中央广播电视大学教材

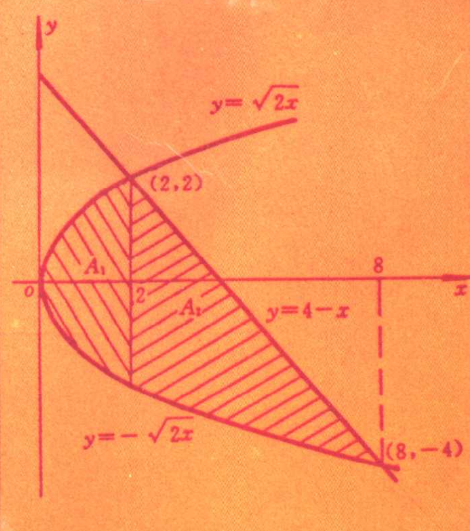
高等数学

一元函数微积分

上册

GAO DENG SHU XUE

主编　柳重堪



中央广播电视大学出版社

高 等 数 学

上 册

一元函数微积分

柳重堪 主编

中央广播电视大学出版社

(京)新登字 163 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/柳重堪主编. 一北京:中央广播电视大学出版社,1994.4
电视大学教材
ISBN 7-304-01026-6

Ⅰ.高… Ⅱ.柳… Ⅲ.高等数学-电视大学-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 05155 号

高等数学

上册

一元函数微积分

柳重堪 主编

中央广播电视大学出版社出版
社址:北京西城区大木仓 39 号北门　邮编:100032
北京印刷三厂印刷　新华书店北京发行所发行
开本 787×1092　1/16　印张 21.75　千字 495
1994 年 2 月第 1 版　1994 年 4 月第 1 次印刷
印数　1—40000
定价 11.75 元
ISBN 7-304-01026-6/O・70

主持教师　王晴云
　　　　　陈卫宏
　　　　　张旭红
主　　编　柳重堪
编　　者　柳重堪
　　　　　王晴云
　　　　　赵章琳
　　　　　陈卫宏
　　　　　张旭红

前　言

《高等数学》(上、下册)是中央广播电视大学理工科大专教材.上册包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、级数、常微分方程等八章,下册包括空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分介绍、傅里叶级数等五章.电视课共117学时,其中上册72学时,下册45学时.

本书的编写依据是国家教委组织制定的《高等工程专科教育基础课程(高等数学)教学基本要求》及中央广播电视大学制定的电视大学高等数学教学大纲与教学计划.编写时尽可能考虑下列因素:

1.读者对象是大学专科理工类各专业学生;

2.电视教学的远距离、多媒体的特点;

3.不过于追求理论上的严密性,但保持自身体系的完整性;

4.注意启发式和几何直观,以便于自学;

5.加强基本运算的训练,但不过分追求复杂的计算和变换,除每节配有练习外,每章配有总习题,供读者自我测验,所有练习题都附有答案;

6.适当介绍高等数学在现代科技领域中的应用;

7.适当补充一些超出大纲但为某些专业所需要的内容,这些内容均以“*”号标出.

参加本书上册编写的有柳重堪(第一～四章),王晴云(第五、六章),陈卫宏(第七章)),赵章琳(第八章),张旭红(部分章节、部分习题,附录)等,最后由主编统一定稿.

本书上册由吴昌炽教授主审,参加审校的还有盛祥耀教授、施学瑜教授、龚冬保教授和文丽副教授等.此外,参加本书样章讨论的有李欧教授、叶其孝教授、刘德荫副教授和仲崇彬副教授等.他们对本书的初稿提出了许多宝贵意见,在此谨表衷心的谢意.

本书编写过程中得到中央广播电视大学各级领导的大力支持和关心,在此一并致谢.

由于编者的水平和经验有限,书中不当之处在所难免,恳请广大读者指正,以俟再版时更正.

