浅谈高次方程

张远达 编著

TAN GAOCIFANGCHENG

湖北教育出版社

浅谈高次方程

张远达 编著

湖北教育出版社

浅谈高次方程
张远达编著
*
湖北教育出版社出版　湖北省新华书店发行
鄂城县印刷厂印刷
787×1092毫米32开本　6.375印张　145,000字
1983年8月第1版　1983年8月第1次印刷
印数：1—18,400
统一书号：7306·22　定价：0.54元

写 在 前 面

十九世纪以前，研究代数学的目的就是要求出一元高次方程的根，这就是所谓方程式论的理论．尽管现在代数学研究的课题是研究各种代数的结构，但求一元高次方程的根在许多实际问题中还是经常碰到的．然现在中学数学教学大纲里对这部分的内容可以说基本上没有，而在大学里也不讲，这是令人费解的．

本书编写的意图有三：一是让中学生在课外读物中对如何解一元高次方程有所理解，根据各人学习的情况有所选择地加深加宽自己的知识面；二是让中学数学教师比较系统地理解这个古典的代数学科．教或不教是一回事，当教师的能否系统地掌握又是另一回事，决不能说因为现在不教就不需要系统地掌握它．只有站得高才看得远．所以，为提高中学数学教学质量，为中学生和中学教师写点参考读物责无旁贷；三是让大学数学系的学生也明了代数学这个学科历史演变的过程，开阔视野，以利深造．

由于个人学识不够，教学经验不多，能否适应读者的要求，没有把握，希望读者批评指正．

张远达

于武汉大学

目　　录

第一章 复 数

假定读者对实数的基本性质和运算是熟悉的．因为后面经常要用到复数，所以特地在本书的第一章来介绍它．我们假定读者对复数的意义及它的加、减运算法则都已经熟知，这一章只着重谈复数的乘、除、乘方及开方这几种运算．

§1. 复数的乘、除及乘方

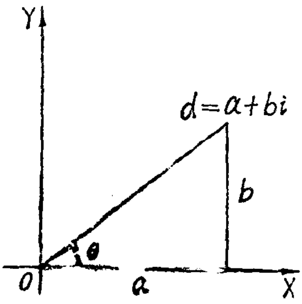
我们知道：任意一个复数 $\alpha=a+bi$ 可以表写为三角函数的表达式，如 $\alpha=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$r$ 叫做复数 α 的模或绝对值，θ 叫做复数 α 的幅角．复数 α 的模 r 与幅角 θ 和它的实部 a 与虚部 b 间的关系是：

(1) $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 与 $\theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{a}$,

或

(2) $a=r\cos\theta$ 与 $b=r\sin\theta$.

但(1)式表示有了 $\alpha=a+bi$ 以后怎样去求它的模 r 与幅角 θ，而(2)式表示已知模 r 及幅角 θ 以后怎样去求这复数的实部 a 与虚部 b．总之，(1)与(2)都是表示复数 α 的实部、虚部、与它的模及幅角间的换算公式．由图1很容易验证(1)式与(2)式．要注意的是：有了 a 与 b 之后由公式(1)去求幅角 θ 时应考虑 θ 在哪个象限里面（例如当 a 与 b 都是负数时，虽 $\frac{b}{a}>0$，



(图 1—1)

但由$\theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{a}$所确定的$\theta$应取在第三象限内；而当$a>0$，$b<0$时，虽$\dfrac{b}{a}<0$，但$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{b}{a}$之$\theta$应取在第四象限内；等等）. 并且还应注意的是：给定复数$\alpha=a+bi$以后，它的模$r=\sqrt{a^2+b^2}$虽唯一地确定，但幅角θ却非唯一的，一般有无限多个，而任二个幅角的差必是2π的倍数，即$\alpha=r[\cos(\theta+2n\pi)+i\sin(\theta+2n\pi)]$. 因此，通常将一个复数$\alpha$表写为三角表示式时，例如$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则幅角$\theta$可在无限多个可取值中得任意选取. 复数$\alpha=a+bi$的模通常又记为$|\alpha|$，而幅角$\theta$可记为$\arg\alpha$，即$|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2}$，$\theta=\arg\alpha$.

