

180

TP391.9
L35

控制系统数字仿真

李 笑 张新敏 王 辉 编著

东北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

控制系统数字仿真/李笑等编著. —沈阳:东北大学出版社, 1999.10
ISBN 7-81054-442-X

I. 控… II. 李… III. 自动控制系统-数字仿真 IV. TP391.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 64532 号

内 容 简 介

本书介绍了控制系统数字仿真的基本原理和方法。全书共分 6 章, 主要包括: 仿真技术的基本概念及应用; 连续系统数值积分法仿真; 离散相似法仿真; 快速仿真; 采样控制系统仿真; MATLAB 仿真软件等。书中给出了大量的仿真实例及计算机程序。

本书可用作高等院校本科生和研究生的教材, 也可供从事系统控制、系统仿真的科研人员和工程技术人员参阅。

©东北大学出版社出版

(沈阳市文化路 3 号巷 11 号 邮政编码 110006)

沈阳农业大学印刷厂印刷

东北大学出版社发行

开本: 787×1092 1/16

字数: 268 千字

印张: 11

印数: 1000 册

1999 年 11 月第 1 版

1999 年 11 月第 1 次印刷

责任编辑: 王兆元

责任校对: 冯 伟

封面设计: 唐敏智

责任出版: 杨华宁

定价: 18.00 元

前 言

系统仿真技术是近几十年发展起来的一种综合性很强的实验科学技术。它为自动控制系统的分析、设计和综合研究提供了先进的手段。随着计算机的广泛应用,利用计算机进行仿真实验和研究已成为当今从事控制工程的各种人员所必须掌握的一门技术。

本书是作者在多年讲授“控制系统数字仿真”课程的基础上,参考了有关同类教材及资料,结合科研工作实践,对自编讲义进行修改后重新撰写的。本书适用于具有自动控制理论基础的机械类及电类专业及工程技术人员作教材或参考书。

“控制系统数字仿真”是一门理论及实践性均较强的课程。为了使理论与实践紧密结合,教学内容除保证足够的理论知识以外,还附有例题、习题,以此加深对理论知识的理解。为了方便实验,本书提供了用C语言编制的仿真程序,具备C语言基本知识的读者均可以掌握和使用。

全书共分6章。第1章绪论,概括性地介绍了系统仿真技术的基本概念、内容、应用和发展;第2章连续系统数值积分法数字仿真,讲述了连续系统数学模型及相互间的转换、数值积分法、面向状态空间表达式以及面向结构图的数字仿真方法和程序;第3章离散相似法数字仿真,讲述了连续系统按环节离散化的时域数字仿真方法和程序;第4章快速数字仿真,主要介绍了增广矩阵法及程序,并介绍了时域矩阵法、替换法、根匹配法快速仿真方法;第5章采样控制系统数字仿真,介绍了采样控制系统的特点、数字控制器的设计、采样控制系统数字仿真方法及程序;第6章MATLAB语言简介,简要介绍了目前流行的MATLAB语言的基本概念、程序设计及其动态系统仿真软件Simulink。

本书第5章和第2章的第4、5节由李笑(沈阳工业大学)编写;第3、6章和第2章的第1、2、3节由张新敏(沈阳工业大学)编写,第1、4章由王辉(中国民用航空学院)编写。全书由李笑负责统稿。

东北大学周士昌教授担任本书的主审。他详细审阅了书稿,并提出了许多宝贵意见和建议,在此谨向他表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限,书中难免有疏误和缺陷,恳切希望读者批评指正。

编 者

1999年11月

目 录

1 绪 论	(1)
1.1 仿真技术概述	(1)
1.2 仿真研究步骤	(3)
1.3 仿真技术的应用	(4)
1.4 仿真技术的现状及发展	(6)
习 题	(7)
2 连续系统数值积分法数字仿真	(8)
2.1 连续系统的数学模型	(8)
2.2 数值积分法	(12)
2.3 计算方法和步长的选择	(15)
2.4 状态空间表达式的数字仿真	(18)
2.5 结构图法数字仿真	(33)
习 题	(57)
3 连续系统离散相似法数字仿真	(58)
3.1 连续系统时域离散化模型	(58)
3.2 典型环节时域离散化模型	(61)
3.3 非线性系统的数字仿真方法	(64)
3.4 连续系统离散相似法数字仿真程序	(66)
习 题	(89)
4 快速数字仿真	(91)
4.1 时域矩阵法	(91)
4.2 增广矩阵法	(95)
4.3 替换法	(109)

