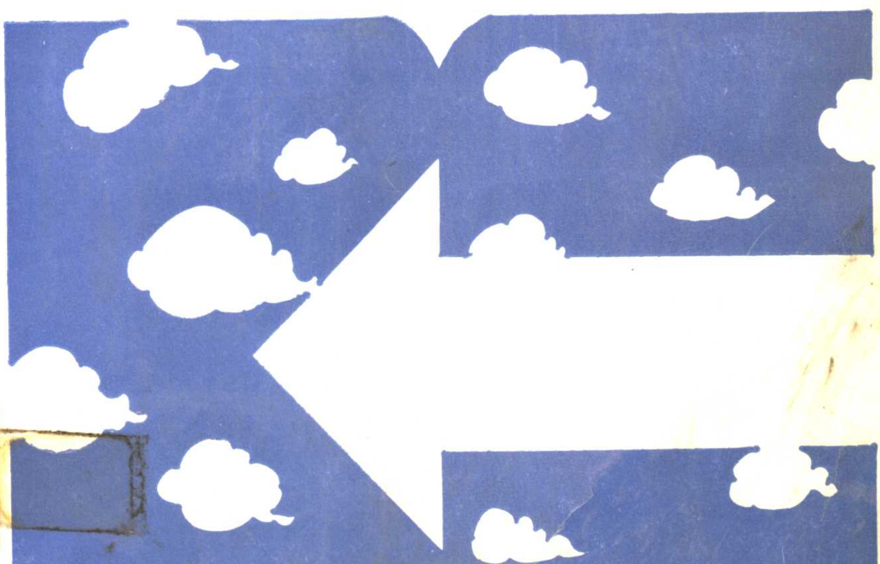
高等数学
习题课指导书

常俊英



高等教育出版社

928671

013
9024

高等数学
习题课指导书

常　俊　英

高等教育出版社

本书是根据高等工业学校《数学课程教学基本要求》，为高等数学习题课编写的指导书．全书按章选配习题．所选题目注重启发学生思考，注重开发智力和培养能力．每章开头指出教学基本要求，重难点，提出学时分配建议．每章所选题目分三类：一、备选题：难度适中，是基本概念和基本计算题．计算量不大，适合习题课上选用；二、参考题：一部分与“一”相近，可供调配使用，一部分计算量偏大，选用时宜只研究思路、方法，将计算工作留到课后；三、补充题：难度偏高，供学有余力的学生提高用．本书选入的题目数量均超过习题课所需数量，以供选择．

本书经全国工科数学课程教学指导委员会评选认可，可作工科各专业、部分理科专业高等数学习题课的教学参考书，也可作为自学高等数学者的参考书．

高等数学
习题课指导书

常俊英

*

高等教育出版社出版
新华书店总店北京科技发行所发行
高等教育出版社天津印刷厂印刷

*

开本850×1168 1/32 印张 14 字数 360 000
1991年4 月第1 版 1991年4 月第1 次印刷
印数 0 001—6 157
ISBN 7-04-003290-2/O·998

定价6．25元

前言

高等数学习题课是高等数学教学中一个很重要的教学环节，是在教师的引导下，充分发挥学生的能动性和创造精神的极好机会，是一般大班讲课所难以做到的.

“任何学问都包括知识的积累和能力的训练两个方面”①.“在数学上，能力的训练比起单纯的知识的堆积要重要得多”②.“同学习其它本领一样，其必由之路乃是模仿与实践. 学习，首先就是模仿，而模仿则必须要有榜样；模仿是为了实践，而实践又必须具备机会”③. 我以为习题课就是给学生提供模仿的榜样和实践的机会.

那么，模仿什么，怎样实践呢？概括地说，就是模仿教师怎样提出问题、怎样分析问题和怎样解决问题；实践，就是对具体问题的思考，演算以及语言的表述. 所以，一方面教师要起主导作用；另一方面，要有较多的时间留给学生，这是习题课应有的特色.

教师的主导作用在于：备课选题适当——考虑教学的基本要求和学生的实际水平；课上组织得力——适时启发、引导，不失时机地抓住问题，并以较多的时间留给学生，使学生能充分思考和相互讨论.