有了这些预备知识，就可以讨论复数的乘、除及乘方.

设$\alpha_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$与$\alpha_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$为两个已与的复数，则$\alpha_1\alpha_2=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$. 这就是说：**两个复数之积的模等于各个复数之模的积**（简曰积的模等于模的积），**而积的幅角等于各幅角的和**（简曰积之幅角为幅角之和，或较确切地说，积之幅角与各幅角之和相差2π的整数倍）. 再用数学归纳法易知这结论对多个复数之积也是成立的.

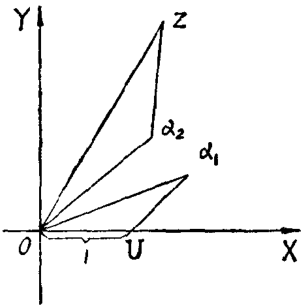
又因 $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}=\dfrac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$

$$=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)[\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2)]}{r_2}$$

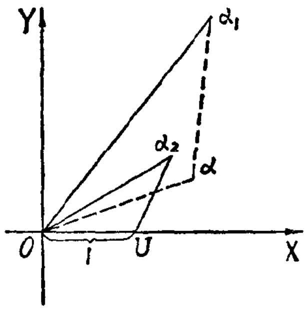
$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)],$$

这就是说：**二个复数之商的模等于被除数的模除以除数的模，而商之幅角等于被除数之幅角减去除数之幅角或再相差2π的整数倍（简称商的模等于模的商，商的幅角为幅角的差）.**

由复数之积与商的这样两个性质(或结论)，很容易用几何的语言来解释之，分述于下.



（图 1—2）



（图 1—3）

如图1—2，令已与的二个复数α_1，α_2在复平面上对应的点仍各记为α_1，α_2；再在OX上取单位点U，即$OU=1$，并作$\triangle OU\alpha_1$. 再以$O\alpha_2(=r_2)$为边作一个$\triangle O\alpha_2z$，使$\triangle O\alpha_2z\backsim\triangle OU\alpha_1$且在相似的位置（即边$O\alpha_2$，$\alpha_2z$，$Oz$分别对应于边$OU$，$U\alpha_1$，$O\alpha_1$）. 于是容易获知$z=\alpha_1\alpha_2$.

同理，如图1—3，欲求$\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$，就首先作$\triangle OU\alpha_2$（这里$OU$

$=1$)，再作 $\triangle Oa_1a \backsim \triangle Oa_2U$ 且在相似的位置；于是也不难验证 $a=\frac{a_1}{a_2}$.

由复数之积的模及幅角与各因子之模及幅角间的关系，容易导出一个复数的 n 乘方(n 为正整数)的公式：由 $a=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，而利用积的模等于模的积以及积之幅角等于各幅角之和的道理，即得 $a^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，故不得不有

(3) $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$.

公式(3)通常叫做复数的棣莫弗公式或棣莫弗(De Moivre)定理.

又当 k 为正整数时，因 $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-k}=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^k}$，故利用公式(3)知 $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-k}=\frac{1}{\cos k\theta+i\sin k\theta}=\cos k\theta-i\sin k\theta=\cos(-k)\theta+i\sin(-k)\theta$，这无异乎是说公式(3)对负整数 n 也成立．又由于 $\cos 0\theta+i\sin 0\theta=\cos 0+i\sin 0=1$ 及定义 $(\cos\theta+i\sin\theta)^0=1$，可知公式(3)中 $n=0$ 时也成立．故证得了(3)式恒成立，不论 n 是任何的整数(正、负、或零)．由是不论 n 为任何整数，又有

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta-i\sin\theta)^n &= [\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^n \\
&= \cos n(-\theta)+i\sin n(-\theta) \\
&= \cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)=\cos n\theta-i\sin n\theta,
\end{aligned}
$$

故又得次公式：

(3)′ $(\cos\theta-i\sin\theta)^n=\cos n\theta-i\sin n\theta$,

但 n 为任何的整数(正、负或零).