4.4 根匹配法	(112)
习 题	(115)
5 采样控制系统数字仿真	(116)
5.1 采样控制系统	(116)
5.2 采样控制系统数字控制器的设计	(119)
5.3 采样控制系统的数字仿真	(126)
5.4 采样控制系统数字仿真程序	(128)
习 题	(146)
6 MATLAB 语言简介	(148)
6.1 MATLAB 的安装	(148)
6.2 MATLAB 的启动与基本操作	(149)
6.3 MATLAB 语言程序设计概述	(150)
6.4 动态系统仿真软件 Simulink	(163)
参考文献	(170)

1 绪 论

1.1 仿真技术概述

1.1.1 仿真的定义

人们在科学研究及生产实践中，由于受到客观条件（如经济性、安全性及可能性等）的限制，常常不能对所研究的对象直接进行试验。在这种情况下，就需要采用间接试验的方法，即建立一个与所研究的对象或过程（一般称为系统或原型）相似的模型，通过模型间接地研究原型的规律性，这种间接试验的方法叫做模拟或仿真研究，简称仿真（Simulation）。

仿真的定义，许多学者从不同的角度或范畴进行过描述，但可概括为：所谓仿真，就是用模型（物理模型或数学模型）代替实际系统进行实验和研究。

1.1.2 仿真遵循的原则

仿真是用模型来模仿真实系统，它所遵循的基本原则是相似原理，即几何相似、环境相似和性能相似。所谓几何相似就是把真实系统按比例放大或缩小，其状态向量与原系统完全相同。土木建筑、水利工程、船舶、飞机制造等多采用几何相似原理，进行各种仿真实验。所谓环境相似，就是人工在实验室里产生与所研究对象在自然界中所处环境类似的条件，比如飞机设计中的风洞，鱼雷设计中的水洞、水池等等。所谓性能相似，则是用数学方程来表征系统的性能，或者利用一数据处理系统，来模仿该数学方程所表征的系统。性能相似原理也是仿真技术所遵循的基本原理。

1.1.3 仿真的分类

（1）按模型的性质分类

根据系统模型的性质，可将仿真分为物理仿真、数学仿真和数学—物理混合仿真三类。

①物理仿真

物理仿真主要是运用几何相似、环境相似条件，构成物理模型进行实验研究。如确定新型飞机机翼的结构形状和尺寸，往往制作一个与实际结构相似但几何尺寸较小的模型，在气流场相似条件（压力、气流速度）的风洞中进行试验，根据得到的空气动力学的参数，进行结果分析，从而确定结构形状及尺寸。又如在制造发电厂用的大型发电机组之前，往往在同类型的较小的发电机组上进行实验研究，得出一些研究结果，来指导大型发电机组的设计和生產。

物理仿真的优点是能最大限度地反映系统的物理本质，具有直观性强和形象化的特点；缺点是构造物理模型所需费用高、周期长、技术复杂，其次是在物理模型上做试验，修改模型的结构及参数困难，实验限制条件多，容易受到环境条件的干扰。

②数学仿真

数学仿真是应用性能相似、环境相似原理，按照真实系统的数学关系，构成系统的数学模型进行实验研究。

数学仿真的优点是经济、方便、通用性强。计算机为数学模型的建立与实验提供了较大的灵活与方便，它实际上是一个“活的数学模型”，所以数学仿真也就是在计算机上对系统的数学模型进行实验，数学仿真离不开计算机，因此也称为计算机仿真。

③数学—物理混合仿真

在对某些系统的研究中，把数学模型与物理模型或实物联接在一起进行实验。即对系统的一部分建立数学模型，并放到计算机上；而对另一部分构造其物理模型或直接采用实物，然后将它们联接成系统进行实验。这种形式的仿真就称数学—物理混合仿真或半实物仿真。这种仿真具有数学与物理仿真的共同优点，当然其费用也必将大大增加。