编　者

1993年5月

目　录

第一章 函 数

§1.1 实 数

一、实数

人们在幼童时期就学会了数东西，那就是自然数的一种应用. 此后，在记帐时为了表示收入和支出，需要用到正数和负数；在标明商品价格、测量物体长度和重量时要用到小数或分数；边长为 1 米的正方形，由勾股定理知其对角线长为 $\sqrt{2}$ 米，这就导致无理数；在解二 次代数方程时 $ax^2+bx+c=0$ 若 $b^2-4ac<0$ 则其解会出现复数. 这种关于数的概念的逐步拓展，一方面是出于实践的需要，另一方面也完善了关于数的理论.

在"高等数学"这门课程中，一般地我们只限制在实数范围内讨论，不涉及复数. 因此，本书中凡是说到数，均指实数. 但有时为了讨论方便，也会涉及复数. 如果讨论的是复数，则一定给予指明. 实数包括有理数和无理数两大类. 有理数是能表示为两个整数相除的形式的数，或者等价地，有理数就是有限小数或无限循环小数. 凡是不能表示成两个整数相除的数称为无理数，或者等价地，无理数就是无限不循环小数. 例如，$\sqrt{2}=1.4142\cdots$，$\pi=3.14159\cdots$ 等等都是无理数.

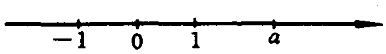


图 1-1-1 数轴

在几何上，可以用数轴上的点来表示实数. 数轴是一条直线，它的两端可以无限延长，如图 1-1-1 所示，在此直线上选定一个原点 O，再选定一个单位长度，在该直线的一方画一个箭头表示正向，而另一方为负向(习惯上，如果该直线是画成水平的，则选右方为正向；如果该直线是画成垂直的，则选上方为正向). 任意给定一个实数 a，按照下列规则在数轴上定出一个表示 a 的点，该点在直线的正向还是负向取决于数 a 是正数还是负数，该点到原点 O 的距离等于 a 的绝对值 $|a|$. 这样，就可以建立起实数的全体(称为**实数集**)和数轴之间一一对应的关系. 换句话说，任意给定一个实数，总可在数轴上找到唯一的一个点与之对应，反之，在数轴上的每一个点也必定唯一地对应于一个实数. 基于这种一一对应关系，可以把一个实数 a 和数轴上与之对应的点 a 不加区别地看待.

二、区间

我们把大于 1 且小于 4 的数的全体记为(1,4)，称之为开区间，1 和 4 称为该开区间的端点. 在几何上，开区间(1,4)表示数轴上点 1 与 4 之间的线段(不包括端点 1 和 4). 如果数 x 是介于 1 和 4 之间的某个数，则记作 $x\in(1,4)$. 读作"x 属于开区间(1,4)". 它等价于 $1<x<4$.

一般地，给定两个数 a 和 b(假定 $a<b$)，我们把所有大于 a 且小于 b 的数的全体记为(a,

$b)$，把所有不小于 a 且不大于 b 的数的全体记为 $[a,b]$，并引入记号“$\in$”如下：

$$x\in(a,b)\text{表示 } a<x<b$$

$$x\in[a,b]\text{表示 } a\leqslant x\leqslant b$$

(a,b) 称为**开区间**，$[a,b]$ 称为**闭区间**，并称 a,b 为区间的端点. 在几何上，(a,b) 和 $[a,b]$ 表示数轴上点 a 和点 b 之间的线段，前者不包括端点 a 和 b，后者包括这两点. 类似地 $[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都是“半开区间”，且

$$x\in[a,b)\text{表示 } a\leqslant x<b$$

$$x\in(a,b]\text{表示 } a<x\leqslant b$$

当 $a<b$ 时，$b-a$ 称为区间 (a,b)（或 $[a,b]$、$[a,b)$、$(a,b]$）的长度.

