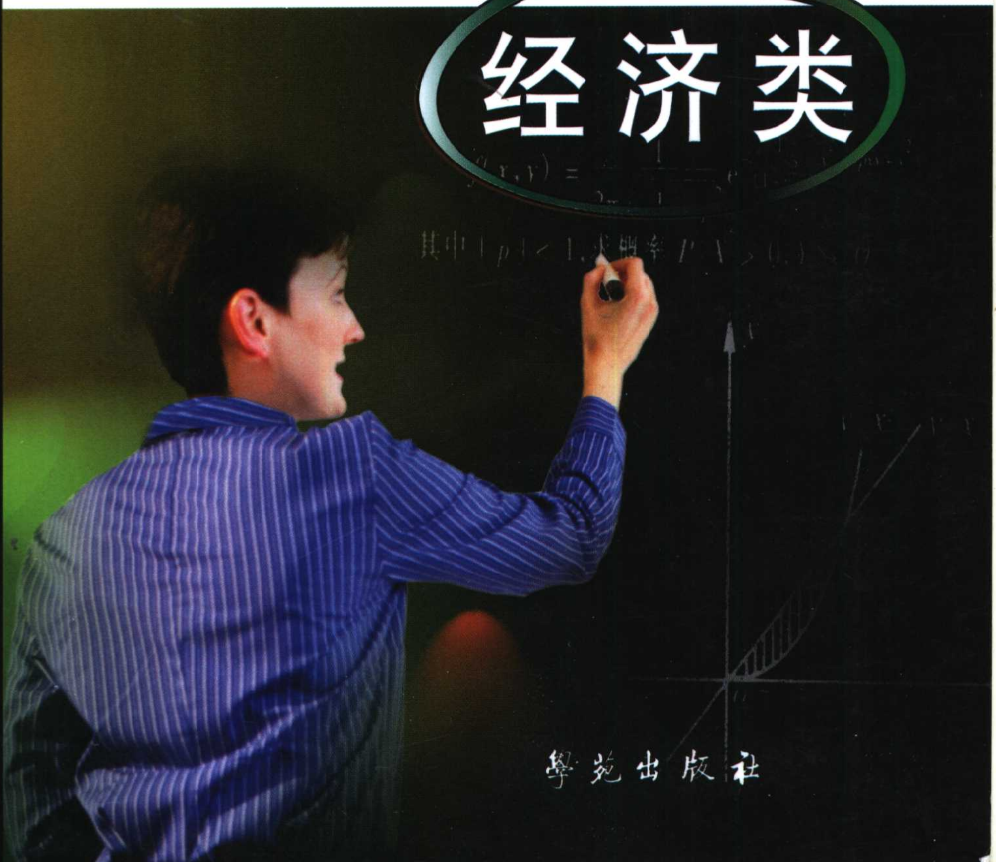
新世纪大学数学课金版辅导丛书

概率论与数理统计

金版辅导

JIN BAN FU DAO

经济类



學苑出版社

新世纪大学数学课金版辅导丛书

概率论与数理统计金版辅导

（经济类）

主编 陆璇（清华大学数学系教授）

本册编者 李克华 曾朝阳

學苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计金版辅导(经济类)/陆璇主编. -北京:学苑出版社,2001.5

(新世纪大学数学课金版辅导丛书)

ISBN 7-5077-1844-1

I. 概… II. 陆… III. ①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料-2001 IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 11830 号

学苑出版社出版发行
北京市万寿路西街 11 号 100036
河北省香河县新华印刷有限公司 印刷
880×1230 32 开本 43.75 印张 1079 千字
2001 年 4 月北京第 1 版 2002 年 9 月北京第 2 次印刷
总定价:49.00 元(共三册) 本册定价:16.00 元

前　　言

本书兼顾学习指导和考研指导，力求让读者对大纲要求的知识点有全面深刻的理解和掌握。本书注重一题多解，这有助于读者全面理解和掌握所学知识，提高解题技巧。故它不同于一般教科书、习题集和题解，有其独到之处。