(2) 按计算机仿真采用的计算机分类

用于计算机仿真的一整套软、硬设备，构成了仿真系统。根据仿真系统所采用的计算机种类不同，可将计算机仿真分为模拟计算机仿真、数字计算机仿真和数字—模拟混合计算机仿真三类。

①模拟仿真

模拟仿真是利用模拟计算机作为仿真工具。模拟计算机是一种连续计算装置，它是把实际系统的各物理量用电压量来表示，通过各种连续运算部件来求解描述系统的数学模型，它的输入输出均是连续的电压量，因此各物理量“连续”变化是模拟仿真的突出特点，模拟仿真更接近于实际连续系统。

模拟仿真中模拟计算机各运算部件如积分器、加法器、函数发生器等是并联运行的，各个运算环节同时进行运算，因此运算速度快，这是模拟仿真的另一优点。

模拟仿真的主要缺点是运算精度低，它的精度仅能达到 $10^{-2} \sim 10^{-3}$ 。这是由于组成模拟计算机运算部件的元、部件，如运算放大器、电阻、电容等的本身精度较低，所以组合误差大，使计算机的精度受到了限制。其次，对一些特殊环节，如纯延时、非线性或逻辑判断环节，实现较困难；排题板需要操作员接线等，所以自动化程度低，仅适用于低阶连续系统的仿真。

②数字仿真

数字仿真是利用数字计算机作为仿真工具。数字计算机是一种不连续的计算装置，它把实际系统的数学模型中的连续量变成离散的数字量，经过运算输出不连续的数据。

数字计算机仿真的最大优点是计算精度高。精度取决于字长，增加字长就可提高计算精度，对计算机只是增加一些部件，在技术上实现并不困难。目前精度可达 $10^{-3} \sim 10^{-6}$ 。

与模拟仿真相比，数字仿真运算速度较慢，这是因为数字仿真的数字计算机运算是顺序运行的（或称“串行”），用一个或多个数字运算器按一定顺序运行，完成各种运算，速度相对较慢。

③数字—模拟混合仿真

数字—模拟混合仿真是利用混合计算机作为仿真工具。混合计算机可分为混合模拟计算机和混合计算机系统两类。

A. 混合模拟计算机

混合模拟计算机是在模拟计算机中引进存储、判断和数字逻辑运算而形成的。它是在模拟计算机的基础上增加具有数字功能的模拟部件，因此既保持了模拟计算机的优点，又增加了迭代运算能力。

B. 混合计算机系统

把模拟计算机和数字计算机通过接口电路联在一起，构成一个混合计算机系统，如图 1.1-1 所示。

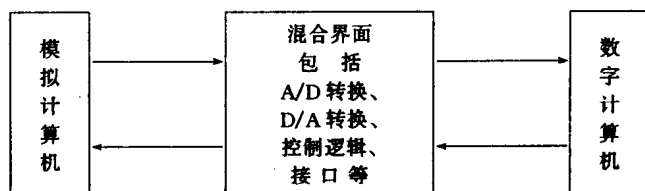


图 1.1-1 混合计算机系统

混合仿真综合了数字仿真和模拟仿真的优点，克服了它们各自的缺点，适宜于快速仿真的研究，以及对于参数寻优、统计分析等方面的应用。另外在半实物仿真中可以用数字计算机解算一些复杂函数。

(3) 按时间标尺的比值分类

按照仿真系统时间标尺 τ 与实际系统的时间标尺 t 的比值 $r_t = \tau/t$ 分类，可将仿真分为实时仿真($r_t = 1$)和非实时仿真($r_t \neq 1$)。非实时仿真又分为超实时仿真($r_t < 1$)与欠实时仿真($r_t > 1$)。一般有实物介入的半实物仿真属于实时仿真，而无实物介入的纯计算机仿真为非实时仿真。

