线性代数

大学数学教材

线性代数

郑州大学系统科学与数学系

王长群　赵振云
李梦如　熊胜利　编

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/郑州大学系统科学与数学系 王长群等 编. —北京:高等教育出版社;海德堡:施普林格出版社,2001
非数学类各专业本科生用
ISBN 7-04-010329-X

Ⅰ.线… Ⅱ.①王… ②赵… Ⅲ.线性代数-高等学校教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 058459 号

责任编辑:徐 可 **封面设计**:王凌波
版式设计:杨 明 **责任印制**:陈伟光

线性代数
王长群 赵振云 李梦如 熊胜利 编

出版发行	高等教育出版社 施普林格出版社		
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**邮政编码**	100009
电 话	010-64054588	**传 真**	010-64014048
网 址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京民族印刷厂		

开 本	787×960 1/16	**版 次**	2001 年 9 月第 1 版
印 张	14.75	**印 次**	2001 年 9 月第 1 次印刷
字 数	280 000	**定 价**	16.00 元

前　言

本书是为大学非数学理工科各专业和文科部分专业编写的教材.主要内容如下:第1章介绍了向量代数及向量在3维几何空间中直线、平面方程上的应用,并且为下面的 n 维向量空间 P^n 中的讨论做了一些铺垫;第2、3、4、5、6章是线性代数的基本内容,分别讨论了行列式的计算、矩阵的运算、求解线性方程组以及 n 维向量空间 P^n 的性质、二次型、特征值理论.矩阵作为一个重要的研究对象和研究工具一直贯穿全书,同学们必须熟练掌握,尤其是对矩阵的三个标准形:等价标准形、相似标准形和合同标准形;第7章和第8章介绍了线性空间和线性变换,这也是线性代数的基本研究对象,通过对这两章的学习,同学们会对矩阵的相似有更深刻的理解;最后第9章简要介绍了抽象代数中群、环、域的基本概念,进一步开拓同学们的视野,作为选学内容.

讲授本书大约需要60多个学时(不包括第9章).考虑到双休日以及新生军训的因素,如果学时不够,教师可以根据情况适当取舍,但是我们认为至少要学完前六章,并且要了解线性空间和线性变换的基本概念.书中附录的内容可以让同学们自己阅读,本书最后有部分习题答案、提示,供大家参考.我们强调指出,同学们在做习题时必须独立解答而不能先看答案,这样才能达到巩固所学知识的目的.

在本书的编写过程中,得到了郑州大学教务处和数学系领导的鼓励和支持,也得到了数学系众多老师的帮助.在本书初稿试用的几年中,许多教师都对其中的错误加以指正,并提出了宝贵的修改意见.在此,我们对他们的支持和帮助表示衷心的感谢.本书可能还会有错误和不足之处,恳请各位专家和使用本书作为教材的教师们指正.

王长群

2001年8月20日

目　录

第 0 章　预备知识

数　域

人们在认识自然界的过程中,最先接触到的数是自然数(正整数),随后,人们又认识到"零"、负整数,从而建立了整数系的概念.整数集合对于数的加法、减法、乘法都是封闭的,即对任意两个整数的和、差、积仍为一个整数.但是两个整数的商(除数不为 0) 却未必是整数.于是,人们又引入了有理数的概念.任意两个有理数的和、差、积、商(除数不为零) 仍然是一个有理数.随后引入实数、复数的概念.所得到的数集(分别叫实数集、复数集) 也具有类似的性质.通常,我们分别用 $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ 表示自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集.

设 P 为复数集 $\mathbf{C}$ 的一个子集合,如果对 P 中任意两个数作某种运算,其结果仍在 P 中,则称 P 对该运算**封闭**.显然,有理数集 $\mathbf{Q}$,实数域 $\mathbf{R}$,复数集 $\mathbf{C}$ 对加、减、乘、除(除数不为 0) 都是封闭的;整数集 $\mathbf{Z}$ 对加、减、乘法运算封闭,但对除法(除数不为 0) 却不封闭.