进而，引入记号 $+\infty$（读作“正无穷大”）和 $-\infty$（读作“负无穷大”）如下：

$$x\in(a,+\infty)\text{表示 } a<x$$

$$x\in[a,+\infty)\text{表示 } a\leqslant x$$

$$x\in(-\infty,a)\text{表示 } x<a$$

$$x\in(-\infty,a]\text{表示 } x\leqslant a$$

$$x\in(-\infty,+\infty)\text{表示 } x\text{ 是一个实数}$$

这些出现 $\pm\infty$ 的区间都称为**无穷区间**.

提请读者注意的是，在这里 $+\infty$ 和 $-\infty$ 仅仅是一种记号，不是数，因此不能把它们当作数来进行运算. 有时，$+\infty$ 和 $-\infty$ 统一地记为 ∞.

三、 绝对值

我们知道，对于实数 x，如果它是正的，则其绝对值 $|x|=x$，如果它是负的，则 $|x|=-x$，如果 $x=0$，则 $|x|=0$. 若用式子表示，即为

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

在数轴上，$|x|$ 表示点 x 到原点 O 的距离. 显然，$|x-y|$ 表示点 x 与点 y 之间的距离.

绝对值有下列性质：

(1) $|a|\geqslant 0$，且 $|a|=0$ 等价于 $a=0$

(2) $|ab|=|a|\cdot|b|$

(3) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$

(4) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$

(5) $|a-b|\geqslant |a|-|b|$

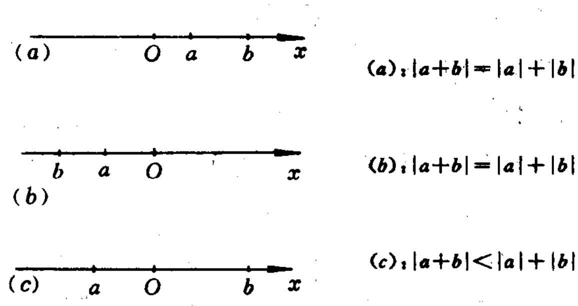


图 1-1-2 用于证明 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 的图形

其中性质(1)，(2)，(3)都是显然的. 性质(4)可从图 1-1-2 看出，性质(5)可由性质(4)推出.

例 1 解不等式 $|x|\leqslant 9$

解 $|x|\leqslant 9$ 等价于不等式

$$-9\leqslant x\leqslant 9$$

即 $x\in[-9,9]$.

例 2 解不等式$|x|>9$

解 $|x|>9$ 等价于

$$x>9 \quad 或 \quad x<-9$$

因此$x\in(-\infty,-9)$或$x\in(9,+\infty)$.

例 3 解不等式$|u-2|<0.1$

解 $|u-2|<0.1$ 等价于$-0.1<u-2<0.1$,即

$$1.9<u<2.1$$

因此$u\in(1.9,2.1)$.

由例 3 可知下列两个不等式等价.

$$|u-a|<\varepsilon \iff a-\varepsilon<u<a+\varepsilon$$

以几何上讲,u 满足不等式$|u-a|<\varepsilon$表示 u 落在以 a 为中心,以 ε 为半径的开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内.这个区间称为点 a 有 ε **邻域**.

练习 1.1

1. 在数轴上表示下列各点:

$1,0,-\frac{3}{2},-\sqrt{5},\sqrt{3},1-\sqrt{2}$

2. 用区间表示下列各不等式,并将它们画在数轴上:

(1) $-1\leqslant x\leqslant 3$ (2) $\frac{1}{2}<x\leqslant 3$

(3) $0\leqslant x<2$ (4) $-5<x<-3$

(5) $x<-2$ (6) $x\geqslant 1$

3. 试讨论下述命题的真伪,并说明理由:

(1) 若$|x|=2$,则$x=2$

(2) 若$x<5$,则$|x|<5$

(3) $x^2\leqslant 9$ 等价于 $x\leqslant 3$

(4) 不存在实数 x,使得$|x-1|=|x-2|$

(5) $|1+2x|\leqslant 3$ 等价于$-2\leqslant x\leqslant 1$

4. 在数轴上表示出下列不等式的公共部分:

(1) $-8\leqslant x<6$ 和$-6\leqslant x<8$

(2) $-1\leqslant x\leqslant 2$、$x\geqslant 0$ 和$-3<x<1$

(3) $x\geqslant 1$、$x\neq 2$ 和$\frac{1}{2}<x<4$

5. 解下列绝对值不等式:

(1) $|x+1|\leqslant 2$ (2) $|2-x|<3$

(3) $|3-2x|<5$ (4) $|1+\frac{x}{3}|\geqslant 1$

(5) $|x^2-2|\geqslant 1$ (6) $|5-x^{-1}|\leqslant 1$

6. 解下列不等式

(1) $\frac{x+1}{x-2}\leqslant 0$ (2) $\frac{2x-1}{x+2}<1$

(3) $\left|\frac{3x-1}{2}\right|\leqslant 1$ (4) $\frac{3x-2}{x-1}>\frac{x+5}{x-1}$

(5) $x^2-4x+3>0$ (6) $|x^2-3x+2|\geqslant x^2-3x+2$

(7) $0<(x-2)^2\leqslant 4$ (8) $(x-2)^2>4$

*7. 证明下列各式：

(1) $|x|-|y|\leqslant||x|-|y||\leqslant|x-y|\leqslant|x|+|y|$

(2) 若 $a>0$、$b>0$ 则 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$

(3) 若 $x>0$，则 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立.

§1.2 函数

一、常量与变量

在对某个自然过程或社会过程进行定量描述和研究时，总要涉及两类基本的量：常量与变量. 在所考察的过程或问题中，有些量的大小不发生变化，保持某一固定的数值，这种量称为常量. 还有些量的大小是变化的，它们可在一定的范围内取不同的数值，这种量称为变量. 例如，一个物体在离地面 H 米的高处下落，其初始速度为 v_0，则在开始下落至达到地面的过程中，该物体所下落的距离 s 与所经历的时间 t 有下列关系：

$$s=v_0t+\frac{1}{2}gt^2 \tag{1-2-1}$$

显然，在这个下落过程中，量 $\frac{1}{2}$，v_0 和 g 是常量，而时间 t 和距离 s 是变量，而且时间 t 的变化范围是 $[0,T]$（这里 T 是从开始下落至达到地面所经历的时间），距离 s 的变化范围是 $[0,H]$.

需要指出的是，常量和变量都是相对的概念. 同一个量在一定的条件下或在某个问题中是常量，而在另外的条件下或在另一个问题中则可能是变量. 例如重力加速度 g，在上述下落物体问题中是常量. 但是根据物理学知识，在离地球中心距离不同的位置 g 的数值是不同的. 因此当高度 H 的数值不大时可以认为 g 在物体下落过程中 g 是常量，然而在 H 的数值很大时，或者在研究 g 如何随高度的变化而变化的问题中，g 就是变量.

初等数学主要研究常量，而高等数学则主要研究变量，着重研究变量与变量之间的依从关系.

今后，我们常用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x,y,z,s,t 等表示变量，当然这并不是绝对的.

二、函数的定义

式(1-2-1)描述了物体下落的距离 s 与所经历的时间 t 之间的依从关系. $t=0$ 表示物体刚开始下落的时刻，这时，$s=0$，经历 0.5 秒后物体下落的距离为

$$0.5v_0 + \frac{1}{2}g \cdot 0.5^2 = 0.5v_0 + 0.125g(\text{米})$$

经历 2 秒后物体下落的距离为

$$2v_0 + \frac{1}{2}g \cdot 2^2 = 2v_0 + 2g(\text{米})$$

如此等等.总之,下落距离 s 随所经历的时间 t 的变化而变化.当时间 t 在区间$[0,T]$内任意取定一个数值时,相应的下落距离 s 的数值也随之唯一地确定.变量 s 与变量 t 的这种依从关系在数学中称为函数关系.下面,我们给出关于函数的确切定义.