书中的每一章按如下几部分展开：知识要点、能力培养与解题技巧、1990～2001年考研试题归类精选解析、同步测试题及参考答案和本章知识小结。本书最后还有三套综合模拟试题及详细解答。

知识要点：对每章的知识要点进行详细的归纳总结，注意各章节前后的融会贯通。对相似知识点用表格对比列出，对容易误解和混淆的知识点做了特别的说明。

能力培养与解题技巧：按知识点分类，列举了相关知识点大量的和较为全面的例题与题型。有的章节还专门列出综合题型。例题难度由浅入深，每道例题有所用知识点的总结，综合题和有难度的题有提示分析。每类例题后面有本类习题解题小结。对在考试中频繁出现的考点，举的例题多些；相反，例题少些。

1990～2001年考研试题归类精选解析：按时间先后收集了1990～2001年用到本章知识点的典型考研试题。从中读者不仅可以看出各章节历届考研课题中占的比例，还能发现考研题的难度、常见题型、常见考点及出题趋势等信息。

注：考研题前面的标号表明其出处，试题的编号规则如下：

1990～2001年考研试题归类精选解析：选取了1990～2001年数学三、数学四和数学五的考研试题进行分析和讲解，以期能对报考研究生的读者给予帮助。我们对所列举的每道试题都进行了统一编号。其编号规则如下：编号的前两位表示年代；第三位表示数学大类；第四、五位表示第几大题；第六、七位表示第几小题。例如：2001年数学三第二大题第3小题可表示为0130203。

同步测试题及参考答案：是对前面知识要点和例题的补充与巩固。习

题样式类型以本章习题在历届考研试题中出现的模式题型为样本编写，习题答案按难易分详略解答。

本章知识内容小结：对本章中的知识重点和知识难点进行体系结构的归纳总结，对各种典型题型及其解题思路与方法进行小结。

本书是根据编者的教学实践和经验编写的，希望能对学习《概率论与数理统计》的读者和准备考研的读者有所帮助。作者在编写本书时，参阅了有关书籍，引用了一些例子，恕不一一指明出处，在此一并向有关作者致谢。由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，敬请读者不吝赐教。

编　者

目录

第一章　随机事件与概率

知识要点

本章的知识大致可分为如下五个方面：事件及其关系与运算；概率及其性质与加法公式；条件概率和乘法公式；全概率公式和贝叶斯公式；事件的独立性和贝努利定理。下面就对这五个知识点作一简单回顾。

一、事件及其关系与运算

1. 有关随机事件的基本概念

对客观现象观察的过程称为随机试验，简称为试验，通常用 E 表示。概率论中随机试验必须具备下面三个特点：

① 重复性：可以在相同的条件下任意多次地重复进行；

② 明确性：试验具有多个可能结果，且在试验前可以明确试验的所有可能结果；

③ 随机性：每次试验之前，不知道这次试验会出现哪一个结果。

随机试验的结果称为随机事件，简称事件，通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示。随机事件在一次试验中可能发生也可能不发生，但在大量的重复试验中，其发生情况表现出统计规律性。一次试验中必定发生的事件或必定不发生的事件不是随机事件。

随机试验 E 的所有基本可能结果(不可再分的可能结果)的集合成为 E 的样本空间，用 Ω 表示。样本空间的每一个元素，即 E 的每一个基本可能结果，称为样本点。显然，随机事件是样本空间的子集，同时又包含若干个样本点。

只包含一个样本点的随机事件称为基本事件，习惯上用 ω 表示。显然，样本空间的一个样本点就是一个基本事件。基本事件是最简单的随机事件，在每次试验中只能且必须发生该试验的一个基本事件。与基本事件对应，包含多个样本点的随机事件称为复合事件。复合事件也包含多个基本事件。可以看出，一个随机事件要么是基本事件，要么是复合事件，它们都是样本点的集合，且是样本空间的子集。

必然发生的事件称为必然事件。显然必然事件包含所有的样本点，故用表示样本

空间的符号 Ω 表示。必然不发生的事件称为不可能事件。不可能事件不包含任何样本点,故用空集符号 $\emptyset$ 表示。必然事件和不可能事件都不是真正意义的随机事件,只是为了讨论的方便和统一,把他们当作两个特殊的随机事件看待。