利用 De Moivre 公式，可以证明三角函数中的许多公式．今列举若干例子来说明.

例 1 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$, $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$.

事实上，由二项式定理及棣莫弗公式，可知

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$$
$$= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\cdot\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\cdot\sin\theta - \sin^3\theta).$$

故比较左右两端的实部与虚部，即得：

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\cdot\sin^2\theta\\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\cdot(1-\cos^2\theta)\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= 3\cos^2\theta\cdot\sin\theta - \sin^3\theta\\ &= 3(1-\sin^2\theta)\cdot\sin\theta - \sin^3\theta\\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.\end{aligned}$$

例 2 $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots = 2^{n/2}\cdot\cos\dfrac{n\pi}{4}$,

$$n - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \cdots = 2^{n/2}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}.$$

若象通常证明代数恒等式的那样，想直接计算 $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots$，而看计算的结果是否为 $2^{n/2}\cdot\cos\dfrac{n\pi}{4}$，那就太困难了．如果利用复数，先看看上两个式子的右端，就发现它们都与 n 有关系，并去掉 n 后就分别变为 $\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}$ 与 $\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}$，它们恰好是复数 $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 + i$ 的实部与虚部，于是自然会想到 $(1+i)^n$ 的展开式．故利用棣莫弗公式及二项式定理，就有

$$2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$
$$= \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$
$$= (1+i)^n$$
$$= (1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots) + i(n - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \cdots),$$

再比较实部与虚部即得所求.

例 3 证明 $\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta$

$$=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

与 $\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta=\dfrac{\sin\frac{n\theta}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$.

证：先直接用三角函数的公式. 为简单计，令

$$S=\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta.$$

根据题意的要求，自然会想到要计算 $S\cdot\sin\frac{\theta}{2}$，而实际上有

$$\begin{aligned}2S\cdot\sin\frac{\theta}{2}&=2\cos\theta\cdot\sin\frac{\theta}{2}+2\cos 2\theta\cdot\sin\frac{\theta}{2}+2\cos 3\theta\cdot\sin\frac{\theta}{2}+\\&\quad\cdots+2\cos n\theta\cdot\sin\frac{\theta}{2}\\&=\left[\sin(3\theta/2)-\sin\frac{\theta}{2}\right]+\left[\sin\frac{5\theta}{2}-\sin\frac{3\theta}{2}\right]\\&\quad+\left[\sin\frac{7\theta}{2}-\sin\frac{5\theta}{2}\right]+\cdots\\&\quad+\left[\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}-\sin\frac{(2n-1)\theta}{2}\right]\\&=\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\\&=2\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2},\end{aligned}$$

即 $S=\dfrac{\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\cdot\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$. 同理，可证第二个式子.

象刚才那样直接用"和差化积"与"积化和差"的公式去验证，是符合人们的思想方法的．可是如果把问题改变一下，不是要证明上面的两个三角恒等式，而是不知道右端的结果，想直接求和 $S=\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta$，那末究竟怎样下手呢？如果仍然将 S 乘以 $2\sin\frac{\theta}{2}$，象刚才做过的那样，利用"积化和差"与"和差化积"，固然可得到结果是 $S=\sin\frac{n\theta}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\Big/\sin\frac{\theta}{2}$，但问题是为什么要将所求的和 S 先用 $2\sin\frac{\theta}{2}$ 去乘呢？是怎样想出来的呢？我们难以回答．这就显露了用 $2\sin\frac{\theta}{2}$ 去乘 $S=\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta$ 是一种技巧．我们不主张强调技巧，而来采用下面的思路．

令 $S=\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta$，$S_1=\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$．由于一下子就可看出 $\cos k\theta$ 与 $\sin k\theta$ 为复数 $(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$ 的实部与虚部，于是若令 $\rho=\cos\theta+i\sin\theta$，则

$$\begin{aligned}\rho+\rho^2+\rho^3+\cdots+\rho^n&=\sum_{k=1}^{n}(\cos\theta+i\sin\theta)^k\\&=\sum_{k=1}^{n}(\cos k\theta+i\sin k\theta)\\&=S+iS_1;\end{aligned}$$

