名师导学系列丛书 MSDX

高中 试验本

北京名师导学

中国教育电视台CETV-1黄金时间配套讲解

◎北大附中◎人大附中◎清华附中◎北师大附中

特级高级教师联合编写

◎丛书主编：刘强

高二 数学 下

●基本目标要求 ●典型例题分析

●教材内容分析 ●双基能力训练

●双基知识导学 ●习题答案提示

●疑难问题解析 ●高考真题研究

九州出版社

丛书主编：刘 强

高中试验本

北京名师导学

BEIJING MINGSHI DAOXUE

本册主编：万良柯 夏志勇 尹士坤

编者：李 燕 万良柯 张 政 黄 健
陈 晖 黄龙如 曾菊华 徐源可

高二数学（下）

●基本目标要求 ●典型例题分析
●教材内容分析 ●双基能力训练
●双基知识导学 ●习题答案提示
●疑难问题解析 ●高考真题研究

九州出版社

北京名师导学

高二数学(下)

本册主编　万良柯　夏志勇　尹士坤

*

九州出版社出版发行

各地书店经销

九洲财鑫印刷有限公司印刷

*

880×1230毫米　1/32　印张6.25　字数146千字

2002年12月第7版　2002年12月第1次印刷

ISBN 7-80114-149-0/G·74

定价:8.00元

地址:北京市西三环北路27号北科大厦北楼四层　　邮编:100089

北京美澳学苑教育考试研究中心　　电话:010-68434992

注重素质教育
培养一代新人

北京名师导学

费孝通

前　言

本套丛书根据教育部颁布的各学科课程标准，依照人教版最新教材，积淀成熟教辅方略，吸纳最新教学研究成果，大量选用鲜活、灵动的新话题、新材料，关注社会热点，贴近生活实际，创设新情境，开发新思维，既指导学生对知识进行科学梳理，又给学生以“钥匙”，让学生自己打开“重点”、“难点”的大门，掌握相应的“知识点”，由此举一反三，触类旁通，真正“学会学习”。

本套丛书体现“以学生发展为本”的编写思想，书中每节（单元）主要设有【教材内容分析】、【中高考基本要求】、【双基知识导学】、【疑难问题解析】、【典型例题分析】、【双基能力训练】、【习题答案提示】等栏目。这些栏目涉及的主要内容是各章节应掌握的基础知识、知识的灵活运用、思维方法、解题思想、解题技巧等。另外，理科各册在本章知识总结中还设有4个栏目【知识体系表解】、【注意问题提示】、【基础知识扩展】、【中高考真题研究】，这4个栏目对于学生复习本章所学知识，具有加深、拓展、强化的作用。

编者从教纲、考纲中找到了各学科相应的知识点和考点，让学习者切实体味到怎样从“知识型”向“能力型”转变、从“苦读型”向“巧读型”转

变；测试题的设计，既有夯实基础、能起到立竿见影功效的一课一练，又有针对中考、高考考点进行仿真模拟的综合检测题，点面结合、学练结合，循序渐进地进行训练，从而科学有效地提高学生的备考能力、实实在在地进行素质教育。

本套丛书由北京大学附中、清华大学附中、中国人民大学附中、北京师范大学附中等重点中学的100多位教学第一线的特级、高级教师精心编写。在编写、修订过程中得到了有关领导、专家的关心和支持。在此，一并表示诚挚的感谢！同时对每年给我们提供修订建议的全国各地的热心读者和教育界同仁表示崇高的敬意！

本套丛书自出版以来一直成为广大师生的良师益友，真正起到开卷有益、初读有趣、复读启迪、教学参考、学习助手的作用。本套丛书当年一出版就在中国教育电视台（CETV－1）中播出，今年我们又请全国著名的特级教师根据教学改革及最新高考精神重新录制，将于近期在中国教育电视台（CETV－1）黄金时间中播出。

我们衷心祝愿本套丛书能一如既往地帮助中学生朋友实现走进重点名牌大学的梦想！

刘　强

2002年12月

目 录

第九章

直线、平面、简单几何体(B)

9.1 平面的基本性质

双基知识导学

1 基本知识点

❶平面的概念:几何里的平面是无限延展的,常见的黑板面、桌面、平静的水面都是平面的局部形象.