1.2 仿真研究步骤

仿真是研究系统普遍采用的先进方法。现举一个简单的例子来说明利用仿真技术研究系统的过程。

图 1.2-1 表示一个由质量为 M 的重物、阻尼系数为 B 的阻尼器和弹性系数为 K 的弹簧组成的力学系统。试求在外力 $F(t)$ 作用下，物体 M 的运动规律 $x(t)$ 。

为了对系统的运动情况进行仿真，首先必须建立该系统的数学模型。根据力学定律可获得描述该系统的数学模型为

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t) \quad (1.2-1)$$

这是一个二阶线性常微分方程，若已知 $F(t)$ 作用于系统时刻 $t = 0$ 的初始条件为 $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$ ，则式(1.2-1)可以用下述任何一种方法求解：

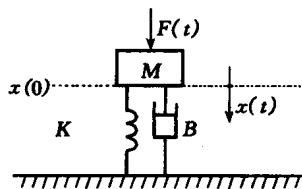


图 1.2-1 质量、阻尼、弹簧系统

- ①人工求解 $x(t)$ ，常称为系统分析；
- ②用模拟计算机求解 $x(t)$ ，即为模拟仿真；
- ③用数字计算机求解 $x(t)$ ，即为数字仿真。

现采用数字仿真。为了用数字计算机求解 $x(t)$ ，单有式(1.2-1)还不行，必须把它转换成适宜于编程并能在计算机上运行的模型——仿真模型。对于连续系统，仿真模型常用差分方程表示，为此，需先将式(1.2-1)转换成状态空间表达式

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} F(t) \\ y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.2-2)$$

对于式(1.2-2)，可直接采用数值积分法中的欧拉公式，得离散化状态方程和输出方程

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + h \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} F(n) \right] \\ y(n+1) = x_1(n+1) \end{cases} \quad (1.2-3)$$

式中， h 表示计算步长。式(1.2-3)表示的系统差分方程即为适合于编程的仿真模型。

要使式(1.2-3)表示的仿真模型能够在计算机上运行，必须用算法语言加以描述，即编写仿真程序。对于非实时仿真，可用一般高级语言依据相应的算法编程，而对于实时仿真往往采用汇编语言与高级语言共用的方式进行编程。

编制好程序后，上机调试，检查纠正程序错误，使其能够在计算机上运行通过，并保证程序处于正确的工作状态。通过运行程序，用仿真实验数据与实际系统运行观测的数据结果相比较，检验式(1.2-1)或式(1.2-2)所表示的数学模型是否正确地代表了实际系统，即是否真实地反映了实际系统运行过程的特性。

确认模型可用后，选择合理的参数实验范围，进行仿真试验研究，记录并分析仿真试验结果，为研究设计和调整提供可靠的数据。

综上所述，进行仿真研究的过程可以归纳为以下几个步骤：

- ①建立描述系统的数学模型；
- ②将数学模型转为仿真模型；
- ③编写仿真程序；
- ④验证确认模型；
- ⑤仿真试验，记录并分析试验结果。

1.3 仿真技术的应用

系统仿真技术作为分析、综合各类系统的一种有力的工具和手段，目前已被广泛地应用于几乎所有的科学技术领域。

本节仅从学科角度出发，对接触最多、发展最快、比较重要的几个方面作一概括性介

绍。

1.3.1 仿真技术在系统分析、综合方面的应用

在许多技术领域，常采用仿真技术对系统进行分析 and 综合研究。例如，在工程领域，在设计开始阶段，利用仿真技术可以论证系统方案，进行经济技术比较，优选合理方案；在设计阶段，系统仿真技术可帮助设计人员优选系统合理结构，优化系统参数，以期获得系统最优品质和性能；在调试阶段，利用仿真技术可以分析系统参数与系统响应的关系，指导调试工作，从而迅速完成调试任务；对已经运行的系统，利用仿真技术可以在不影响生产的条件下，分析系统的工作状态，预防事故发生，寻求改进薄弱环节，以提高系统的性能和运行效率。