启发、引导与思考、讨论，是培养学生分析问题和解决问题的能力的过程，同时也是教师与学生、学生与学生的知识、思维与能力的交流过程，要充分利用习题课来实现这一过程.

我是基于以上想法并依照高等工业学校《数学课程教学基本要求》(高等教育出版社，1987 年 4 月第一版)编写这本书的. 书中“目的与要求”也以不同词汇加以区分：对概念、理论从高到低用

①、②、③摘自〔美〕乔治·波利亚著，刘景麟等译《数学的发现》(第一卷第 1—2 页)，内蒙古人民出版社，1979 年 11 月第一版.

"理解"、"了解"、"知道"三级区分;对运算、方法从高到低用"熟练掌握"、"掌握"、"会"或"能"三级区分.

选配习题以章为单元,并根据学时分配情况,提出初步安排意见,但不是按习题课节次编排的,这是考虑到讲课的进度、专业要求及学生水平等因素;同时,也是为了充分发挥任课教师的积极性,提高习题课的质量.

所选题目,一般分为三类:

一、备选题:难度适中,是一章的基本概念和基本计算问题,计算量不大,较为适合习题课选用;

二、参考题:一部分与"一"相近,可供调配使用;一部分计算量偏大,选择时,可在课上只研究思路、方法,将计算工作留到课下;

三、补充题:难度偏高,可供因材施教,对部分学有余力的学生提供帮助.

选入的题目数量均超出习题课所需数量,其目的是为了便于选择,特别是应用问题,应考虑与讲课例题相配合.

对少数超出基本要求的题目(或解法),均注以*号.

本书是在探讨如何上好习题课,故论述上与教材不同,基本上不列出定理、公式和内容提要;也不同于习题解答,它既有计算过程,又讨论出题方式、分析方法及判别正误等,对部分问题进行了细致的剖析,运用启发式的叙述方法,重视开发学生的智力、培养学生的能力,所以,它也可作为自学高等数学者的参考书.

习题课的具体安排,有以下几点想法:

1. 处理好讲与练的关系:不要使习题课成为教师讲题课,也不能成为学生集体作题课.要讲、练结合.讲,主要是引导、启发;练,重点在思考、分析和必要的推演,较多的计算应留到课后.

2. 处理好多与少的关系:对于"少题深入"与"多题普及"的处理,宁要少而精,不要多而平(面面俱到、平平淡淡).具体地说,如果问题已经展开,学生的程度也能达到,就要深入下去,宁肯少作一二题.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

3. 处理好难与易的关系：选择题目，宜中等或中等偏上难度．概念题要能引起讨论，或者可以逐步深入串起几个概念；计算题最好能有几种解法，有益于开阔思路，给学生以实践的机会．当然，必要的基本计算，如求导数等，不一定追求一题多解．

以上是我在教学实践中的一点体会和不成熟的看法，有不妥之处，请给予批评指正．

盛祥耀教授、李欧教授对本书的编写给予了许多指导和帮助，特在此深表感谢．

王嘉善教授对全书进行了复审，并提出许多宝贵意见，特在此深表感谢．

常俊英

一九八九年十二月于清华园

目　录

第一章　函　　数

基本要求

1. 理解函数概念；

2. 了解函数的单调性、周期性和奇偶性；

3. 了解反函数和复合函数的概念；

4. 熟悉基本初等函数的性质和图形；

5. 能列出简单实际问题的函数关系.

简要说明

函数是微积分研究的对象，也是微积分的基础. 学生在中学已学过函数，只需安排一次习题课. 为使学生能在已有基础上有所提高，以适应微积分的需要，选题时应将重点放在学生不太熟悉、又是微积分中用得较多的内容. 如：

1. 函数符号. 要使学生能从具体的函数 $\sin x$，$\lg x$ 等，很快熟悉抽象函数 $f(x)$，$g(x)$ 等；

2. 复合函数. 要求学生理解中间变量的概念，能熟练地将复合函数表为简单函数的复合，这对于导数和微分运算是重要的；

3. 适当训练分段函数；简单的构造函数的问题，可作适当要求，以加深对函数概念的理解，并提高学生的思维能力.