❷平面的表示法:画图时常用平行四边形等平面的一部分来表示平面;书写时,平面一般用希腊字母 α、β、γ……来表示,如平面 α、平面 β、平面 γ 等,还可用表示平行四边形的两个对角顶点的字母来表示,如平面 AC.

❸平面有以下基本性质:

公理 1:如果一条直线的两点在一个平面内,那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

公理 2:如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他公共点,这些公共点的集合是一条直线.

公理 3:经过不在同一条直线上的三点有且只有一个平面.

公理 3 也可简单说成,不共线的三点确定一个平面.

❹上面的公理还有以下推论:

推论 1:经过一条直线和直线外的一点有且只有一个平面;

推论 2:经过两条相交直线有且只有一个平面;

推论 3:经过两条平行直线有且只有一个平面.

❺空间图形在平面内的表示方法:常用空间图形的直观图来表示空间图形.直观图常用斜二测画法来画.这种画法的规则是:

①在已知图形中取水平平面,取互相垂直的轴 ox, oy,再取 oz 轴,使 $\angle xoz =$

$90°$，且$\angle yoz=90°$.

②画直观图时，把它们画成对应的轴 $o'x'$、$o'y'$、$o'z'$，使$\angle x'o'y'=45°$(或$135°$)，$\angle x'o'z'=90°$，$x'o'y'$所确定的平面表示水平平面.

③已知图形中平行于 x 轴、y 轴或 z 轴的线段，在直观图中保持长度不变；平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半.

2 知识重点及分析

平面的三个公理及三个推论是本节的重点.

平面的三个公理(即基本性质)，它们是以后进行推理论证的出发点和根据.公理 1 是研究直线和平面的关系基础，用它可判定直线是否在平面内，又可检验平面.公理 2 是研究平面和平面关系的基础，它可用来测定平面是否相交.公理 3 及三个推论是研究有关确定平面的条件.

3 知识难点及分析

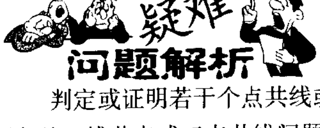
平面上的三个公理，空间图形的画法，数学语言的运用是本节的难点.

本节主要是要画出反映点、线、面关系的直观图，这对于初学立体几何的学生来说，是较难入门的一步，因此必须严格训练，熟练掌握.

叙述平面概念时用了“无限延展”词句，它强调了平面是没有边界的也无所谓面积，可以想见平面是向四周各个方向扩展的，从而把空间分成两部分.公理 2、公理 3 及其推论中都有“有且只有一个”的叙述，这里“有”说明图形是存在的，“只有一个”说明图形是唯一的，符合某条件的图形既然存在，且只有一个，说明这个图形是完全确定的，因此“有且只有一个”和“确定”是同义的.此外文字语言，符号语言(如 E、C 等等)，图形语言之间的相互“翻译”对初学者来说也是个难点.

4 常考知识点及分析

平面的基本性质，公理的推论，它们是每年必考的知识点.主要被用于证明一条直线在一个平面内，点共线或点在线上，平面相交，平面存在且惟一等问题.常出现在大题中，选择题，填空题也经常出现这些性质及推论的应用.对斜二测画法一般不出专门的考题，但在立体几何解题中，正确作出直观图是基本的技能.



判定或证明若干个点共线或共面、若干条直线共面或共点是本节主要疑难问题.凡三线共点或三点共线问题均可转化为点在直线上的证明问题，要紧扣住这条直线是哪两个平面交线这一特征.

证明共面问题通常可先由部分元素确定一个平面，再证其他元素也在此平面

内,也可通过其他元素作一辅助平面,再证这二平面重合.

典型例题分析

例1 在空间里,下列命题正确的是 ( )

(A)对边相等的四边形一定是平面图形

(B)四边相等的四边形一定是平面图形

(C)有一组对边平行的四边形一定是平面图形

(D)有一组对角相等的四边形一定是平面图形

分析 解答本题时需要以平面的概念为依据,对每个命题逐一加以剖析,辨别其真伪.

讲解 如果两组对边都不共面,这个四边形即使对边相等,也是空间四边形,不能确定一个平面图形,故(A)不对,同理(B)也错.

