}}$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$.