一、备　选　题

1.1　求下列各函数的定义域：

(1)　$f(x)=\log_2(\log_2 x)$；

(2)　$f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；

(3) $y = f(\sin x)$，其中 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$.

目的与要求：

能根据基本初等函数的定义域，求出复合函数的定义域.

解 (1) 令 $u = \log_2 x$ ， 则 $f(x) = \log_2 u$

因为 $y = \log_2 u$ 要求 $u > 0$ ，即

$$\log_2 x > 0, \quad 得 \quad x > 1,$$

所以， $f(x) = \log_2(\log_2 x)$ 的定义域是 $x > 1$.

(2) 令 $u = \dfrac{x-1}{2}$ ， 则 $f(x) = \arcsin u$.

因为 $y = \arcsin u$ 要求 $-1 \leqslant u \leqslant 1$ ， 即

$$-1 \leqslant \frac{x-1}{2} \leqslant 1, \quad 得 \quad -1 \leqslant x \leqslant 3.$$

所以 $f(x) = \arcsin \dfrac{x-1}{2}$ 的定义域是$[-1,3]$.

(3) 因为 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$，所以，在 $f(\sin x)$ 中要求

$$0 \leqslant \sin x \leqslant 1,$$

从而

$y = f(\sin x)$ 的定义域是 $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$ （k 为整数）.

1.2 设 $f(x) = x^3 - x, \varphi(x) = \sin 2x$ ，试写出 $f[\varphi(x)]$、$\varphi[f(x)]$ 及 $f[f(x)]$ 的表示式.

目的与要求：

理解复合函数概念，会写复合函数的表示式.

解 由 $f(x) = x^3 - x$ 知

$$f[\varphi(x)] = [\varphi(x)]^3 - [\varphi(x)] = \sin^3 2x - \sin 2x;$$

同理 $\varphi[f(x)] = \sin 2f(x) = \sin 2(x^3 - x)$;

$$f[f(x)] = (x^3 - x)^3 - (x^3 - x)$$
$$= (x^3 - x)(x^3 - x - 1)(x^3 - x + 1).$$

1.3 设函数 $y = f(x)$ 的图形如图 1.1 所示，试画出下列各函数的图形：

(1) $y = f(-x)$;

(2) $y = 1 - f(x)$;

(3) $y = |f(x)|$;

(4) $y = f(x + 2)$;

(5) $y = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$;

(6) $y = \dfrac{1}{2}(f(x) + |f(x)|)$;

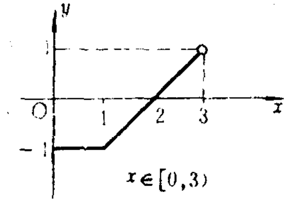


图 1.1

(7) $y = \varphi(x)$　是$(-3,3)$上的偶函数，并且在$[0,3)$上$\varphi(x) = f(x)$；

(8) $y = g(x)$　是以 3 为周期的周期函数，并且在$[0,3)$上$g(x) = f(x)$.

目的与要求：

① 理解函数概念；② 会利用函数的基本性质作函数的图形.

解

(1) $y = f(-x)$(图 1.2)　　(2) $y = 1 - f(x)$(图 1.3)

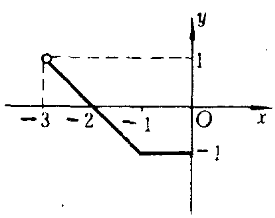


图 1.2

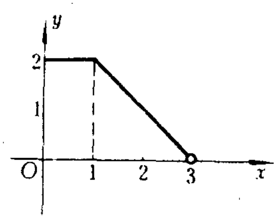


图 1.3

(3) $y = |f(x)|$(图 1.4)　　(4) $y = f(x + 2)$(图 1.5)