下面我们引入数域的概念.

设 P 为复数集 $\mathbf{C}$ 的子集,且 $0,1 \in P$.如果 P 对加法、减法、乘法、除法(除数不为 0) 都是封闭的,则称 P 为一个**数域**.

显然,有理数集 $\mathbf{Q}$,实数集 $\mathbf{R}$,复数集 $\mathbf{C}$ 都是数域,而整数集、无理数集则不构成数域.(为什么?)

例 1　证明 $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ 是一个数域.

证明　因为 $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$, $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2}$, 所以 $0,1 \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})$.容易看出, $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 对于加法、减法是封闭的.

设 $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$,则

$$\begin{aligned}&(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})\\ &= (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2}),\end{aligned}$$

所以 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 对于乘法是封闭的.

又设 $a + b\sqrt{2} \neq 0$,则 $a - b\sqrt{2} \neq 0$(为什么?),于是

$$\frac{c + d\sqrt{2}}{a + b\sqrt{2}} = \frac{(c + d\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})}$$

$$=\frac{ac+2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\cdot\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}).$$

即 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 对于除法(除数不等于 0) 也是封闭的,所以它是一个数域. □

定理　任意一个数域 P 都包含有理数域 $\mathbf{Q}$,因此有理数域 $\mathbf{Q}$ 是最小的数域.

证明　设 P 为任意数域,则 $0,1\in P$. 因为 P 对加法运算封闭,所以有任意正整数 n,有

$$n=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ 个}}\in P.$$

又因为 P 对减法封闭,所以 $-n=0-n\in P$. 因此 P 包含整数集 $\mathbf{Z}$. 由于任意一个有理数 $a\in\mathbf{Q}$ 都可以写成 $\frac{m}{n}(m,n\in\mathbf{Z},n\neq 0)$ 的形式,依数域 P 对除法(除数不为 0) 的封闭性可知 $a\in P$,所以 $\mathbf{Q}\subseteq P$. □

习题 0.1

1. 讨论 $P_1=\{$全体奇数$\}$, $P_2=\{n\pi\mid n\in\mathbf{Z}\}$, $P_3=\{n\mathrm{i}\mid n\in\mathbf{Z},\mathrm{i}$ 为虚数单位$\}$, $P_4=\{a\mathrm{i}\mid a\in\mathbf{Q},\mathrm{i}$ 为虚数单位$\}$ 是否构成数域?为什么?

2. 证明:$\mathbf{Q}(\mathrm{i})=\{a+b\mathrm{i},a,b\in\mathbf{Q}\}$ 构成一个数域.

3. 证明:数域 $\mathbf{Q}(\mathrm{i})=\{a+b\mathrm{i},a,b\in\mathbf{Q}\}$ 不包含除 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{Q}(\mathrm{i})$ 以外的其它数域.(提示:设 P 为包含在 $\mathbf{Q}(\mathrm{i})$ 中一个数域,$P\neq\mathbf{Q}$,证明 $P=\mathbf{Q}(\mathrm{i})$).

二、三阶行列式

中学已经学过二元、三元线性方程组. 设:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2.\end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,其一般解为:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\\[2ex]x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.\end{cases}$$

引入符号 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,称为**二阶行列式**,并令

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1,$$

于是其解可表示为:

$$x_1 = D_1/D, \quad x_2 = D_2/D.$$

同样,在解三元一次线方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

中,引入符号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为**三阶行列式**,并令

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当 $D \neq 0$,则其解可表示为:$x_1 = D_1/D$, $x_2 = D_2/D$, $x_3 = D_3/D$(证明留作习题).

