数学分析

（第二版）

下　册

刘玉琏　主编

高等教育出版社

★ GAODENG JIAOYU CHUBANSHE

数 学 分 析

（第二版）

下 册

刘玉琏 吕 凤
苑德新 王大海 编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析　下册/刘玉琏编．—2版．—北京:高等教育出版社,1994.10(2001重印)
ISBN 7-04-004936-8

Ⅰ．数…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．数学分析Ⅳ．017

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第11455号

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　　话	010—64054588	传　　真	010—64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	河北省香河县印刷厂	版　　次	1988年10月第1版
开　　本	850×1168　1/32		1994年10月第2版
印　　张	11.375	印　　次	2001年2月第7次印刷
字　　数	290 000	定　　价	11.80元

内容提要

本书根据国家教委1991年制订的中学教师进修高等师范专科《数学分析教学大纲》，将第一版作为基础修订而成。为便于读者自学，还配有学习指导书。上册主要内容为极限论、一元函数微分和不定积分，下册主要内容为一元函数定积分、级数和多元函数微积分，微分方程简介。实数理论作为附录列于书末。

本书注意结合中学教材和中学教师的实际，起点适中，内容简明，条理清楚，逻辑严谨，深入浅出，通俗易懂，便于自学。

本书可供卫星电视教育、教育学院、函授院校学员进修高师专科和自学的初中数学教师选作教材或参考书。

目　　录

第八章 定 积 分

连续性和可导性是函数的两个重要分析性质，除此之外，还有一个重要分析性质，这就是函数的可积性．本章就是研究可积函数的理论及其应用或定积分的理论及其应用．定积分的理论及其应用连同不定积分构成一元函数积分学．

从积分学的发展史来说，定积分源于计算平面封闭曲线围成区域的面积．计算平面区域的面积最后归结为计算“特定结构和数”的极限，即定积分．不仅如此，在物理学，力学以及其它学科中，计算某些量也要归结为数学形式完全相同的“特定结构和数”的极限．例如，高中《立体几何》计算斜柱体的体积，锥体的体积，球的体积和表面积等都是“特定结构和数”的极限问题．从这个意义上说，定积分是掌握中学数学教材不可缺少的知识．

§8.1. 定 积 分

8.1.1. 两个实例

曲边梯形的面积

我们已知矩形面积是长乘宽，由此出发能够计算平行四边形，三角形的面积，进一步能够计算任何直边形的面积．如果平面有界区域的边界是由若干条曲线段和直线段所围成，如圆、椭圆、曲边梯形等．计算这样区域的面积则不能应用上述的初等方法，而需要应用极限方法．下面讨论曲边梯形的面积．

何谓曲边梯形？曲边梯形是由三条直线（其中两条直线平行，并垂直于第三条直线）和一条曲线所围成，即它的边界是由三条

直线段和一条曲线段组成，如图8.1. 因为曲边梯形有一条曲边，所以计算它的面积就是一个新问题. 那么何谓曲边梯形的面积呢？又怎样计算它的面积呢？为此先给出曲边梯形面积的定义.

定义曲边梯形面积的思想方法与我们在 2.1.1 中定义圆的周长的思想方法相同，也是应用一系列直边形逼近曲边梯形，这里的直边形是由有限个矩形所组成. 因此，它的面积是可知的.

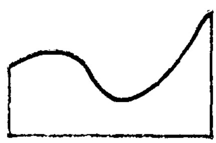

图 8.1

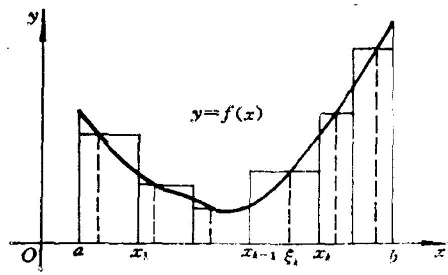

图 8.2

将曲边梯形放在平面直角坐标系中. 设它的曲边是非负连续函数$y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，三条直线段分别在$x$轴及直线$x=a$与$x=b$上，如图8.2.定义曲边梯形面积的步骤如下：

1）**分割** 在区间$[a,b]$内任意插入$n-1$个分点：$x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$，且$(a=x_0,\ b=x_n)$

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

是区间$[a,b]$的一个分割，表为T. 分割T将区间$[a,b]$分成n个小区间：

$[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，$\cdots$，$[x_{k-1},x_k]$，$\cdots$，$[x_{n-1},x_n]$.