若一组对角相等,有可能一个角的两边与另一个角的两边分别是不在同一平面内的直线,这时,四边形仍是空间四边形,故(D)也不对.

由公理 3 的推论知,两条平行直线确定一个平面,四边形 $ABCD$ 中,若 $AB \parallel CD$,那么线段 AB、CD 确定平面 α,得 $A \in \alpha$,$C \in \alpha$,由公理 2 得 $AC \subset \alpha$,同理 $BD \subset \alpha$,$ABCD$ 是平面图形,故命题(C)正确.

评述 应当注意,平面几何的定理并不能随意推广到空间立体几何里,有些平面几何的定理,它的成立前提被局限于"在平面上",到空间后不一定成立,象本题中"两组对边相等的四边形是平行四边形"这个命题在平面几何中正确,但在空间立体几何中就不适用了,因此在立体几何中使用平面几何的有关知识时,要注意使用前提,或者重新证明其成立后方可运用.

例2 空间四点 A、B、C、D 共面而不共线,则在这四点中 ( )

(A)必有三点共线 (B)必有三点不共线

(C)至少有三点共线 (D)不可能有三点共线

讲解 可用排除法,四点共面且无任意三点共线,这种情况可排除 A、C,若有三点共线,另一点在线外,则排除 D,故选(D)

例3 在△ABC 中,点 $B \in$ 平面 α,点 $C \in$ 平面 α.

(1)设 G 为△ABC 的重心,若 $G \in \alpha$,问点 A 是否在平面 α 上? 请说明理由.

(2)设 O 是△ABC 的外接圆的圆心,若 $O \in \alpha$,问点 A 是否在平面 α 上? 请说明理由.

讲解 (1)点 A 在平面 α 上,这是因为三角形重心 G 在三角形内部,且在三角形所

在平面上，重心 G 不在边 BC 上，$\therefore G$ 与 BC 确定一个平面，这个平面是 α，也就是$\triangle ABC$ 所在平面，故 $A\in\alpha$.

(2)点 A 不一定在 α 上. 这是因为三角形外心可以在三角形内部、外部或边 BC 上，当外心 O 在 BC 上时，此时 O 为 BC 中点，过 B、O、C(即直线 BC)有无穷多个平面，点 A 可以在这无穷多个平面中的任一平面上，即点 A 可以不在 α 上；当外心 O 不在 BC 上时，此时 O 与 BC 确定的平面就是 α，且 α 就是$\triangle ABC$ 所在平面，此时 $A\in\alpha$；综合可知，点 A 不一定在 α 上.

例 4 如图 9(B)－1，点 A、B、C 确定的平面与点 D、E、F 确定的平面相交于直线 l，且 AB 与 l 相交，EF 与 l 相交，作出平面 ABD 与平面 CEF 的交线.

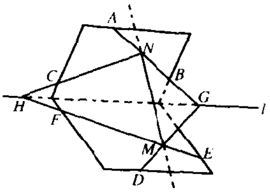


图 9(B)－1

分析 要作出交线，必须找到交线上的两个点，而每一个点又必须分别在两个平面上通过两条相交直线来确定，因此，关键还是要作出平面，而 AB 与 l 是相交的，所以面 ABD 与面 ABC、面 DEF 相交于一点，找出这一点就是解此题的关键.

讲解 在平面 ABC 上连结 AB 交 l 于 G，则 G 在平面 DEF 上，在面 DEF 上连结 DG 交 EF 与 M，则 $M\in$ 平面 ABD，且 $M\in$ 平面 CEF，所以 M 在平面 ABD 与平面 CEF 的交线上，同理可作出 N 点，则直线 MN 为所求.

评述 完成本题必须全面思考，步步推理，所以本题对于训练思维的条理性，综合性大有好处.

例 5 已知：G、E、F 分别是直线 OA、OB、OC 上三点，如果 GE 与 AB，EF 与 BC，GF 与 AC 都分别相交.

求证：这三个交点在同一直线上.

分析 要证这三个交点在同一直线上，可以先找出这三点既在平面 GEF 上，又在平面 ABC 上，然后根据公理 2 即可得到结果.