例 2 求解二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 = 11. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 11 = 21,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 22 - 15 = 7,$$

于是

$$x_1 = D_1/D = 21/7 = 3, \quad x_2 = D_2/D = 7/7 = 1. \qquad \square$$

例 3 求解三元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -6, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$$

解　$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 27, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 3 \\ -6 & -2 & -1 \\ 12 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 27,$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -6 & -1 \\ 4 & 12 & 2 \end{vmatrix} = 54, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 1 & -2 & -6 \\ 4 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 81,$$

于是

$$x_1 = D_1/D = 27/27 = 1,$$
$$x_2 = D_2/D = 54/27 = 2,$$
$$x_3 = D_3/D = 81/27 = 3.$$
□

通过二元、三元线性方程组的求解公式可以看出:x_i 是两个行列式的商 D_i/D,其中 D 是由方程组未知量的系数组成的行列式,D_i 是把D 的第 i 列换成常数列而得到的行列式.在第 2 章中,我们将把这个结论推广到一般 n 元线性方程组.

习题 0.2

1. 对于三元一次方程组,当 $D \neq 0$ 时,证明课文中的求解公式.

2. 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

3. 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

第 1 章　向量代数、空间中直线与平面

物理学、力学、工程学、经济理论等学科以及数学本身都要用到向量的思想方法.本章将介绍向量的基本概念及其代数运算,并用向量来讨论空间中的平面与直线. §1.1 ~ §1.5 是向量代数的基本内容,包括了向量的概念及其代数运算;§1.6 和 §1.7 应用向量的方法去研究空间的平面与直线的方程.

§1.1　空间直角坐标系

我们由高中平面解析几何知道,建立平面直角坐标系后,平面中的点 P 可以与二元有序实数组(x,y)建立一一对应.于是我们可以用代数的方法去研究直线、曲线等平面几何问题.类似地我们可以在空间中建立直角坐标系,用同样的方法去研究空间中平面、直线、曲面、曲线等问题.

在空间中任意取定一点 O,过 O 作三条两两互相垂直且取定方向的直线 Ox,Oy,Oz,并取一个线段作为长度单位.这样三条有向直线 Ox,Oy,Oz 在取 O 为坐标原点后都成为数轴(即直线上点与全体实数成为一一对应).用这样三条有公共原点 O 的两两互相垂直的数轴 Ox,Oy,Oz 就建立了一个空间直角坐标系(如图 1.1 所示),记作$\{O;x,y,z\}$,点 O 称为坐标系的**原点**,Ox,Oy,Oz 称为**坐标轴**,依次称为 x **轴**,y **轴**,z **轴**;由两个坐标轴所决定的平面称为**坐标平面**(简称

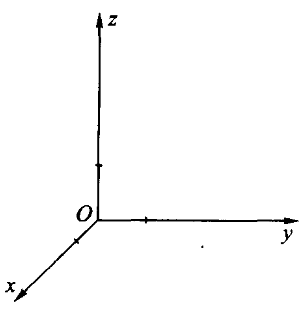

图 1.1

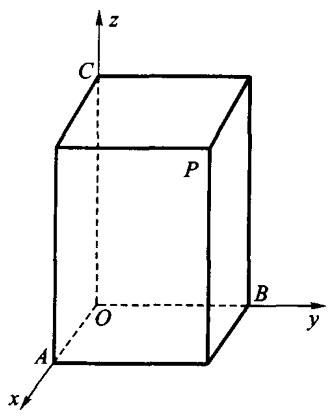

图 1.2

坐标面),依次称为 Oxy 平面,Oyz 平面,Ozx 平面.如果 Ox,Oy,Oz 的顺序符合右手规则,即,右手四指指向 Ox 轴正向,然后握住右手四指指向 Oy 轴正向转,右手大姆指恰好指向 Oz 轴正向,则称该坐标系为**右手系**;否则称之为**左手系**.习惯上,我们建立的坐标系为右手系.三个坐标平面将空间分成八部分,这八个部分叫做**卦限**,分别称为第Ⅰ,第Ⅱ,第Ⅲ,第Ⅳ,第Ⅴ,第Ⅵ,第Ⅶ及第Ⅷ**卦限**.