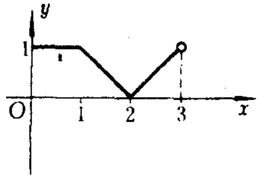


图 1.4

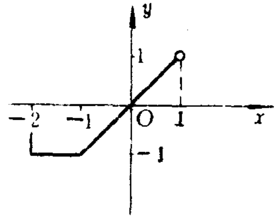


图 1.5

(5) $y=f\left(\dfrac{x}{2}\right)$(图 1.6)　(6) $y=\dfrac{1}{2}(f(x)+|f(x)|)$(图 1.7)

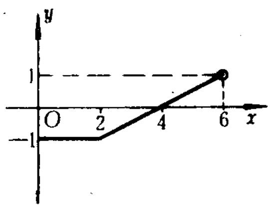


图 1.6

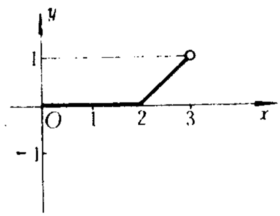


图 1.7

(7) $y=\varphi(x)$(图 1.8)　(8) $y=g(x)$(图 1.9)

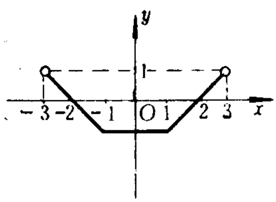


图 1.8

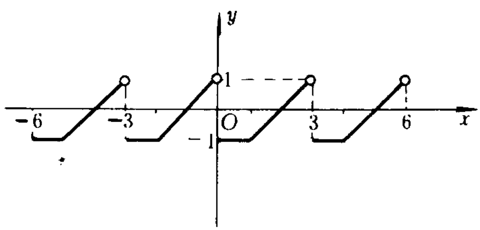


图 1.9

1.4　设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=2f(x)$，并且在 $[0,2]$ 上 $f(x)=x(2-x)$，试写出：

(1) 在 $[2,4]$ 上 $f(x)$ 的表示式；

(2) 在 $[-4,4]$ 上 $f(x)$ 的表示式，并画出图形.

目的与要求：

① 复习二次函数的图形；② 熟悉分段函数的表示法.

解　(1) 在　$f(x+2)=2f(x)$ 中，令 $x+2=t$. 得

$$f(t)=2f(t-2)$$

或写作　$$f(x)=2f(x-2) \qquad ①$$

又已知，$x\in[0,2]$ 时，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$f(x)=x(2-x) \qquad ②$$

当 $x\in[2,4]$ 时，$(x-2)\in[0,2]$，将 ② 式中 x 换成 $(x-2)$ 代入 ①，就得到在 $[2,4]$ 上 $f(x)$ 的表示式：

$$f(x)=2f(x-2)=2(x-2)(4-x).$$

(2) 同理，当 $x\in[-2,0]$ 时，$(x+2)\in[0,2]$. 这时，

$$f(x)=\frac{1}{2}f(x+2)=\frac{1}{2}(x+2)(-x).$$

按同样方法分析 $[-4,-2]$ 上 $f(x)$ 的表示式.

最后可得

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}(x+4)(-2-x), & -4\leqslant x<-2\\ \frac{1}{2}(x+2)(-x), & -2\leqslant x<0\\ x(2-x), & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 2(x-2)(4-x), & 2<x\leqslant 4.\end{cases}$$

在 $[-4,4]$ 上 $f(x)$ 的图形，见图 1.10.

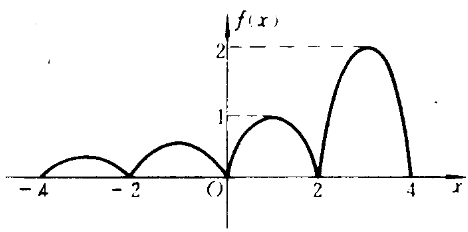


图 1.10

1.5 试构造一个函数 $f(x)$，使其满足：

(1) 它在 $(0,\frac{2}{3}]$ 上是增加的，在 $(\frac{2}{3},1]$ 上是减小的；

(2) 它是以 1 为周期的周期函数.

目的与要求：

① 熟悉函数的增减性和周期性的性质；

② 本题灵活性很大，能培养学生的思维能力，给学生以创造的机会，激发学生的学习热情.