定义 1.1　设 D 是一个非空数集.如果有一个对应规则 f,使得对每一 $x\in D$,都能对应于唯一的一个数 y,则此对应规则 f 称为定义在集合 D 上的一个函数,并把数 x 与相应的数 y 之间的对应关系记为

$$y = f(x)$$

并称 x 为该函数的自变量,y 为函数值或因变量,D 为定义域.

当自变量 x 取遍定义域 D 中数值时,相应的函数值 y 取值集合

$$Z = \{y; y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 f 的值域.

例 1　设三角形的两边之长 a 和 b 为已知数,它们的夹角 γ 的取值可以变化,则此三角形的面积 A 与角 γ 之间的函数关系为

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \tag{1-2-2}$$

显然,γ 的取值范围是 $0<\gamma<\pi$,故此函数的定义域是开区间$(0,\pi)$.相应地,此函数的值域是半开区间$(0,\frac{1}{2}ab)$.

例 2　式(1-2-1)所示的物体下落运动中,t 是自变量,s 是因变量,该函数的定义域是区间$[0,T]$,值域是区间$[0,H]$.这里 H 是已知的物体高度,T 表示从物体开始下落至该物体落到地面所经历的时间,显然,T 满足下列二次方程

$$v_0T + \frac{1}{2}gT^2 = H$$

由此可解得

$$T = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g} \tag{1-2-3}$$

舍去不合理的负值,得到 $T=(\sqrt{v_0^2+2gH}-v_0)/g$,因此,函数(1-2-1)的定义域为下列区间:

$$[0,(\sqrt{v_0^2 + 2gH} - v_0)/g]$$

例 3　假定某汽车公司关于运送货物的收费标准是:如果货物重量不超过 30 千克,则每千克收费 1.5 元;如果货物重量超过 30 千克,则超出部分每千克收费增至 2.5 元.因此,货物运费 F 与货物重量 m 之间的函数关系可表为

$$F = f(m) = \begin{cases} 1.5m(\text{元}), & \text{当 } 0 < m \leqslant 30 \text{ 时} \\ 1.5 \times 30 + 2.5(m - 30)(\text{元}), & \text{当 } m > 30 \text{ 时} \end{cases} \tag{1-2-4}$$

这个函数的定义域是无穷区间$(0,+\infty)$，值域也是无穷区间$(0,+\infty)$. 有了这个函数表达式，可方便地根据货物重量算出相应的运费. 例如货物重量为 28 千克时应付运费为

$$f(28) = 1.5 \times 28 = 42(\text{元})$$

货物重量 41 千克时应付运费为

$$f(41) = 1.5 \times 30 + 2.5(41 - 30) = 72.5(\text{元})$$

下面，我们对函数定义的有关问题作进一步的解释.

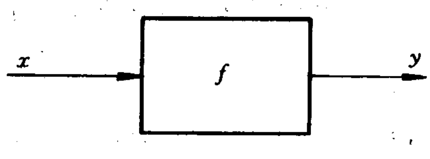


图 1-2-1　函数 $y=f(x)$的框图

1. "函数"表达了因变量与自变量之间的一种对应规则，这种对应规则用字母"f"来表示. 因此 f 是一个函数符号，$y=f(x)$绝不意味着"y 等于 f 乘以 x". 它表示当自变量取值为 x 时因变量 y 的取值为 $f(x)$. 例如，对于函数 $y=f(x)=x^2+3^x+\sin 5x$，f 表示运算：$(\quad)^2+3^{(\ )}+\sin 5(\quad)$，于是，$f(0)=0^2+3^0+\sin 5\cdot 0=1$，$f(\pi)=\pi^2+3^\pi+\sin 5\pi=\pi^2+3^\pi$，等等. 一般地，可以把函数理解成一种变换，即函数 f 把自变量 x 的值变成相应的 y 值. 这可以用如图 1-2-1 所示的框图来表示. 也可通俗地把函数看成是一部机器，定义域 D 中任一数值 x 进入机器被函数 f 作用后，就被加工为值域中的数 $f(x)$.