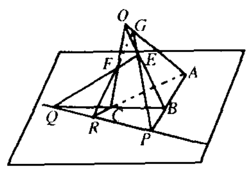


图 9(B)－2

证明 如图 9(B)－2，设 $GE\cap AB=P$，$EF\cap BC=Q$，$GF\cap AC=R$.

又设 A、B、C 三点确定的平面为 α，G、E、F 三点确定的平面为 β.

(1) $\because GE\cap AB=P$，

$\therefore \Rightarrow \begin{cases} P\in AB\subset\alpha \\ P\in GE\subset\beta \end{cases} \Rightarrow P\in\alpha\cap\beta$

(2) $\because EF\cap BC=Q$,

$\therefore \Rightarrow \begin{cases} Q\in BC\subset\alpha \\ Q\in EF\subset\beta \end{cases} \Rightarrow Q\in\alpha\cap\beta$

(3) $\because GF\cap AC=R$,

$\therefore \Rightarrow \begin{cases} R\in AC\subset\alpha \\ R\in GF\subset\beta \end{cases} \Rightarrow R\in\alpha\cap\beta$

由(1),(2),(3)可知 P、Q,R 三点是两个平面 α、β 的公共点.

若 P,Q,R 三点不共线,则 α 与 β 重合,则 A 与 G 重合,B 与 E 重合,C 与 F 重合,这与已知不符,所以 P、Q、R 在同一直线 l 上.

评述 这里证明 P、Q、R 三点共线分成三步走:①找出 P、Q、R 都属于二个不同的确定平面;②说明这两个平面不重合但又有公共点;③根据公理 2 得出 P、Q、R 三点在这两个平面的交线上,即三点共线,这是一种求证诸点共线的常用方法.

例 6 如图 9(B) - 3,已知四边形 $ABCD$ 中,$AB\,/\!/\,DC$,AB、BC、DC、AD(或其延长线)分别与平面 α 相交于 E、H、F、G.求证:E、F、G、H 四点共线.

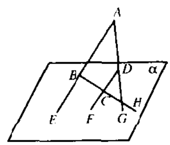


图 9(B) - 3

证明 $\because AB\,/\!/\,DC$,$\therefore A$、B、C、D 可确定一个平面 β.

$\because E$、F、G、H 分别在 AB、DC、AD、BC(或其延长线)上.

$\therefore E$、F、G、H 都在平面 β 内.

又 $\because$ 这些点也在平面 α 内,

$\therefore$ 由公理 2 可知 E、F、G、H 必在平面 α 和平面 β 的交线上,即 E、F、G、H 四点共线.

评述 本题仍采用了与例 6 同类的证法,另外这类证诸点共线的题目通常也可这样做:①先找其中两点如 A、B 确定一条直线 l;②再找两个平面如 α、β,并证出 $l\subset\alpha$,$l\subset\beta$;③若另外要求证共线的点如 C、D 等被证得既属于平面 α,又属于平面 β,则可得出 C、D 等点都在 $\alpha\cap\beta=l$ 上,由此诸点共线得证.

例 7 试证:两两相交但不过同一点的四条直线在同一平面内.

分析 本题以文字语言给出,可先用符号语言写出已知和求证,证明多条直线共面,可以先找出其中的两条直线确定一个平面,然后再证明其余的直线也在此平面内即可.

已知:如图 9(B) - 4,直线 a、b、c、d,$a\cap b=D$,$a\cap c=H$,$a\cap d=G$,$b\cap c=E$,$b\cap d=F$,

$c\cap d=K$.求证:直线 a、b、c、d 共面.

证明 $\because a\cap b=D$,设 a、b 所确定的平面为 α,则 $a\subset\alpha$ 且 $b\subset\alpha$,

$\because H=a\cap c$ 且 $a\subset\alpha$,　$\therefore H\in\alpha$

又 $\because E=b\cap c$ 且 $b\subset\alpha$,　$\therefore E\in\alpha$

综上得 $EH\subset\alpha$,即 $C\subset\alpha$.　同理可证　$d\subset\alpha$

$\therefore$ 直线 a、b、c、d 共面于 α.

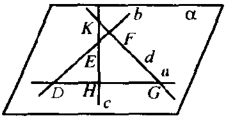


图 9(B)－4

例 8 一条直线与三条平行直线都相交,求证:这四条直线共面.