设 P 为空间中任意一点,过 P 点且分别平行于三个坐标面的三个平面分别交 x 轴于 A 点,交 y 轴于 B 点,交 z 轴于 C 点(如图 1.2).如果 A、B、C 在三个数轴上的坐标分别为 x,y,z,则称有序三元实数组 (x,y,z) 为 P 点的**坐标**.

显见,空间中全部点集合 V_3 与全体有序三元实数组集合 $\mathbf{R}^3$ 有着一一对应关系.即

$$P \xleftrightarrow{1-1} (x,y,z),$$

其中 $P\in V_3,(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$.我们可以把点 P 写为 $P(x,y,z)$,有时把三元实数组 (x,y,z) 看成空间中以 (x,y,z) 为坐标的点.这样,空间的八个卦限可以写成

$$\begin{aligned}
&\text{第 Ⅰ 卦限}\ \{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0\};\\
&\text{第 Ⅱ 卦限}\ \{(x,y,z)\mid x<0,y>0,z>0\};\\
&\text{第 Ⅲ 卦限}\ \{(x,y,z)\mid x<0,y<0,z>0\};\\
&\text{第 Ⅳ 卦限}\ \{(x,y,z)\mid x>0,y<0,z>0\};\\
&\text{第 Ⅴ 卦限}\ \{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z<0\};\\
&\text{第 Ⅵ 卦限}\ \{(x,y,z)\mid x<0,y>0,z<0\};\\
&\text{第 Ⅶ 卦限}\ \{(x,y,z)\mid x<0,y<0,z<0\};\\
&\text{第 Ⅷ 卦限}\ \{(x,y,z)\mid x>0,y<0,z<0\}.
\end{aligned}$$

下面我们研究空间中两点的距离.

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间中任意两点.过 P_1,P_2 分别作平行于三个坐标面的平面,这六个平面围成一个长方体(如图 1.3),而 P_1P_2 恰好是该长方体的对角线.于是有

$$\begin{aligned}
|P_1P_2|^2 &= |P_1M_1|^2+|M_1M_2|^2+|M_2P_2|^2\\
&=(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2+(z_2-z_1)^2,
\end{aligned}$$

故有

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 1　求 $P(-1,2,3)$ 到 z 轴的距离.

解　过 P 作直线 $PM\perp z$ 轴,交 z 轴于 $M(0,0,3)$(如图 1.4),则点 P 到 z 轴的距离为

$$|PM|=\sqrt{(-1-0)^2+(2-0)^2+(3-3)^2}=\sqrt{5}.$$ □

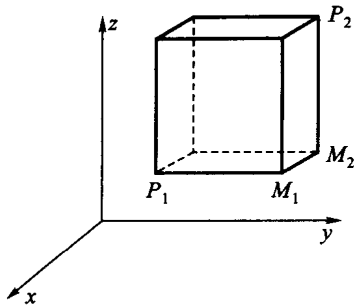

图 1.3

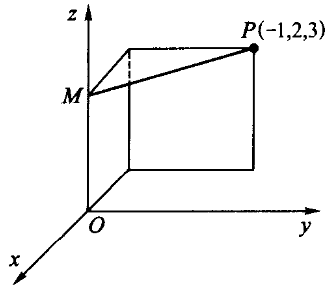

图 1.4

习题 1.1

1. 在空间直角坐标系下,作具有下列坐标的点.

$A_1(1,2,3)$, $A_2(-1,-2,-3)$, $A_3(-1,2,3)$, $A_4(1,-2,3)$, $A_5(1,2,-3)$, $A_6(1,-2,-3)$, $A_7(-1,-2,3)$, $A_8(-1,2,-3)$.

2. 求点 $A(4,-3,5)$ 与原点间的距离,并求 A 到各坐标轴的距离.

§1.2 向量的概念

我们在学习和生活中常见的量有两种.一种量只有大小,如长度、面积、温度、时间、功等,可以用一个实数来表示,这样的量称为**数量**(或**标量**).另一种量既有大小又有方向,如速度、加速度、位移、力等.这样的量称为**向量**(或**矢量**).