2. 函数记号

$$y = f(x)$$

中，f 表示函数，$f(x)$表示对应于 x 值的函数值，两者是有区别的. 但是研究函数总是通过函数值而进行的，因此习惯上常把函数和函数值都称为函数. 基于这一点，有时也把表示因变量的字母与表示函数的字母写成相同的，例如

$$y=y(x)$$
$$s=s(t)$$

等等. 并常把 $y=f(x)$或 $y=y(x)$读作"y 是 x 的函数".

3. 函数具有单值性. 也就是说，当自变量在定义域 D 中取定了一个数值时，与之对应的函数值是唯一的.

4. 定义域是函数的一个组成部分. 给定一个函数. 就意味着其定义域是同时给定的. 今后，凡是说"函数 $f(x)$在点 x_0 处有定义"，就表示 x_0 是函数 $f(x)$的定义域内的一个点. 说"函数 $f(x_0)$在点 x_0 的一个邻域内有定义"，就是指对满足$|x-x_0|<\varepsilon$ 的每一 x，函数 $f(x)$均有定义(其中 ε 为某一正数).

关于定义域，如果所讨论的函数来自某个实际问题，那么其定义域应符合实际意义. 例如例 2 中物体下落距离函数 $s=v_0t+\dfrac{1}{2}gt^2$ 的定义域应为区间$[0,T]$，其中 T 由式(1-2-3)所示. 如果不考虑所讨论的函数的实际背景，那么其定义域应使得它在数学上有意义. 例如若把 $s=$

$v_0t+\frac{1}{2}gt^2$ 作为一个关于 t 的二次多项式函数来看待，那么它的定义域便是$(-\infty,+\infty)$.

例 4 求函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域.

解 在实数范围内使函数 $y=\sqrt{x}$ 有意义的自变量 x 的取值范围是 $x\geqslant 0$，故定义域为$[0,+\infty)$.

例 5 求函数 $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

解 对于 $\frac{1}{x}$，要求 $x\neq 0$；对于 $\sqrt{1-x^2}$，要求 x 满足 $-1\leqslant x\leqslant 1$，因此 $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是

$$[-1,0)\cup(0,1]$$

值得注意的是，如果两个函数的表达式在形式上相等，但定义域不同，则认为它们是两个不同的函数. 例如 $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$，从形式上看似乎相等，但它们的定义域不同：$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，因此 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个不同的函数.

5. 我们这里只考虑含有一个自变量的情况，称之为**一元函数**. 事实上，有许多问题所涉及的函数其包含的自变量不止一个. 例如例 1 中如果三角形的两边长 a 和 b 及它们的夹角都在改变，则三角形面积便是三个自变量的函数. 含有两个自变量 x,y 的函数称为二元函数，可记为 $f(x,y)$，$g(x,y)$，……含有三个自变量 x,y,z 的函数称为三元函数，可记为 $f(x,y,z)$，$g(x,y,z)$，……，依此类推. 这种含有多于一个自变量的函数称为**多元函数**将在本书下册讨论.

三、 函数表示法

通常，函数有下列三种表示法.

1. **解析法**(也称公式法) 用数学式子来表示因变量与自变量的关系，这种表示函数的方法称为解析法或公式法. 前面所举的那些函数例子都是用解析法表示的. 解析法是函数的精确的描述，其优点是便于进行理论分析和研究. 缺点是不直观，而且许多实际问题中的函数往往难于用解析法来表示.