此题的解答显然是很多的，可根据情况，引导讨论、比较，逐步将问题引向深入.

解 无论构造怎样的函数，都应先写出在$(0,1]$上$f(x)$的表示式，再根据周期性有$f(x)=f(x+1)$，写出$(-\infty,+\infty)$上$f(x)$的表示式.

如在$(0,1]$上选函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant\dfrac{2}{3},\\ -x, & \dfrac{2}{3}<x\leqslant 1.\end{cases}\qquad\text{(图 1.11)}$$

则 $$f(x)=\begin{cases}x+k, & -k<x\leqslant\dfrac{2}{3}-k,\\ -(x+k), & \dfrac{2}{3}-k<x\leqslant 1-k\end{cases}\quad(k\text{ 为整数});$$

又如，在$(0,1]$上选函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant\dfrac{2}{3},\\ \dfrac{4}{3}-x, & \dfrac{2}{3}<x\leqslant 1.\end{cases}\qquad\text{(图 1.12)}$$

则 $$f(x)=\begin{cases}x+k, & -k<x\leqslant\dfrac{2}{3}-k,\\ \dfrac{4}{3}-(x+k), & \dfrac{2}{3}-k<x\leqslant 1-k\end{cases}\quad(k\text{ 为整数});$$

还可以选

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant\dfrac{2}{3},\\ 2(1-x), & \dfrac{2}{3}<x\leqslant 1.\end{cases}\qquad\text{(图 1.13)}$$

或选

$$f(x)=\begin{cases}1-\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2, & 0<x<1,\\ \dfrac{5}{9}\ , & x=1.\end{cases}\quad (图 1.14)$$

等等.

说明:

① 端点处是否用等号,这要满足周期性的要求.

② 这里的例是为说明在 $x=\dfrac{2}{3}-k$ 和 $x=-k$ 处的不同情况.

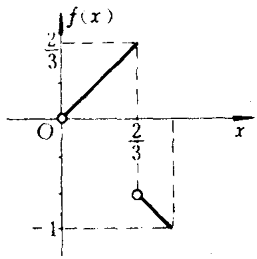


图 1.11

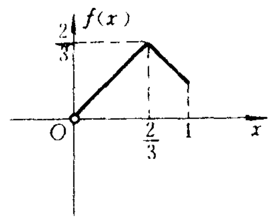


图 1.12

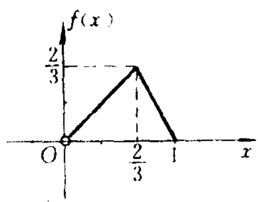


图 1.13

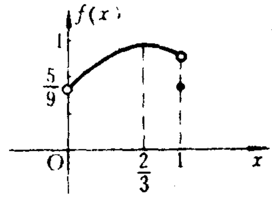


图 1.14

教师在备课时,应构思得丰富一些,有意识地安排一些可以引伸的问题.这样,可以活跃学生的思想.引起学习的兴趣.

在这里,让学生思考、对比:怎样的函数简单?从图形观察,在 $x=\dfrac{2}{3}$ 附近,曲线是"断开"的还是"连接"的?如果是"连接"的,再看是"尖角"还是"圆角"?可让学生知道,这些不同的情况,以后是要研究的.但这里不提连续与可导的概念,以免冲淡重点.

二、参 考 题

1.6 假设由方程 $x^2 - \arccos y = \pi$ 确定 $y = y(x)$，试将 $y(x)$ 写成显函数的形式，并指出其定义域.

目的与要求：

了解隐函数概念.

解 由 $\arccos y = x^2 - \pi$ 得显函数

$$y = \cos(x^2 - \pi).$$

因为它是由原方程决定的，并且 $0 \leqslant \arccos y \leqslant \pi$，

所以 $$0 \leqslant x^2 - \pi \leqslant \pi,$$

由此得函数的定义域是 $\sqrt{\pi} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{2\pi}$.

1.7 设 $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

分别作出当 $a = 0,1,2$ 时函数 $y = f(x) \cdot f(a - x)$ 的图形.

目的与要求：

加深理解函数概念，掌握分段函数的作图方法.