但另一方面又有

$$\rho+\rho^2+\rho^3+\cdots+\rho^n=\begin{cases}n, & \text{当 } \rho=1\text{（即 }\theta=2m\pi\text{）时,}\\ \dfrac{\rho(\rho^n-1)}{\rho-1}, & \text{当 } \rho\neq1\text{（即}\theta\neq2m\pi\text{）时.}\end{cases}$$

然在 $\theta\neq 2m\pi$ 时，又有

$$\frac{\rho(\rho^n-1)}{\rho-1}=\frac{\rho^{n+1}-\rho}{\rho-1}$$

$$=\frac{\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta-\cos\theta-i\sin\theta}{(\cos\theta-1)+i\sin\theta}$$

$$=\frac{2i\sin\frac{n\theta}{2}\left[\cos\frac{(n+2)\theta}{2}+i\sin\frac{(n+2)\theta}{2}\right]}{(\cos\theta-1)+i\sin\theta}$$

$$=\frac{2i\sin\frac{n\theta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{n+2}}{2i\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{n+1}$$

$$=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\left(\cos\frac{(n+1)\theta}{2}+i\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\right),$$

于是两相比较，得

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

与 $$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

例 4 求 $\left(\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}\right)^n$.

解： $\left(\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}\right)^n$

$$= \frac{\left[2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]^n}{\left[2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]^n}$$

$$= \frac{\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}}{\cos\frac{n\theta}{2}-i\sin\frac{n\theta}{2}}$$

$$= \left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)^2$$

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

由上述的例 1—4，可知三角函数中许多公式大都可以利用复数的棣莫弗公式来解决．

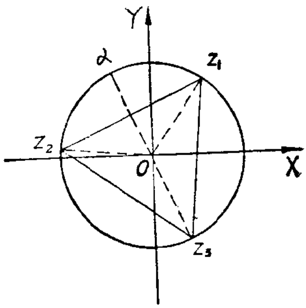
再者利用复数的加、减法之几何解释，也可以解决一些有意义的问题．今举二例说明之．

例 5 圆上三点 z_1，z_2，z_3 组成一个正三角形的充要条件是三复数之和 $z_1+z_2+z_3=0$．

证明：首先注意两复数之和等于零的几何意义是它们在复平面上表示的点关于原点为对称的．

条件的必要性易证．如图 1—4，因圆上的三点 z_1，z_2，z_3 组成的 $\triangle z_1z_2z_3$ 是正三角形，故中心角

$$\angle z_1Oz_2 = \angle z_1Oz_3 = \angle z_2Oz_3 = \frac{2\pi}{3}.$$



(图 1—4)

由于以 Oz_1，Oz_2 为边所作的

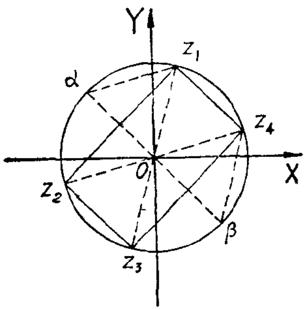
平行四边形 $Oz_1\alpha z_2$ 为菱形（$\because Oz_1=Oz_2$）且 $\angle z_1Oz_2=\frac{2\pi}{3}$，

故由 $O\alpha$ 平分 $\angle z_1Oz_2$ 即知 $\angle z_1O\alpha=\frac{\pi}{3}$，因而 $\angle z_3O\alpha=\angle z_1Oz_3+\angle z_1O\alpha=\pi$，即三点 α，O，z_3 共线；并由 $O\alpha=Oz_1$（$\because$ $\triangle Oz_1\alpha$ 必是正三角形）$=Oz_3$ 又知 α 与 z_3 关于原点 O 对称，故 $\alpha+z_3=0$，于是再由 $\alpha=z_1+z_2$，即知 $z_1+z_2+z_3=0$.