设第k个小区间$[x_{k-1},x_k]$的长是$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ $(k=1,2,\cdots,n)$.

过每个分点x_k作x轴的垂线，它们将曲边梯形分成n个小的曲边梯形，如图8.2.

2）**代替** 在第k个小区间$[x_{k-1},x_k]$任取（注意“任取”二字）

一点$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$。计算函数值$f(\xi_k)$。用以$f(\xi_k)$为高以Δx_k为底的矩形面积$f(\xi_k)\Delta x_k$(见图8.2)近似代替第k个"曲边梯形的面积"ΔA_k，即

$$\Delta A_k \approx f(\xi_k)\Delta x_k, \quad k=1,2,\cdots,n.$$

"代替"就是以"直"代"曲"。这是局部的近似。

3) **作和** 将n个矩形面积加起来$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$应该是"曲边梯形的面积"$\sum_{k=1}^{n}\Delta A_k$的近似值，即

$$\text{"曲边梯形的面积"} = \sum_{k=1}^{n}\Delta A_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

"作和"就是整体近似。

4) **取极限** 对一个小区间$[x_{k-1}, x_k]$来说，当小区间的长Δx_k越来越小时，因为函数$f(x)$连续，所以不论怎样选取$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$，以矩形面积$f(\xi_k)\Delta x_k$近似代替第k个"曲边梯形的面积"ΔA_k，其"误差"也越来越小。从而用和数$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$近似代替曲边梯形的面积，其"误差"也越来越小。于是，当每个小区间之长都无限趋近于0时(这时小区间的个数也无限增多)，和数$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$的极限理所当然地认为是曲边梯形的面积。

怎样描述"每个小区间之长都无限趋近于0"呢？对区间$[a, b]$的任意分割T，令$l(T)$表示n个小区间之长的最大者，即

$$l(T) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}.$$

于是，当$l(T) \to 0$时，不仅区间$[a, b]$的分点无限地增加，并且每个小区间之长都无限趋近于0。

若当$l(T) \to 0$时，n个矩形面积之和$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$存在极限$A$，

即

$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = A,$$

则称A是曲边梯形的面积。

由此可见，曲边梯形的面积是一个"特定结构和数"：

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

的极限（$l(T)\to 0$）。关于这个极限的计算待后再述。

锥体的体积

设有底面积为A高为h的锥体，如图8.3，计算锥体的体积V。

中学《立体几何》是应用定理"等底面积等高的两个锥体的体积相等"（它是祖暅定理的特殊情况）来证明的。首先证明了三棱锥的体积公式，其次又借助这个公式和上述定理得到锥体的体积公式。这里我们用极限方法推导出锥体的体积公式。

如图8.3，取锥体的顶点为原点O，设过顶点O垂直于底面的

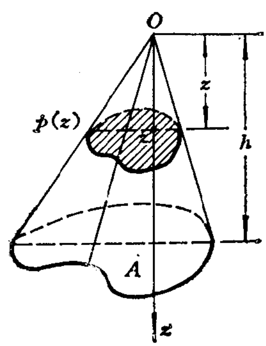

图 8.3

直线为z轴（正方向向下）。设距顶点O的距离为z（$0\leqslant z\leqslant h$）处锥体的截面面积为$p(z)$。由初等几何，当已知锥体的底面积A和高

h时，截面面积的函数$p(z)$ $(0\leqslant z\leqslant h)$是已知的。计算锥体的体积的步骤如下：

1）**分割** 在区间$[0,h]$内任意插入$n-1$个分点：$z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}$，且$(0=z_0,h=z_n)$

$$0=z_0<z_1<z_2<\cdots<z_{n-1}<z_n=h.$$

是区间$[0,h]$的一个分割，表为T。

分割T将区间$[0,h]$分成n个小区间：

$[z_0,z_1]$，$[z_1,z_2]$，$\cdots$，$[z_{k-1},z_k]$，$\cdots$，$[z_{n-1},z_n]$。

设第k个小区间$[z_{k-1},z_k]$的长是$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}(k=1,2,\cdots,n)$。