需要指出的是有时一个函数的解析法表示需要用若干个式子来表示. 例如例 2 中的运费函数(1-2-4)，它不能被认为是两个函数.

此外，一个函数的解析法表示可能不是唯一的，例如绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases} \tag{1-2-5}$$

也可表为

$$y=\sqrt{x^2}$$

2. **图形法** 函数 $y=f(x)$ 的图形法表示，就是直角坐标 x 和 y 满足关系式 $y=f(x)$ 的那种点的轨迹的图形. 例如，图 1-2-2 是绝对值函数 $y=|x|$ 的图形，图 1-2-3 是例 3 中的运费函数的图形.

例 6 图 1-2-4 是某地气象站的温度记录仪一昼夜之内自动画成的气温曲线. 它表示在冬季某一天从 $t=0$ 点钟到 $t=24$ 点钟 24 小时内气温 T(℃)随时间 t 而变化的函数关系.

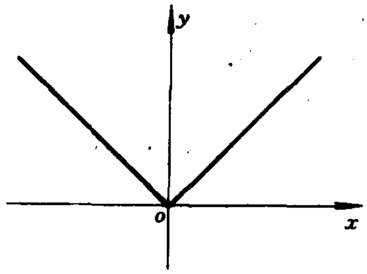


图 1-2-2 绝对值函数 $y=|x|$ 的图形

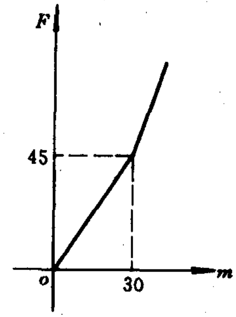


图 1-2-3 汽车运货费函数的图形

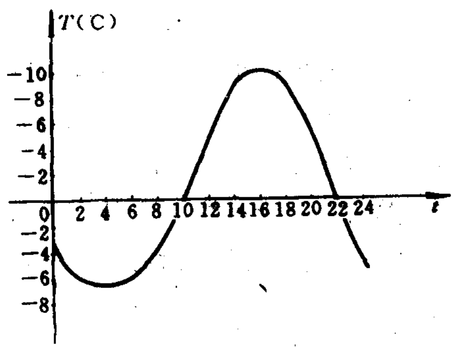


图 1-2-4 某天的气温变化实测图

函数的图形法表示的优点是直观. 由图形可较为清楚地看出因变量是如何依赖于自变量的变化而变化的. 此外，函数图形容易由实验数据获得，在实践中常用. 例如图 1-2-4 的气温曲线，很清楚地表示出了气温随时间而变化的状况. 用图形法表示函数的缺点是不能由此获得准确的函数值和进行精确的理论分析.

显然，如果已知函数 $y=f(x)$ 的解析法表示，则其图形可通过逐点描迹得到. 但如果不知道函数的解析表示，只知其图形，则难以由图形获得其准确的解析表示.

3. **列表法** 在实际应用(尤其是数值计算)中常把一系列自变量值及其相应的函数值列成表，如平方表，对数表，三角函数表等，这就是函数的列表法表示. 其优点是可以直接由自变量数值查到相应的函数值. 但表中所列数值往往不完全，因此列表法一般不能完整地表示函数. 而且这种表示法不直观，往往不便于进行分析.

今后我们讨论的函数，一般都用解析法表示.

四、 函数的几种属性

1. **有界性** 设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 内有定义. 如果存在正数 M，使得当 x 在 D 内取任何值时均有

$$|f(x)| \leqslant M \tag{1-2-6}$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 D 内是**有界**的. 如果不存在这样的常数 M，便称函数在 D 内是**无界**的. 式(1-2-6)中的数 M 称为函数 $f(x)$ 的界。显然，如果函数 $f(x)$ 有界，则其界不唯一.

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $|\sin x|\leqslant 1$. 反比函数 $y=1/x$ 在 $[0.1,1]$ 上是有界的，但在区间 $(0,1)$ 内是无界的.