在非工程领域，例如，用仿真技术可以建立商品生产和公司经营与市场预测的模型。根据市场信息，公司作出决策，工厂生产产品投放市场，再对市场信息进行分析，如此组成经济预测和生产模型。其他如交通、能源、生态、环境等方面的大系统分析都应用仿真技术。例如，人口问题的分析，应用仿真技术预估今后人口发展的合理结构，制定人口政策。又如，研究区域动力学模型，分析整个区域中人口增长、工业化速度、环境污染、资源消耗、粮食生产、社会福利、教育因素的相互平衡关系，应当按什么样的比例发展较为合适等问题。

1.3.2 仿真技术在仿真器方面的应用

系统仿真器 (System Simulator) 是模仿真实系统的实验研究装置，它是由计算机硬件、软件以及被模仿对象的某些类似实物所组成的一个仿真系统。仿真器分为培训仿真器和设计仿真器。培训仿真器一般由运动系统、显示系统、仪表、操作系统以及计算机硬件、软件组成类似实物的模拟装置。例如，培训飞机驾驶员航线起落飞行仿真器就包括：座舱及其运动系统、视景系统、音响系统、计算机系统以及指挥台等，此外还有电源、液压源，以保证试验条件。

推广应用培训仿真器，无论在培训技术和经济效益方面都会带来明显效果。例如，飞机驾驶员培训仿真器可以实现异常技术训练，训练在事故状态飞行、排除故障的技能、允许飞行员错误操作，这样可以提高飞行技术。使用飞行仿真器可以减少危险，确保安全，节省大量航空汽油，减少环境污染。例如，波音 747 仿真器按每天 20 小时架次训练计算，每年可节省 30 万吨汽油，可见经济效益十分明显。培训仿真器在航空、航天、航海、核能工业、电力系统、坦克、汽车等方面都有应用，并取得较显著的技术经济效益。

设计仿真器，一般包括计算机硬件、软件和由研究系统的应用软件以及大量设计公式和参数等所构成的设计程序包。例如，轧钢机多级计算机控制系统的设计，从方案选择到参数确定，甚至绘图等工作都可以在设计仿真器上由计算机完成，以提高效率。此外，在电机、变压器或其他具有大量计算工作量而且规格众多的系列化产品设计方面，均可利用计算机辅助设计仿真器 (或称设计程序包)，以提高工作效率。

综上所述，系统仿真技术在仿真器方面的应用将会带来明显的技术和经济效益。

1.3.3 仿真技术在技术咨询和预测方面的应用

系统仿真技术目前已应用在专家系统、技术咨询和系统预测、预报方面。

专家系统是一个具有大量专门知识与经验的程序系统，它根据某个领域一个或多个人类专家提供的知识和经验进行推理和判断，模拟人类专家的决策过程，以解决那些需要人类专家决定的复杂问题。我国目前研究比较多的是中医诊断专家系统，它是将医疗经验丰富、诊脉医术准确的医生的一套知识和经验加以规律化后编出程序，存入计算机中，在临床诊断时起到专家的作用。除医疗之外，如农业育种专家系统，它自动计算选择杂交的亲本，预测杂交后代的性状，给出生产杂交第二代、第三代的配种方案，起到咨询的作用。

预测技术在很多领域应用，例如，利用地震监测模型，根据监测数据预报地震情报；利用森林火警模型，根据当地气温、风向、湿度等条件预报火警；利用人口模型预测今后人口结构。

应用系统仿真技术对反应周期长，而且难以观察、试验或消耗巨资的自然环境、生态、人口结构、生理、育种、导弹、军事、国防等系统，可以在短期容易实现的模型上进行分析、试验后预报结果。这是仿真技术所具有的独特功能，所以在这方面的应用逐渐扩大，极有发展前途。此外，对于有些实际物理世界不可能存在或难以实现的，但有必要研究的系统，仿真技术也扮演着极其重要的角色。

1.4 仿真技术的现状及发展

从 40 年代末以来，系统仿真技术随着计算机技术的发展，逐渐形成了一门新兴的科学技术。例如，仿真计算机经过模拟计算机、混合计算机、全数字并行处理计算机的演变过程，相继出现了模拟仿真、数字仿真、混合仿真、全数字并行处理仿真技术。仿真软件也由数值计算方法、仿真语言逐步扩大丰富。时至今日，仿真技术已经应用在各技术领域、各学科内容和各工程部门。