2）**代替** 在小区间$[z_{k-1},z_k]$任取一点$\eta_k\in[z_{k-1},z_k]$。在$z=\eta_k$处的截面面积是$p(\eta_k)$。用底面积为$p(\eta_k)$、高为Δz_k的柱体的体积$p(\eta_k)\Delta z_k$近似代替锥体第k片锥台的体积ΔV_k，即

$$\Delta V_k\approx p(\eta_k)\Delta z_k,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

3）**作和** 将n个柱体的体积加起来$\sum\limits_{k=1}^{n}p(\eta_k)\Delta z_k$应该是锥体的体积$V=\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta V_k$的近似值，即

$$V=\sum_{k=1}^{n}\Delta V_k\approx\sum_{k=1}^{n}p(\eta_k)\Delta z_k.$$

不难看到，每个小区间的长越小（相应小区间的个数在增加），近似程度越好，即"误差"越小。

4）**取极限** 当分割T的最大的小区间的长$l(T)\to0$时，和数$\sum\limits_{k=1}^{n}p(\eta_k)\Delta x_k$的极限理所当然地应该认为是锥体的体积$V$，即

$$V=\lim_{l(T)\to0}\sum_{k=1}^{n}p(\eta_k)\Delta x_k.$$

由此可见，与曲边梯形面积一样，锥体的体积也是一个"特定结构和数"

$$\sum_{k=1}^{n} p(\eta_k)\Delta x_k$$

的极限（$l(T)\to 0$），关于这个极限的计算待后再述。

8.1.2. 定积分概念

上段给出了两个几何学中的实例：一个是曲边梯形的面积；一个是锥体的体积。尽管它们的几何意义不同，但是它们的数学结构却是完全一样的，都是函数在区间上"特定结构和数"的极限。不仅如此，在几何学、物理学、电学等学科中也要遇到数学形式相同的这个"特定结构和数"的极限。将它们的共性抽象出来就是定积分概念。

设有闭区间$[a,b]$。在区间$[a,b]$内任意（注意"任意"二字）插入$n-1$个分点：$x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$，且（令$x_0=a,x_n=b$）

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

称为区间$[a,b]$的一个**分割**，表为T。分割T将区间$[a,b]$分成n个小区间：

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ \cdots,\ [x_{k-1},x_k],\ \cdots,\ [x_{n-1},x_n].$$

设第k个小区间$[x_{k-1},x_k]$的长是$\Delta x_k=x_k-x_{k-1},k=1,2,\cdots,n$；分割$T$的$n$个小区间之长的最大者表为$l(T)$，即

$$l(T)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}.$$

在第k个小区间$[x_{k-1},x_k]$任取（注意"任取"二字）一点$\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$，$k=1,2,\cdots,n$。集合$\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$表为$\xi$，即

$$\xi=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\},$$

称为区间$[a,b]$分割T的一个**取法**。

定义1. 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$有定义。若区间$[a,b]$的任意分割T和分割T的任意取法ξ，和数

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

称为函数$f(x)$在区间$[a,b]$**关于分割 T 和取法ξ的积分和**，简称**积分和**（或**黎曼和**），表为$\sigma(T,\xi)$，即

$$\sigma(T,\xi)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

显然，积分和$\sigma(T,\xi)$与分割T有关也与取法ξ有关。

如果非负函数$y=f(x)$是区间$[a,b]$上曲边梯形的一条曲边，则积分和$\sigma(T,\xi)=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$就是关于分割$T$和取法$\xi$的$n$个矩形面积的和。