向量通常用一个带箭头的有向线段来表示(如图 1.5),箭头的所指方向称为向量的方向,线段 AB 的长度称为向量的长度(或大小或模),称 A 为向量的**起点**,B 为向量的**终点**,记为 $\vec{a}$ 或 $\overrightarrow{AB}$.向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度记为 $|\overrightarrow{AB}|$.若 $|\overrightarrow{AB}|=1$,则称 $\overrightarrow{AB}$ 为**单位向量(幺矢)**.长度为 0 的向量叫**零向量**,记为 $\vec{0}$ 或 $\mathbf{0}$.需要注意,零向量且仅有零向量的方向不定.

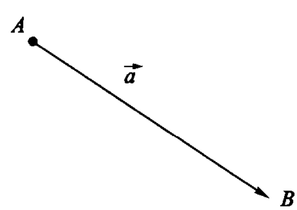

图 1.5

设 $\vec{a}$ 为向量,与 $\vec{a}$ 长度相同而方向相反的向量称为 $\vec{a}$ 的**负向量**(或**相反向量**),记作 $-\vec{a}$.

设 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为两个向量,若它们长度相等且方向相同,则称 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ **相等**,记 $\vec{a}=\vec{b}$.因此我们这里所定义向量相等与向量的起点、终点无关,也就是说,向量是可以平

行移动的. 在这种意义下,向量又称为**自由向量**. 在研究一组向量之间的关系时,我们可以把它们都平行移动到同一个起点上. 这时如果它们是共线(或共面)的,则称这组向量是**共线(共面)**的. 共线向量又称为**平行向量**. 若 $\vec{a},\vec{b}$ 为平行向量,则可记为 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$. 特别地,我们规定零向量与任意向量都平行.

习题 1.2

1. 在平行四边形 $ABCD$ 中,向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AD}$ 中,哪些是相等的向量?哪些是相反的向量?哪些是共面向量?哪些是共线向量?

2. 以单位圆的圆心为始点,以单位圆上点为终点的所有向量是否都相等,为什么?

3. 在空间中,任意一个三角形各边所构成的向量都是共面向量,但一个空间四边形的各边所构成的向量不一定是共面向量,为什么?

4. 两个平行平面上的所有向量都共面,对吗?为什么?

§1.3　向量的线性运算

所谓向量的线性运算是向量的加法(减法)和数乘运算的统称.

一、向量的加法、减法

首先看一个例子. 质点 P 从点 A 移动到 B,再从 B 移动到 C,其结果就是从 A 移动到 C. 这就是说,质点 P 先位移 $\overrightarrow{AB}$,再位移 $\overrightarrow{BC}$,其结果就是位移 $\overrightarrow{AC}$. 我们称 $\overrightarrow{AC}$ 为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 之和.

一般地,已知向量 $\vec{a},\vec{b}$(如图 1.6),任取一点 A 作 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$,再作 $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$,并连接 A,C,得到一个新向量 $\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AC}$ 称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 之和,记作 $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.

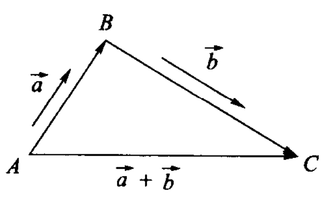

图 1.6

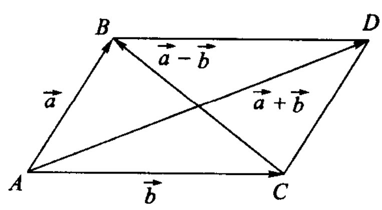

图 1.7

这种首尾相连求向量和的方法称为向量的三角形法则. 由图 1.7 不难看出中学力学里对力的合成(加法)所用的平行四边形法则与现在规定的三角形则是一

致的，即以 A 为始点作$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，再作$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，则以 $\vec{a},\vec{b}$ 为边的平行四边形$ABCD$的对角线向量$\overrightarrow{AD}$ 就是$\vec{a}$ 与$\vec{b}$ 的和.