2. 随机事件的关系和运算

事件是一个集合,因而事件间的关系和运算自然按照集合论中集合之间的关系和运算处理。设随机试验 E 的样本空间为 Ω,A、B、C 为 E 的随机事件,随机事件间有如下的关系和运算:

(1) 事件的包含

如果事件 A 发生,则事件 B 一定发生,就称事件 B 包含事件 A,用 $B \supset A$ 或 $A \subset B$ 表示。这时属于 A 的每一个样本点一定属于 B。图 1-1 表示了事件的包含关系。

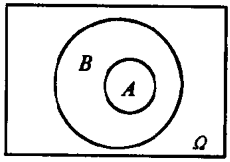


图 1-1

显然,对于随机事件 A,$\emptyset \subset A \subset \Omega$ 总是成立的。

(2) 事件相等

若 $A \subset B$ 且 $A \supset B$,则称事件 A 与 B 相等,用 $A = B$ 表示。这时,A、B 包含的样本点完全相同,也就是 A、B 表示同一个随机事件。

(3) 事件的和(并)

称事件“事件 A 与 B 中至少有一个发生”为事件 A 与 B 的和(并)。用 $A + B$ 或 $A \cup B$ 表示。

图 1-2 中的阴影部分表示事件 A 与 B 的和 $A \cup B$。显然,事件 $A \cup B$ 是由属于事件 A 和 B 的所有样本点组成的集合。

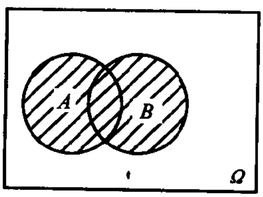


图 1-2

(4) 事件的积(交)

称事件“事件 A 与 B 同时发生”为事件 A 与 B 的积(交)。用 $A \cap B$ 或 AB 表示。

图 1－3 中阴影部分表示事件 A 与 B 的积 AB。显然,事件 AB 是由属于 A 且属于 B,即 A 与 B 的所有公共样本点组成的集合。

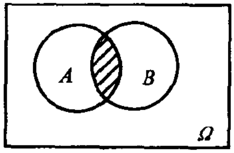


图 1－3

(5) 事件的差

称事件“事件 A 发生而事件 B 不发生”为事件 A 与 B 的差,用 $A-B$ 表示。

图 1－4 中阴影部分表示事件 A 与 B 的差 $A-B$。显然,事件 $A-B$ 是由属于 A 但不属于 B 的样本点组成的集合。

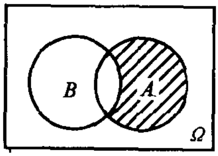


图 1－4

(6) 事件的互不相容(互斥)

若事件 A 与 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 为互不相容(或互斥)的两个事件,用 $AB=\varnothing$ 表示。

若事件 A、B 互斥,则它们没有公共样本点。图 1－5 直观地表示了事件 A、B 的互不相容关系。显然,随机试验 E 的所有基本事件都是两两互不相容的。

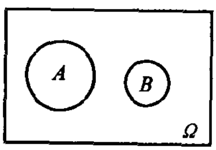


图 1－5

互不相容的两事件不能同时发生,但却可以同时不发生。

(7) 事件的对立(互逆)

若事件 A、B 不能同时发生,但至少有一个发生,即 A、B 满足 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$,则称 A 与 B 是对立的(或互逆的)事件,记作 $\overline{A}=B$ 或 $A=\overline{B}$。

图1－6直观地表示了事件A、B的对立关系。若事件A、B对立，则A与B没有公共样本点，且在样本空间Ω中，属于A的样本点一定不属于B，而不属于A的样本点一定属于B。

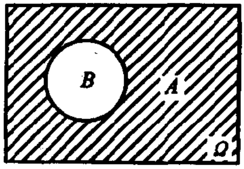


图1－6

注意：互斥与对立的区别与联系。简而言之，互斥为$AB=\varnothing$；而对立为$AB=\varnothing$且$A\cup B=\Omega$。显然，对立的条件更为苛刻。若事件A与B对立，则它们必然互斥；反之则不一定。