如果非负函数$A=p(z)$是区间$[0,h]$上锥体的截面面积函数，则积分和$\sigma(T,\xi)=\sum\limits_{k=1}^{n}p(\xi_k)\Delta z_k$就是关于分割$T$和取法$\xi$的$n$个柱体体积的和。

定义2. 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$有定义。若函数$f(x)$在区间$[a,b]$关于分割T和取法ξ的积分和$\sigma(T,\xi)=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$存在极限$I$（当$l(T)\to 0$时，$I$与分割$T$无关也与取法$\xi$无关），即

$$\lim_{l(T)\to 0}\sigma(T,\xi)=\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=I,$$

则称函数$f(x)$在$[a,b]$**可积**或$f(x)$是$[a,b]$的**可积函数**，I是函数$f(x)$在$[a,b]$的**定积分**（或**黎曼积分**），也简称**积分**，表为

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=I.$$

定积分符号$\int_a^b f(x)\,dx$的各部分的名称如下：$[a,b]$是**积分区间**；a与b分别是定积分的**下限**与**上限**；$f(x)$是**被积函数**；$f(x)\,dx$是**被积表达式**；x是**积分变数**。

若积分和$\sigma(T,\xi)$不存在极限（当$l(T)\to 0$时），则称函数$f(x)$在$[a,b]$不可积。

不难看到，积分和$\sigma(T,\xi)$的极限$(l(T)\to 0)$已经不是我们学过的函数极限了。这是因为虽然积分和$\sigma(T,\xi)$与分割T有关，但是它已不是$l(T)$的函数。因此，积分和的极限有进一步明确的必要。它的确切涵义（ε—δ定义）是：

$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = I \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\quad \forall T: l(T)<\delta,$$

$\forall\xi$，有

$$|\sigma(T,\xi)-I| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I\right| < \varepsilon.$$

根据定积分定义，不难看到，上段的两个实例都是定积分.

曲边梯形的面积A是非负连续曲线（函数）$y=f(x)$在$[a,b]$的定积分，即

$$A=\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx.$$

锥体的体积V是锥体的截面面积函数$A=p(z)$在$[0,h]$的定积分，即

$$V=\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} p(\xi_k)\Delta z_k = \int_0^h p(z)\,dz.$$

注 1. 定积分$\int_a^b f(x)\,dx$是积分和$\sigma(T,\xi)$的极限$(l(T)\to 0)$，它是一个数（实数）。这个数仅与函数$f(x)$和积分区间$[a,b]$有关，而与积分变数用什么字母表示无关. 因此用$y,u,\cdots$代替x，定积分（数）不变，即

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(u)\,du = \cdots.$$

2. 函数$f(x)$在区间$[a,b]$可积，即积分和$\sigma(T,\xi)$存在极限$(l(T)\to 0)$。这表明它要求当$l(T)\to 0$时，对“任意分割T”与“任

意取法ξ”的所有积分和$\sigma(T,\ \xi)$都无限趋近于同一个数I(定积分)。如果只是对“某种分割T”与“某种取法ξ”得到的积分和$\sigma(T,\ \xi)$存在极限($l(T)\to 0$)，尚不能断定函数$f(x)$在区间$[a,b]$可积。当已知函数$f(x)$在区间$[a,b]$可积的条件下，则可取“某种分割T”与“某种取法ξ”的积分和$\sigma(T,\xi)$的极限($l(T)\to 0$)来计算定积分。

3. 在积分和的极限$\lim\limits_{l(T)\to 0}\sigma(T,\xi)=I$中，尽管积分和$\sigma(T,\ \xi)$不是$l(T)$的函数，但是根据$\varepsilon-\delta$定义，能够证明这类极限也具有函数极限的一些性质，如单调性，线性性，等。本书在§8.3中将应用积分和的极限来证明这些性质。

习 题 8.1

1. 回答下列问题：

(1) 何谓曲边梯形？何谓曲边梯形的面积？

(2) 何谓区间$[a,\ b]$的分割T？区间$[a,\ b]$的一个分割T对应唯一一个$l(T)$。反之，一个$l(T)$是否对应唯一一个分割T？

(3) 何谓区间$[a,\ b]$分割T的一个取法？

(4) 何谓函数$f(x)$在区间$[a,\ b]$的积分和$\sigma(T,\ \xi)$？积分和$\sigma(T,\xi)$的变化与哪些因素有关？它的几何意义是什么？