可以验证：向量的加法有如下性质：

(1) (交换律)$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；

(2) (结合律)$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$；

(3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$；

(4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$，

其中 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为任意向量.

利用向量的加法运算，我们可以规定向量的减法运算如下：

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

从图 1.7 可以看出，$\vec{a}-\vec{b}$ 恰好是平行四边形的另一条对角线向量$\overrightarrow{CB}$. 不难看出向量的减法运算是向量加法的逆运算，即

$$(\vec{a}+\vec{b})-\vec{b}=(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}.$$

二、向量的数量乘法

一般地，两个非零共线向量的长度可以不同，其方向相同或者相反. 它们的长度相差一个正倍数. 如果规定用这个倍数的正负来协调它们的方向，可以通过向量的数量乘法直接建立这两个共线向量之间的关系，通过实数的正负性来确定这两个共线向量到底是同向还是反向. 为此我们引入一个实数与一个向量的乘法.

设 $\vec{a}$ 是一个向量，λ 为一个实数，规定 $\lambda\vec{a}$(或 $\vec{a}\lambda$) 是这样一个向量，$\lambda\vec{a}$ 的长度是$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$，其方向是：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与$\vec{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与$\vec{a}$ 反向. 称 $\lambda\vec{a}$ 为实数λ 与向量$\vec{a}$ 的**乘积**，又称**数乘向量**. 这样，我们在实数与向量之间建立了一种运算，称之为向量的**数乘运算**或向量的**数量乘法**.

可以证明(留作习题)：$\lambda\vec{a}=\vec{0}$ 当且仅当 $\lambda=0$ 或 $\vec{a}=\vec{0}$；$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$；两个向量 $\vec{a},\vec{b}$ 平行的充要条件是其中一个向量是另一个向量的倍数.

向量的数量乘法还具有如下性质：

(5) $1\vec{a}=\vec{a}$；

(6) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$；

这里的(6) 表明向量的数量乘法与实数之间的乘法具有相容性. 对于向量加法与向量的数量乘法之间还有如下相容性：

(7) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$；

(8) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.

例 1　设 $\vec{a}\neq\vec{0}$，则$\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 是唯一与$\vec{a}$ 同方向的单位向量. 记 $\vec{a}_0=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$，则$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}_0$. 因此任意一个非零向量 $\vec{a}$ 都可以写成其长度和与$\vec{a}$ 同方向的单位向

量的乘积.

例 2 证明平行四边形的两条对角线互相平分.

证明 如图 1.8. 设 $\square ABCD$ 两条对角线 AC, BD 交于 O. 由于 $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线, $\overrightarrow{BO}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 共线, 我们可设 $\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BO} = l\overrightarrow{BD}$, 其中 k, l 为实数.

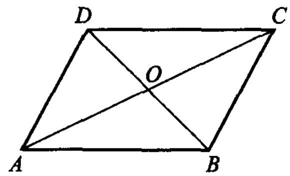

图 1.8

显然 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, 所以

$$\overrightarrow{AO} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}), \qquad \overrightarrow{BO} = l(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}).$$

又 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO}$, 故

$$\overrightarrow{AB} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - l(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}),$$

即

$$(1 - k - l)\overrightarrow{AB} = (k - l)\overrightarrow{AD}.$$

因为 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ 为不共线非零向量, 所以有

$$\begin{cases} 1 - k - l = 0, \\ k - l = 0. \end{cases}$$

故 $k = l = \dfrac{1}{2}$. 所以平行四边形的两条对角线互相平分. $\square$

习题 1.3

1. 设 λ 为实数, $\vec{a}$ 为向量, 证明:

(1) $\lambda\vec{a} = 0$ 当且仅当 $\lambda = 0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$;

(2) $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$;

(3) 两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 平行的充要条件是其中一个向量是另一个向量的倍数.