(8) 完备事件组

如果事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两互不相容，且$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$构成一个完备事件组。

在以上的8个定义中，(1)、(2)、(6)、(7) 给的是事件间关系的定义；而(3)、(4)、(5) 给的是事件间运算的定义。定义事件的关系和运算借用了集合论中的记号。用表1－1比较说明这些记号在概率论和集合论中的不同意义。

表1－1　各记号在概率论和集合论中不同意义的比较

记　　号	概率论中的意义	集合论中的意义
Ω	样本空间，必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点，基本事件	元素
A	事件	子集
$A\subset B$	事件A发生，则B一定发生	A是B的子集
$A=B$	事件A与B是同一事件	A与B相等
$A+B$	事件A与B中至少有一个发生	A与B的并集
AB	事件A与B同时发生	A与B的交集
$A-B$	事件A发生，而事件B不发生	A与B的差
$AB=\varnothing$	事件A与B互不相容	A与B的交集为空集
$\overline{A}$	事件A的对立事件	A的补集

注意：前面用于表示事件关系和运算的示意图1－1到1－6称为维恩(Venn)图。

用这种图表示事件间的关系和运算非常直观和明了，有利于分析和理解事件间的关系和运算。希望读者学会并掌握这种表示方法，对后面的学习将有很大的帮助。

3. 事件间关系和运算的性质

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A, AB = BA$

(2) 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$

(3) 分配律：$A(B + C) = AB + AC, A(B - C) = AB - AC$

$A + BC = (A + B)(A + C)$

(4) 德·摩根律 $\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$

该规律对 n 个事件的情况也可以推广。设有 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，则

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}$$

$$\overline{A_1 A_2 \cdots A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$$

(5) 双重否定律：$\overline{\overline{A}} = A$

(6) 排中律：$A \cup \overline{A} = \Omega, \overline{A} = \Omega - A$

(7) 矛盾律：$A\overline{A} = \varnothing$

(8) 差积转换律：$A - B = A\overline{B}$

4 常用结论

(1)$\varnothing \subset A \subset \Omega$

(2)$AB \subset A \subset A \cup B, (A - B) \subset A \subset A \cup B$

(3)$A \cup \Omega = \Omega, A \cup \varnothing = A$

(4)$A\Omega = A, A\varnothing = \varnothing$

(5) 若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B, AB = A$

(6)$\overline{\Omega} = \varnothing, \overline{\varnothing} = \Omega$

(7) $A \cup A = A$

$(A - B) \cup A = A$

$(A \cup B) \cap A = A$

(8)$A - B$ 与 AB 互不相容，且 $A = (A - B) \cup AB$

(9) $A - B$、$B - A$、AB 两两互不相容，且 $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup AB$，即 $A\overline{B}$、$\overline{A}B$、AB 两两互不相容，且 $A \cup B = A\overline{B} \cup \overline{A}B \cup AB$

(10)$A - B = A - AB, B - A = B - AB$

注意：事件的关系和运算的性质及常用结论非常重要，务必熟悉。它们不仅在讨论各事件间的关系和运算时经常用到，且在今后的概率计算中，也经常需要将一些事件用另一些事件的运算来表示。

二、概率及其性质与加法公式

随机事件的发生在多次试验中表现出统计规律性。概率就用于研究这种统计规律性。简单地说，概率是对事件发生可能性大小的定量描述，是事件的本质特性。它与用长度度量线段、用面积度量平面图形、用质量度量物质的多少……是类似的。我们用 $P(A)$ 表示事件 A 的概率。

1. 概率的统计定义

如果在 n 次重复试验中事件 A 发生了 m 次，当 n 逐渐增大时，比值 $\frac{m}{n}$ 稳定地在某一常数 p 附近波动，且 n 越大，波动的幅度越小，则称此常数为事件 A 的概率，记为 $P(A) = p$。