(5) 函数$f(x)$在区间$[a,\ b]$的积分和$\sigma(T,\ \xi)$的极限是$I(l(T)\to 0)$是怎样定义的($\varepsilon-\delta$定义)？

(6) 何谓函数$f(x)$在区间$[a,\ b]$可积和定积分？虽然函数$f(x)$在区间$[a,\ b]$的可积与定积分是一回事，但是它们强调的侧面有所不同。有什么不同？

(7) 可否将函数$f(x)$在区间$[a,\ b]$的定积分写成下列极限：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\,\Delta x_k=\int_a^b f(x)\,dx。$$

(8) 定积分$\int_a^b f(x)\,dx$这个数与哪些因素有关？

---

2. 根据定积分的定义，计算定积分$\int_a^b c\,dx$，其中c是常数。

§ 8.2. 函数可积的条件

8.2.1. 可积的必要条件

函数可积的必要条件就是下面的定理：

定理1. 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$可积，则函数$f(x)$在区间$[a,b]$有界.

证 已知函数$f(x)$在区间$[a,b]$可积，设它的定积分是I.根据定积分定义，

取定$\varepsilon_0=1$，$\exists\delta>0$，$\forall T:l(T)<\delta$，$\forall\xi$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-I\right|<1\text{或}\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|<|I|+1, \tag{1}$$

即$\exists\delta>0$，$\forall T:l(T)<\delta$，$\forall\xi$对应的积分和有界. 取定某个分割T'，使$l(T')<\delta$. 不妨设分割T'将区间$[a,b]$分成n个小区间：

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ \cdots,[x_{n-1},x_n]\ (x_0=a,\ x_n=b).$$

用反证法. 假设函数$f(x)$在区间$[a,b]$无界，它必在上面n个小区间中至少某一个小区间无界. 不妨设函数$f(x)$在$[x_0,x_1]$无界.

$\forall\xi_1\in[x_0,x_1]$，取定$\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$，$k=2,3,\cdots,n$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|=\left|f(\xi_1)\Delta x_1+\sum_{k=2}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|$$

$$\geqslant|f(\xi_1)|\Delta x_1-\left|\sum_{k=2}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|,$$

其中Δx_1与$\left|\sum_{k=2}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|$都是正常数.

已知函数 $f(x)$ 在 $[x_0,x_1]$ 无界，即 $\forall M>0$，$\exists\xi_1\in[x_0,x_1]$，使

$$|f(\xi_1)|>\frac{1}{\Delta x_1}\left(M+\left|\sum_{k=2}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|\right).$$

从而，
$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|>M,$$

即对分割T'，积分和 $\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$无界，与上述有界矛盾。于是，函数$f(x)$在区间$[a,b]$有界。□

注 函数$f(x)$在$[a,b]$有界，仅是函数 $f(x)$ 在$[a,b]$可积的必要条件，并不是充分条件。例如，狄利克莱函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}\cap[a,b],\\ 0, & x\in(\mathbf{R}-\mathbf{Q})\cap[a,b].\end{cases}$$

显然，狄利克莱函数$D(x)$在$[a,b]$有界，但是它在$[a,b]$却不可积。

事实上，任意分割T将$[a,b]$分成n个小区间。因为在$[a,b]$上的有理数与无理数是处处稠密的，所以每个小区间既存在有理数又存在无理数。

若每个ξ_k都取无理数，则积分和

$$\sigma(T,\xi)=\sum_{k=1}^{n}D(\xi_k)\Delta x_k=0.$$

若每个ξ_k都取有理数，则积分和

$$\sigma(T,\xi)=\sum_{k=1}^{n}D(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=b-a.$$

于是，当$l(T)\to0$时，积分和$\sigma(T,\xi)$不存在极限，即狄利克莱函数$D(x)$在$[a,b]$不可积。