已知:$a/\!/b/\!/c$,$l\cap a=A$,$l\cap b=B$,$l\cap c=C$,

求证:a、b、c、l 共面.

证明 $\because a/\!/b$,$\therefore a$ 和 b 确定一个平面,记为 α,

又 $\because a\cap l=A$,$b\cap l=B$,$\therefore A$、$B\in\alpha$,故 $l\subset\alpha$.

$\because a/\!/c$,$\therefore a$、c 确定一个平面,记为 β,同理可得 $l\subset\beta$.

$\therefore \alpha\cap\beta=a$,$\alpha\cap\beta=l$,故 α 和 β 重合,即 a、b、c、l 共面.

评述 例 7、例 8 都是以文字语言给出原题,解这类题都是须先用符号语言写出已知和求证.这两例也反映了证明直线共面的一类通常做法:先由两线定面,再证其余各线在面内.

例 9 两个不全等的三角形不在同一平面内,它们的各边对应平行,求证:三对对应顶点的连线相交于一点.

分析 要证三线共点,可反过来证这点在三条直线上,而要证点在直线上,只要找出交出这条直线的两个平面,再证点在这两个平面上,问题即得解.

证明 如图 9(B)－5,因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 不全等,故 AB 和 $A'B'$、BC 和 $B'C'$、CA 和 $C'A'$ 三对中至少有一对不等,不妨设 $AB\neq A'B'$,AB 和 $A'B'$ 确定平面 α,则 BB' 和 AA' 必相交于一点 P,再由 $BC/\!/B'C'$,$CA/\!/C'A'$ 知它们分别确定平面 β、γ,且 $P\in\beta,\gamma$,但 β 和 γ 的交线是 CC',故 $P\in CC'$,即三条直线 AA'、BB'、CC' 相交于一点 P.

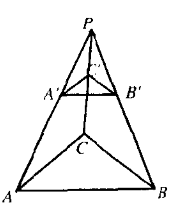


图 9(B)－5

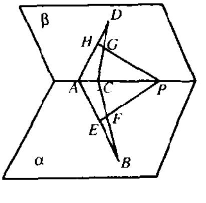


图 9(B)－6

例10 如图9(B)-6，$\triangle ABC\subset$平面α，$\triangle ADC\subset$平面β，E、F、G、H依次为AB、BC、CD、DA边上的点，且直线EF交直线GH于P.

求证：直线EF、HG、AC共点.

证明 $\because E\in$直线AB，$AB\subset$平面ABC，$\therefore E\in$平面ABC.

同理$F\in$平面ABC.

同理可得$HG\subset$平面ADC，进而可同上得$P\in$平面ADC.

又平面$ABC\cap$平面$ADC=$直线AC

$\therefore P\in AC$，即EF、HG、AC共点.

评述 前二例都是由已知条件判定或证明不共面且两两相交的三条直线l、m、n共点，其模式是：由l、m确定平面α，并得$m\subset\alpha$，由n、m确定平面β，又得$m\subset\beta$，故$\alpha\cap\beta=m$；再由$l\cap n=p$，$l\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$\therefore p\in\alpha$，$P\in\beta$，即$P\in m$，从而有l、m、n交于点P.

双基  能力训练

一 选择题

1. 空间有四个点，其中任意三点都不在同一直线上，那么它们可确定 ( )

(A)三个或两个平面 (B)四个或三个平面

(C)三个或一个平面 (D)四个或一个平面

2. 共点的四条直线最多能确定的平面个数是 ( )

(A)3 (B)4 (C)5 (D)6

3. 若A点在直线m上，平面α又包含了直线m，则下列记法正确的是 ( )

(A)$A\subset m\subset\alpha$ (B)$A\in m\subset\alpha$ (C)$A\in m\in\alpha$ (D)$A\subset m\in\alpha$

4. 与空间不共面的四点距离相等的平面的个数是 ( )

(A)3个 (B)4个 (C)6个 (D)7个

5. 下列叙述正确的是 ( )

(A)不共面的四点中可以有三点共线

(B)过两条相交直线上三点有且只有一个平面

(C)三角形、正方形、梯形一定是平面图形

(D)两两相交的三条直线共面

6. 若有两相交直线l、m确定了平面α，则下列叙述错误的是 ( )