2. 设 AD, BE, CF 是 ΔABC 的三条中线 (如图 1.9), 证明:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}.$$

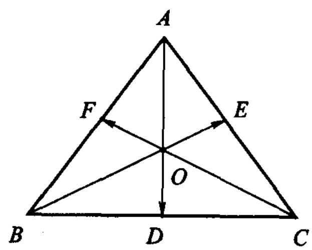

图 1.9

3. 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 为向量, 证明

$$\big||\vec{a}| - |\vec{b}|\big| \leqslant |\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

§ 1.4 向量的数量积、向量积、混合积

本节我们引入向量的乘积运算: 数量积、向量积、混合积. 它们在几何学、力学、工程学中都有广泛的应用.

一、数量积

在中学物理中，力 $\vec{f}$ 作用在质点上，产生位移 $\vec{s}$，则力 $\vec{f}$ 所作的功为 $W = |\vec{f}| \cdot |\vec{s}| \cos\langle\vec{f},\vec{s}\rangle$，其中 $\langle\vec{f},\vec{s}\rangle$ 为两向量 $\vec{f}$，$\vec{s}$ 的夹角. 实际上，W 就是 $\vec{f}$ 在 $\vec{s}$ 上投影 $|\vec{f}|\cos\langle\vec{f},\vec{s}\rangle$ 与 $|\vec{s}|$ 的乘积. 下面我们引入两个向量的数量积的概念.

定义 1.1 设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为向量，称数量 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**数量积**（或内积），其中 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ 表示 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**夹角**（$0 \leqslant \langle\vec{a},\vec{b}\rangle \leqslant \pi$）. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积记为 $\vec{a} \cdot \vec{b}$，有时简记为 $\vec{a}\vec{b}$. 即

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle.$$

显然，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 当且仅当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 中至少一个为零向量或 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \frac{\pi}{2}$.

两向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的内积 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的几何意义是：向量 $\vec{a}$（或 $\vec{b}$）的长度与另一向量 $\vec{b}$（或 $\vec{a}$）在该向量上的投影 $|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$（或 $|\vec{a}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$）的乘积.

若物体在力 $\vec{f}$ 作用下产生位移 $\vec{s}$，则力 $\vec{f}$ 所作的功可以用内积写成 $W = \vec{f} \cdot \vec{s}$.

根据内积的定义，可以看出：

(1) 若 $\vec{a}_0$ 与 $\vec{b}_0$ 都是单位向量，则 $\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0 = \cos\langle\vec{a}_0,\vec{b}_0\rangle$，即两个单位向量的内积等于这两个向量夹角的余弦；若 $\vec{a}_0$ 为单位向量，$\vec{b}$ 为任意向量，则 $\vec{a}_0 \cdot \vec{b} = |\vec{b}|\cos\langle\vec{a}_0,\vec{b}\rangle$ 恰好是 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}_0$ 上的投影.

(2) 两个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 互相垂直的充要条件是 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$，这里我们规定零与任意向量都垂直.

(3) 两个向量内积的正负取决于这两个向量的夹角是锐角还是钝角.

(4) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

向量的数量积有以下运算规律：

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$；

(2) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$；

(3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

其仔 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 为任意向量，λ 是任意实数.

(1)，(2) 容易证明，(3) 的证明参见附录.

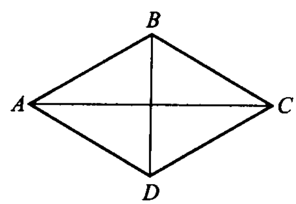

图 1.10

例 1 证明菱形的对角线互相垂直.

证明 设四边形 $ABCD$ 为菱形（如图 1.10）. 要证 AC 与 BD 垂直，只要证明 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ 即可. 事实上，$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. 故有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\ &= |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = 0.\end{aligned}$$

□

二、向量积

设 OA 为一根固定端点 O 的棍子，如图 1.11. 当一个与 $\overrightarrow{OA}$ 夹角为 α 的力 $\vec{f}$ 作