解 注意到 $f(x)$ 和 $f(a - x)$ 中至少有一个为零时，则 $y = 0$.

(1) 先作出 $y = f(x)$ 的图形(图 1.15)

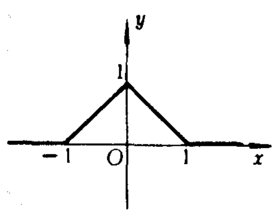


图 1.15

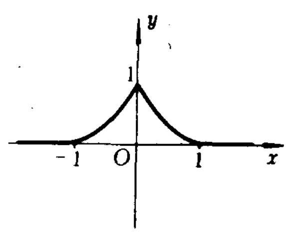


图 1.16

(2) 当 $a = 0$ 时，$y = f(x)f(-x) = [f(x)]^2$，是偶函数.

$x \geqslant 0$ 时，$y = \begin{cases} (1 - x)^2, & x \leqslant 1. \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

其图形如图 1.16 所示.

(3) 当 $a=1$ 时， $y=f(x)\cdot f(1-x)$，

由 $|x|>1$ 时 $f(x)=0$ 知

$x<0$ 或 $x>2$ 时，$f(1-x)=0$.

所以，在 $x<0$ 或 $x>1$ 时，$y=0$. 故只需找出 $y=f(x)\cdot f(1-x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的表示式.

当 $x\in[0,1]$ 时，$(1-x)$ 也属于$[0,1]$，所以

$$f(x)=1-x,\quad f(1-x)=1-(1-x)=x,$$

由此得

$$y=f(x)\cdot f(1-x)=(1-x)x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}.$$

其图形如图 1.17 所示.

(4) 当 $a=2$ 时， $y=f(x)\cdot f(2-x)$，

由以上分析知道，这时 $y\equiv 0$. 其图形如图 1.18 所示.

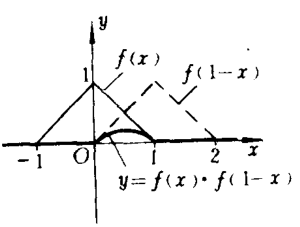


图 1.17

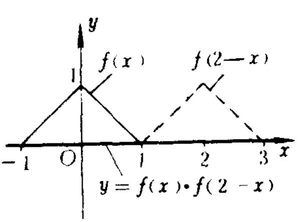


图 1.18

1.8 求下列函数的反函数：

(1) $y=\dfrac{2^x}{1+2^x}$；　　(2) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

目的与要求：

了解反函数概念，会确定反函数的定义域.

解 (1) 由 $y=\dfrac{2^x}{1+2^x}$ 得

$$2^x=\frac{y}{1-y}，即\quad x=\log_2\frac{y}{1-y},$$

所以反函数为

$$y = \log_2 \frac{x}{1-x}\quad,\quad 0 < x < 1.$$

(2) 由 $y = \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ 得

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos y\ ,\quad 即\quad x^2 = \frac{1-\cos y}{1+\cos y},$$

所以反函数为

$$y = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \pm\ \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\ ,\quad 0 \leqslant x < \pi.$$

1.9 一列火车以初速度 v_0、等加速度 a 出站，当速度达到 v_1 后，火车按等速运动前进；从出站经过 T 时间后，又以等减速度 $2a$ 进站，直至停止.

(1) 写出火车速度 v 与时间 t 的函数关系式；

(2) 作出函数 $v = v(t)$ 的图形.

目的与要求：

列出实际问题的函数关系式.

解 (1) 物体作等加速运动时，$v(t) = v_0 + at$.

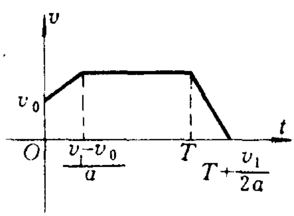


图 1.19

$$所以\quad v(t) = \begin{cases} v_0 + at\ , & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{v_1 - v_0}{a}, \\ v_1\ , & \dfrac{v_1 - v_0}{a} < t \leqslant T, \\ v_1 - 2a(t-T), & T < t \leqslant T + \dfrac{v_1}{2a}. \end{cases}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com