$\frac{m}{n}$ 与 p 之间有很大的不同。$\frac{m}{n}$ 表示在一轮 n 次重复试验中事件 A 出现的频率。在不同轮的 n 次重复试验中，事件 A 出现的次数 m 不一定相同，故 $\frac{m}{n}$ 也不会相同，且必须进行 n 次重复试验才能算出事件 A 发生的频率，这就说明事件 A 发生的频率具有随机性；而 p 作为事件 A 的概率，是 A 的固有特性，它反映在一次试验中事件 A 发生的可能性的大小，它不会因不同轮的 n 次重复试验而不同，这才是概率这个概念的抽象的、最本质的东西所在。

2. 概率的古典定义

如试验 E 共有 n 个基本事件 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$，且在每次试验中各基本事件出现的可能性相同，而事件 A 由其中 m 个基本事件 $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_m} (m \leqslant n)$ 组成，则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

在概率的古典定义中，要求试验必须具有两个特点：

① 试验的样本点只有有限个；

② 每次试验中各基本事件 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 出现的可能性完全相同。

具有这两个特点的试验称为古典试验，建立在古典试验上的数学模型称为古典概型。在处理实际问题时，我们一般将具有对称性、对等性、均匀性的试验都当作古典试验看待。如抛硬币、投骰子、摸球、取产品等。

3. 概率的公理化定义

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，给 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记作 $P(A)$，如果它满足下列条件：

① 非负性：对于每一事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

② 完全性：$P(\Omega)=1$；

③ 完全可加性：对于任意有限个或可数个两两互斥的事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

概率的统计定义和公理化定义都未给出计算概率的具体公式，只有概率的古典定义给出了概率的计算公式。概率的统计定义直观、具体，容易理解，但不够严格，且必须建立在大量的重复试验的基础上；概率的古典定义简单、明确，容易理解，还可以直接计算，可操作性强；概率的公理化定义严格，却较为抽象，它指出了概率的一个重要特性：任何事件的概率都是一个不大于1的非负实数。

4. 概率的基本性质

(1) 对于任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$

(2) 对于必然事件，$P(\Omega)=1$

对于不可能事件，$P(\varnothing)=0$

(3) 对于两个互斥事件 A 和 $\overline{A}$，$P(\overline{A})=1-P(A)$

(4) 若 $A\subset B$，则 $P(B)\geqslant P(A)$，且

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

(5) $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$

5. 概率的加法公式

(1) 设 A、B 为任意两事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

(2) 设 A、B 为两个互斥事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

可以对以上两式进行推广，得到

(3) 对于 n 个任意事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

(4) 对于 n 个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

(5) 若 n 个事件构成一个完备事件组，则它们的概率和为1，即

$$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1$$

三、条件概率和乘法公式

1. 条件概率

在事件 B 已经发生的条件下,事件 A 发生的概率称为事件 A 发生的条件概率,简称 A 对 B 的条件概率,用 $P(A \mid B)$ 表示。且若满足 $P(B) > 0$,则

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

关于条件概率,有两点需要补充说明:

(1) 条件概率是随机事件的概率,故其依然具有概率的特性。

(2) 概率 $P(A)$ 与条件概率 $P(A \mid B)$ 的区别:设有古典试验的样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$。若事件 A 包含 $m(m \leqslant n)$ 个样本点,事件 B 包含 $s(s \leqslant n)$ 个样本点,而这 s 个样本点有 $k(k \leqslant \min(m,s))$ 个是 A 包含的,即事件 AB 包含 k 个样本点,则

$$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的样本点数}}{\text{样本空间中的样本点数}} = \frac{m}{n}$$

$$P(A \mid B) = \frac{\text{事件 } AB \text{ 包含的样本点数}}{\text{事件 } B \text{ 包含的样本点数}} = \frac{k}{s}$$

若将 $B = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_s}\}$ 看作 E 的样本空间 Ω 的缩减的样本空间,那么可以说,$P(A)$ 与 $P(A \mid B)$ 的区别在于相对的样本空间不同,$P(A \mid B)$ 在缩小的样本空间上讨论,而 $P(A)$ 在原样本空间上讨论。

2. 乘法公式

设 A、B 为两个随机事件。

若 $P(A) > 0, P(AB) = P(A)P(B \mid A)$

若 $P(B) > 0, P(AB) = P(B)P(A \mid B)$

对于 n 个任意事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

四、全概率公式和贝叶斯公式

1. 全概率公式

如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为一完备事件组,$P(A_i) > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$,则对于任意事件 B,有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