条件的充分性也不难证．事实上，设圆上三点 z_1，z_2，z_3 已有关系式 $z_1+z_2+z_3=0$，于是若令复数 $\alpha=z_1+z_2$，则 $\alpha+z_3=0$，即点 α 与点 z_3 关于原点 O 对称，因之 $O\alpha=Oz_3$，说明点 α 在圆上．因之菱形 $Oz_1\alpha z_2$ 的对角线 $O\alpha$ 均分这菱形为两个正三角形，随而应有 $\angle z_1Oz_2=\frac{2\pi}{3}$．同样 $\angle z_1Oz_3=\angle z_2Oz_3=\frac{2\pi}{3}$．故 $\triangle z_1z_2z_3$ 是正三角形.

例 6　圆上四点 z_1，z_2，z_3，z_4 组成矩形 $z_1z_2z_3z_4$ 的充要条件是四个复数之和 $z_1+z_2+z_3+z_4=0$.

证明：如图 1—5，若已知 $z_1z_2z_3z_4$ 为矩形，则 $\angle z_1z_2z_3=\frac{\pi}{2}$，故 z_1z_3 为圆之直径，即 z_1 与 z_3 关于原点 O 对称，因之 $z_1+z_3=0$.



（图　1—5）

同理，$z_2+z_4=0$.

于是有　$z_1+z_2+z_3+z_4=0$.

反之，若已知有 $z_1+z_2+z_3+z_4=0$，则当令 $\alpha=z_1+z_2$，$\beta=z_3+z_4$ 时，就

有 $\alpha+\beta=0$，即点 α 与点 β 关于原点 O 对称，不得不有 $O\alpha=O\beta$. 然 $\alpha=z_1+z_2$ 以及 $Oz_1=Oz_2$（=圆之半径）就说明了 $Oz_1\alpha z_2$ 为菱形，故 $\alpha z_1=Oz_1$；同理，$\beta z_4=Oz_4$. 于是 $\alpha z_1=Oz_1=Oz_4=\beta z_4$，$\triangle\alpha Oz_1\cong\triangle\beta Oz_4$，不得不有 $\angle z_2O\alpha=\angle\alpha Oz_1=\angle\beta Oz_4=\angle z_3O\beta$，故再据 α, O, β 共线即得 $\angle z_1Oz_4=\angle z_2Oz_3$. 同理，再令 $\gamma=z_1+z_4$，$\delta=z_2+z_3$ 时，从 $\gamma+\delta=0$ 又可得知 $\angle z_1Oz_2=\angle z_3Oz_4$. 于是，$\angle z_1Oz_2+\angle z_1Oz_4=\pi$，即 z_2, O, z_4 共线，也就是说 z_2z_4 为圆之直径. 同样，z_1z_3 也是圆的直径. 故 $z_1z_2z_3z_4$ 是矩形.

§2. 复数的开方

复数的乘、除及乘方在上节里讲了. 这节的任务就是解决复数的开方问题，也就是说，给定了一个复数 $\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ (\neq 0)$——于是 $r\neq 0$，问有没有一复数 z 使 $z^n=\alpha$（n 为一正整数），如有又有多少，且怎样去找. 象这样的 z 叫做 α 的 **n 次幂根**（或 **n 次方根**）.

如果上述的 z 存在，令 $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，则从 $z^n=\alpha$ 就有 $\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，故由于一复数之模的唯一性及幅角之相差 2π 的整倍，就不得不有

$$\rho^n=r \qquad 与 \qquad n\varphi=\theta+2k\pi.$$

因 $\rho>0$，故 $\rho=\sqrt[n]{r}$ 为 r 的 n 次算术根，而有

$$z=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right). \tag{4}$$

这说明了：给定 $\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)\neq 0$ 后，若有 z 使 $z^n=\alpha$，则 z 必为(4)之形状.

反之，利用棣莫弗公式(3)，又易验证凡形为(4)之 z 确为