本节仅针对仿真技术中发展较快并引人注目的一些问题作一简单介绍。

1.4.1 仿真计算机的现状及发展

仿真技术作为一门独立的技术形成于 40 年代。40 年代末期，国外研制出了用于导弹控制及制导系统仿真的专用模拟计算机，50 年代初研制出了商用模拟计算机。50 年代后期，数字计算机开始得到一定的发展。50 年代末，国外又研制出了用于洲际导弹仿真的专用混合计算机，60 年代初研制出了商用混合计算机。到了 70 年代，由于计算机中央处理器的运算速度尚未达到目前的水平，人们只好求助于并行处理，于是制成了并行数字计算机。当前数字计算机计算速度已高达百亿次，可以满足大型复杂系统实时仿真的要求，如飞行器控制和制导系统的实时仿真以及预测拦截系统的超实时仿真等都采用了数字计算机。随着数字计算机技术的迅速发展，数字计算机越来越被普遍采用并逐步替代传统的混合计算机而占据仿真计算机的主流。

我国仿真技术比国外差不多晚了 10 年，但发展很快。1958 年研制出了用于飞行器控制系统仿真的专用模拟计算机，60 年代初研制成了通用模拟计算机，70 年代末研制出了

通用混合计算机, 80 年代研制成了并行数字计算机 (如银河系列机)。自 80 年代以来, 我国的仿真事业得到了迅猛发展, 我国仿真工作者还制造出了各种水平较高的训练仿真器, 如船舶操纵仿真器、电站操作仿真器等。

1.4.2 仿真软件现状及发展

计算机仿真软件国外发展得较早, 近年也比较活跃。例如, 早期的连续系统语言有 MIDAS, MIMIC, CSMP, CSSL, CSSL IV, DARE—P 等, 近年发表的有 MATLAB, ACSL 等; 离散系统仿真语言有 GPSS, SIMSCRIPT III, GPSS IV 等; 在混合机软件方面有 ECSSL, HYSHARE 等。

在我国, 计算机仿真软件多数是移植国外的仿真程序包和仿真语言。如连续系统仿真语言 CSS, MIMIC, CSSL 以及 DARE—P 等, 离散系统仿真语言 GPSS 及 GASPIV 等。但近年我国自行设计的软件逐渐增多, 如 SBASIC, SSL—III 一类解释功能扩充的语言, SDS—A 连续系统仿真程序包等, 此外还有混合操作语言 HYBASIC 等。

仿真语言目前多以 FORTRAN 和 C 为基本语言, 它们的特点是科学计算能力强, 采取程序结构化法编写程序方便。C 语言较 FORTRAN 有较强的图形能力, 运行效率高。

本书着重介绍微机上可实现的、工程上最常用和易于推广的控制系统数字仿真 C 语言程序, 简单介绍 MATLAB 语言基本知识, 系统阐述数字仿真基本原理和方法, 旨在为从事系统仿真、系统分析和系统设计工作者提供一本系统了解和掌握仿真技术的读物, 为推动仿真技术的发展作出贡献。

习 题

- 1.1 什么是仿真? 仿真遵循的基本原则是什么?
- 1.2 仿真有哪几种类型? 各有什么特点?
- 1.3 试举例说明连续系统数字仿真的步骤。
- 1.4 系统仿真技术为什么得到广泛应用?
- 1.5 举出几个你所遇到的仿真实例。

2 连续系统数值积分法数字仿真

数字仿真就是将描述实际系统的数学模型转换成仿真模型,然后把它放到计算机上进行运行的过程。建立描述控制系统的数学模型是仿真的前提。描述控制系统的数学模型有多种形式,它们之间可以相互转换。本章介绍连续系统的数学模型、数学模型转换成仿真模型的方法、数值计算方法以及基于数值积分法的数字仿真程序。