2. 贝叶斯公式(逆概公式)

如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为一完备事件组,$P(A_i) > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$,则对于任意一个概率不为零的事件 B,有

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)} \qquad (k = 1,2,\cdots,n)$$

关于全概率公式和贝叶斯公式有两点需要说明：

(1) 全概率公式和贝叶斯公式都需要找到一个完备事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，将 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 看作是导致 B 发生的原因，而这些原因的概率是先验概率，是已知的或容易求的。

(2) 贝叶斯公式给出的是一组(n 个) 等式，等式右端分母实际上就是 $P(B)$，实际上就是求 A_k 对 B 的条件概率。$P(A_k \mid B)$ 反映了试验之后各种原因发生的概率，是 $P(A_k)(k=1,2,\cdots,n)$ 的修正值，称之为后验概率。所以贝叶斯公式常用于已知试验结果，寻找某种原因发生可能性的计算。

五、事件的独立性和贝努利定理

1. 事件的独立性

事件 A 发生的可能性不受事件 B 发生与否的影响，即 $P(A \mid B)=P(A)$，则称事件 A 对于事件 B 独立。事件的独立是相互的，所以也称事件 A、B 相互独立。

若事件 A、B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 B、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立。

事件 A 与 B 相互独立的充要条件是

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

上式从乘法公式得来，将 $P(B)=P(B \mid A)$ 带入 $P(AB)=P(A)P(B \mid A)$ 就可得 $P(AB)=P(A)P(B)$。所以若事件 A 与 B 相互独立，乘法公式变形为

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

还要注意事件的独立性的推广，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立是指 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任何一个事件发生的可能性都不受其他任何一个或几个事件发生与否的影响。以事件 A、B、C 为例说明三个事件相互独立的充要条件是：

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i)$$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})$$

2. 独立试验序列概型和贝努利定理

在概率论中，将在同样条件下重复进行的一系列完全相同的试验称为独立试验序列，其数学模型称为独立试验序列概型。

独立试验序列的重要特点是:(1) 每次试验的结果都与其他各次试验的结果无关,即 n 次试验之间是相互独立的,所以也将独立试验序列称为独立重复试验;(2) 其次是每次试验的结果为有限个。

特别地,若独立试验序列的每次试验的结果只有两种 A 与 $\bar{A}$,则这种独立试验序列概型又称为贝努利概型。

在贝努利概型中,设事件 A 在每次试验中发生的概率为 $p(0 < p < 1)$,则在 n 次试验中事件 A 发生 $k(0 \leqslant k \leqslant n)$ 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

这个公式称为二项概率公式。

六、排列组合回顾

1. 两个基本原理

(1) 加法原理　假设完成一件事情有 n 种不同的方式,而第 k 种方式又有 r_k 种方法($k = 1,2,\cdots,n$),则完成此事情共有

$$r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$$

种不同的方法。

(2) 乘法原理　假设完成一件事情必须 n 个不同的步骤,而第 k 个步骤又有 r_k 种不同的方法,则完成此事情共有

$$r = r_1 r_2 \cdots r_n$$

种不同的方法。

2. 排列

(1) 不允许重复的排列　从 n 个不同元素中任取 $r(r \leqslant n)$ 个元素(不允许重复)排成一列,称为选排列,这样的排列共有

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

种不同的排法。(规定:$0! = 1$;若 $r > n, P_n^r = 0$)

若 $r = n$,有 $P_n^n = n!$,叫做 n 个元素的全排列。

(2) 允许重复的排列　从 n 个不同元素中任取 r(r 可以 $\geqslant n$)个元素(允许重复)排成一列,这样的排列共有

$$n^r$$

种不同的排法。

(3) 具有相同元素的全排列　设 n 个元素由 $k(k \leqslant n)$ 种不同的元素组成,同种元素是不可区分的,第 i 种元素有 $r_i(i = 1,2,\cdots,k)$ 个,且 $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$,则这 n 个元素的全排列共有