(A)直线l和m上都有无数个点在平面α内

(B)直线l和m上只有有限个点在平面α内

(C)平面α经过了直线l和m

(D)过m和l不可能找到任何一个不同于平面α的平面β

7. 下列四个命题

①在空间,四条边相等的四边形是菱形;

②在空间,有三个角是直角的四边形是矩形;

③两两相交的三条直线必在同一平面内;

④两两平行的三条直线必在同一平面内;

其中,正确命题的个数是 ( )

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3

8. 文字语言叙述:"平面 α 内有直线 a,则 a 上一点 A 必在平面 α 内."改成符号语言应是 ( )

(A) $\left.\begin{matrix} a\in\alpha \\ a\subset A \end{matrix}\right\}\Rightarrow A\subset\alpha$ (B) $\left.\begin{matrix} a\subset\alpha \\ A\in a \end{matrix}\right\}\Rightarrow A\in\alpha$

(C) $\left.\begin{matrix} A\in a \\ a\in\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow A\subset\alpha$ (D) $\left.\begin{matrix} A\in a \\ a\in\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow A\in\alpha$

9. 下列命题中错误命题个数是 ( )

①过两条直线有且只有一个平面;

②点 P 在平面 α 内,也在直线 l 上,则直线 l 在平面 α 内;

③三条直线两两平行,最多可确定三个平面;

④平面 α 和平面 β 相交于不同在一直线上的三个点 M、N、P.

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3

10. 有点 $P\in\alpha$,$Q\in\alpha$,$R\in\alpha$,平面 $\alpha\cap$平面 $\beta=m$,且 $R\in m$,又直线 $PQ\cap m=M$,过 P、Q、R 三点确定一个平面 γ,则 $\beta\cap\gamma$ 是 ( )

(A)直线 QR (B)直线 PR (C)直线 RM (D)以上均错

二 填空题

11. 四条线段首尾相接成一四边形,当且仅当它的对角线________时才是一个平面图形.

12. 如果两条直线确定了一个平面,则这两条直线一定________.

13. 面 $\alpha\cap\beta=l$,$\beta\cap\gamma=m$,$\alpha\cap\gamma=n$,则平面 α、平面 β、平面 γ 可将空间分成________个部分.

14. 点 P、Q、R 可以确定一个平面,则 P、Q、R 三点必________.

15. 正方体的所有顶点最多可确定________个平面.

16. 先读图 9(B)-7(1)(2),然后根据图形,写出图形中元素应满足的条件.

17. $P\in\alpha$,直线 PQ 和 PR 不在平面 α 内,画出 PQ、PR 所确定的平面 β,并画出 α 和 β 的交线.

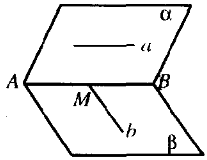


图 9(B)-7(1)

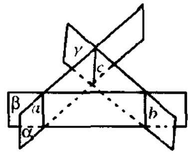


图 9(B)-7(2)

18. 如图 9(B)-8，$\triangle ABC$ 各边所在直线分别交平面 α 于 P、Q、R 三点，求证 P、Q、R 三点共线.

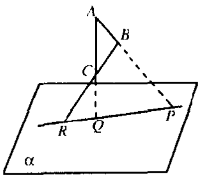


图 9(B)-8

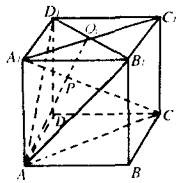


图 9(B)-9

19. 画出水平放置的正五边形的直观图.

20. 求证：与一条直线相交的所有平行线都在同一平面内.

21. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，如图 9(B)-9，O_1 为上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心，截面 AB_1D_1 与对角线 A_1C 交于 P，求证：$P \in AO_1$.

22. 过已知直线外一点与直线上三点分别连结三条线段，证明：这三条线段在同一个平面内.

23. 如图 9(B)-10，已知 $BC \cap B_1C_1 = P$，$AC \cap A_1C_1 = Q$，$AA_1 \cap BB_1 = R$. 求证：CC_1 也经过点 R.

24. 三个平面两两相交，有三条交线，求证：这三条直线交于一点或互相平行.

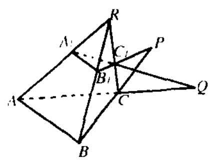


图 9(B)-10