2.1 连续系统的数学模型

连续系统的数学模型通常可用以下几种形式表示:微分方程、传递函数、状态空间表达式。状态空间表达式由状态方程和输出方程构成。因为状态方程是一阶微分方程组,非常适宜用数字计算机求解,因此它是建立仿真程序的基础。如果一个系统已用状态空间表达式来描述,则可以直接用这个表达式编程求解。然而许多物理系统中的数学模型大多采用高阶微分方程或传递函数的表示形式,为了便于数字仿真,必须把它们转换成状态空间表达式。

2.1.1 微分方程

一个连续系统可以表示成高阶微分方程,即

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1} \dot{u} + b_m u \quad (2.1-1)$$

式中, y ——系统的输出量;

u ——系统的输入量。

对于实际工程系统 $n > m$, 在初始条件给定的情况下, 当输入 u 已知时, 可以解出输出的动态响应 $y(t)$ 。

2.1.2 传递函数

对于式(2.1-1)两边取拉普拉斯变换, 假设 y 及 u 的各阶导数的初值均为零, 则有

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n) Y(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m) U(s) \quad (2.1-2)$$

式中, $Y(s)$ ——输出量 $y(t)$ 的拉普拉斯变换;

$U(s)$ ——输入量 $u(t)$ 的拉普拉斯变换。

于是式(2.1-1)系统的传递函数描述形式为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2.1-3)$$

比较式(2.1-1)和式(2.1-3)可以看出,系统的时域数学模型微分方程和复域数学模型传递函数之间具有对应的关系,二者可以相互转换。

微分方程或传递函数是用系统的输入、输出之间的关系来描述系统的,表示了系统的外部特征,所以称其为外部模型。

2.1.3 状态空间表达式

线性定常系统状态空间表达式的一般形式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.1-4)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.1-5)$$

式(2.1-4)由 n 个一阶微分方程组成,称为状态方程;式(2.1-5)由 m 个线性代数方程组成,称为输出方程。 $\mathbf{x}$ 为由 n 个状态变量作为分量构成的 $n \times 1$ 维状态向量; $\mathbf{u}$ 为 $r \times 1$ 维输入向量; $\mathbf{y}$ 为 $m \times 1$ 维输出向量; $\mathbf{A}$ 为 $n \times n$ 维的系统矩阵,表示系统内部各状态变量之间的关联情况,由控制对象的参数决定; $\mathbf{B}$ 为 $n \times r$ 维的输入矩阵,表示输入对每个状态变量的作用情况; $\mathbf{C}$ 为 $m \times n$ 维的输出矩阵,表示输出与每个状态变量间的关系; $\mathbf{D}$ 为 $m \times r$ 维的前馈矩阵,表示输入对输出的直接传递关系,一般情况 $\mathbf{D} = 0$ 。对于单输入—单输出系统输入量 u 及输出量 y 均为标量, $\mathbf{B}$ 为列向量, $\mathbf{C}$ 为行向量, $\mathbf{D}$ 为标量。

式(2.1-4)和式(2.1-5)所构成的系统状态空间表达式,是在状态空间描述系统的,反映了系统的内部特性,所以又称其为内部模型。

状态空间表达式的建立有两种方法:从系统的机理出发建立状态空间表达式和从已知的系统高阶微分方程或传递函数求相应的状态空间表达式。后者称为实现问题,现分述如下:

(1) 由系统高阶微分方程求状态空间表达式

① 不含输入量 u 导数项的微分方程

假定一个连续系统用微分方程描述为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_m u \quad (2.1-6)$$

选取 $y(t)$ 及其各阶导数为状态变量,即取

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ x_3 = \ddot{y} \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases} \quad (2.1-7)$$

则可将式(2.1-6)化为一阶微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n = y^{(n)} = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + b_m u \end{cases} \quad (2.1-8)$$

这个一阶微分方程组就是以状态变量 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 表示的系统状态方程, 写为矩阵方程形式, 即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix} u \quad (2.1-9)$$

而系统的输出方程 $y = x_1$, 写成矩阵方程形式, 即

$$y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.1-10)$$

由式(2.1-9)和式(2.1-10)构成的系统状态空间表达式可简写为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ y = \mathbf{Cx} \end{cases} \quad (2.1-11)$$

② 包含输入量 u 导数项的微分方程

若系统微分方程中包含输入量 u 的导数项, 如式(2.1-1)所示, 则为了在状态方程中不出现 u 的导数项, 可以选取如下的 n 个变量为状态变量

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_0 u \\ x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-2} \dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u \end{cases} \quad (2.1-12)$$

式中, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n$ 可以根据式(2.1-1)的系数求得, 即

$$\begin{cases} \beta_0 = b_0 \\ \beta_i = b_i - \sum_{k=1}^i a_k \beta_{i-k} \end{cases} \quad (2.1-13)$$

根据所选状态变量得出一阶微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u \end{cases} \quad (2.1-14)$$

以及输出方程

$$y = x_1 + \beta_0 u \quad (2.1-15)$$

写成矩阵方程形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u \quad (2.1-16)$$

$$y = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u \quad (2.1-17)$$

由式(2.1-16)和式(2.1-17)构成的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2.1-18)$$

(2) 从系统传递函数求状态空间表达式

① 可控标准型

对于式(2.1-3)描述的系统, 引入一个中间变量 $x(t)$, 其拉氏变换为 $X(s)$, 若 $x(t)$ 及其各阶导数的初值皆为零, 可将式(2.1-3)改写为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \cdot \frac{X(s)}{U(s)}$$

$$\text{令} \quad \frac{Y(s)}{X(s)} = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m \quad (2.1-19)$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2.1-20)$$

将式(2.1-19)和式(2.1-20)取拉氏反变换, 可得

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = u \quad (2.1-21)$$

$$y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x \quad (2.1-22)$$

比较式(2.1-6)和式(2.1-21)可以看出, 两个方程是一样的, 故可选状态变量 $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \ddot{x}$, $\cdots$, $x_n = x^{(n-1)}$, 则得可控标准型状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.1-23)$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [b_m \ b_{m-1} \ \cdots \ b_0]$$

② 对角标准型

当传递函数式(2.1-3)的特征方程

$$s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

有 n 个互异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 时, $G(s)$ 可展开成如下部分分式

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)} \\ &= \frac{r_1}{s - \lambda_1} + \frac{r_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{r_n}{s - \lambda_n} = \frac{Y(s)}{U(s)} \end{aligned} \quad (2.1-24)$$

式中, $r_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) G(s) \quad i = 1, 2, \cdots, n$

选取 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为一组状态变量, 其拉氏变换式为 $X_1(s), X_2(s), \cdots, X_n(s)$, 令

$$X_i(s) = \frac{U(s)}{s - \lambda_i} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

则有

$$\begin{cases} sX_i(s) = \lambda_i X_i(s) + U(s) \\ Y(s) = r_1 X_1(s) + r_2 X_2(s) + \cdots + r_n X_n(s) \end{cases} \quad (2.1-25)$$

对式(2.1-25)进行拉氏反变换, 可得对角标准型状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (2.1-26)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_n]$$

由上述可见, 对于同一个系统, 只要状态变量的选取形式不同, 则可得出不同形式的状态空间表达式, 即状态空间表达式并不是唯一的。除以上给出的形式外, 还可写出其他各种表示形式如可观标准型, 约旦标准型等。

2.2 数值积分法

由上节讨论可知, 一个连续系统的时域数学模型的基本形式是高阶微分方程或状态空间表达式, 高阶微分方程可以转化为一阶微分方程组, 即状态方程。所以连续系统时域数学模型的基本形式是状态空间表达式。 n 阶连续系统的状态空间表达式的状态方程是由 n 个一阶微分方程组成的方程组。用计算机对 n 阶连续系统进行仿真, 就是让计算机进行 n 次数值积分运算。数值积分法是数字仿真中对微分方程进行数值求解的基本算法。目前数值积分法有多种形式, 现只介绍几种在数字仿真中常用的方法。在介绍几种方法以前, 先简要地阐述数值积分法的基本概念。

2.2.1 数值积分法基本概念

已知一个一阶微分方程