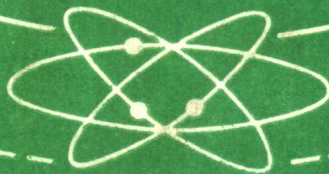


高等学校教材

自动控制原理 (下)

周其节 李培豪 高国桢 编



電子工業出版社

自动控制原理

(下 册)

周其节 李培豪 高国荣 编

电子工业出版社

TP273

内 容 简 介

本书讨论经典自动控制理论的基本内容。

全书分上、下两册。上册讨论线性连续控制系统的分析与综合。下册讨论非线性连续控制系统的分析方法。线性离散控制系统的分析与综合。

本书是工科高等学校自动控制、工业电气自动化及相近专业的教材，也可供有关专业师生及从事自动化方面工作的工程技术人员参考。

自 动 控 制 原 理

(下 册)

周其节 李培豪 高国荣 编

责任编辑：王明君

电子工业出版社出版 (北京市万寿路)

新华书店沈阳发行所发行 各地新华书店经售

鞍山市旧堡区印刷厂

开本：787×1092 1/16 印张：12.25 字数：300千字

1985年11月第1版 1985年11月第1次印刷

印数：11000册 定价：(上、下册)7.30元

统一书号：15290·182

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校工科电子类专业课教材的编审、出版的组织工作。从一九七七年底到一九八二年初，由于各有关院校，特别是参与编审工作的广大教师的努力和有关出版社的紧密配合，共编审出版了教材159种。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应社会主义现代化建设培养人才的需要，反映国内外电子科学技术水平，达到“打好基础、精选内容、逐步更新、利于教学”的要求，在总结第一轮教材编审出版工作经验的基础上，电子工业部于一九八二年先后成立了高等学校《无线电技术与信息系统》、《电磁场与微波技术》、《电子材料与固体器件》、《电子物理与器件》、《电子机械》、《计算机与自动控制》，中等专业学校《电子类专业》、《电子机械类专业》共八个教材编审委员会，作为教材工作方面的一个经常性的业务指导机构。并制定了一九八二～一九八五年教材编审出版规划，列入规划的教材、教学参考书、实验指导书等共217种选题。在努力提高教材质量，适当增加教材品种的思想指导下，这一批教材的编审工作由编审委员会直接组织进行。

前 言

本教材系由计算机与自动控制教材编审委员会自动控制编审小组评选审定，并推荐出版。

该教材由华南工学院周其节担任主编，重庆大学周其鉴担任主审。编审者均依据自动控制编审小组审定的编写大纲进行编写与审阅。

本课程的参考教学时数为100—110学时。内容包括经典控制理论的线性定常系统理论、非线性系统理论和离散系统理论。本教材分上、下两册。上册第一章、第二章介绍自动控制系统的一般概念和控制系统的数学模型。第三章至第五章分别论述分析线性定常系统常用的三种方法：时域分析法、根轨迹法和频率法。对各种分析方法的基本概念、基本理论和主要方法都作了较为详细的介绍，并以频率法为重点。第四章中还简单介绍了线性定常系统的根轨迹法综合。线性定常系统的频率法综合在第六章中专门介绍。下册第七章、第八章论述非线性系统理论，分别讨论描述函数法和相平面分析法。第九章和第十章介绍离散控制系统的基本理论及离散控制系统的分析与综合。在控制理论和控制工程上已广泛使用电子计算机的情况下，本教材在第三、四、五、六各章中都增加了利用计算机分析系统和进行控制系统辅助设计的内容。

本教材编写过程中，力求突出重点，精简篇幅，既讲透基本原理和基本方法又保持课程内容的系统性和连贯性。为便于自学和使读者更好地掌握基本概念、基本理论以及分析、综合系统的基本方法，教材各章都有较多的例题和习题。使用本教材时必须注意由浅入深、理论结合实际，完成一定份量的习题并配合相应的实验。本课程上册参考教学时数为60—65学时，下册为40—45学时。本课程的实验参考教学时数为15—20学时。

本教材由李培豪编写上册各章，高国燊编写下册各章，周其节统编全稿。参加审阅工作的还有吴志清、汪庭凯同志，他们为本书提出了许多宝贵的修改意见，这里表示诚挚的感谢。由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编 者

一九八五年五月

目 录

第七章 描述函数法

- § 7-1 非线性控制系统概述 (1)
- § 7-2 描述函数法 (5)
- § 7-3 用描述函数法研究非线性控制系统的自振荡 (21)
- § 7-4 用描述函数法分析非线性控制系统的自振荡举例 (34)

第八章 相平面分析法

- § 8-1 相平面分析法 (42)
- § 8-2 相平面图的绘制 (49)
- § 8-3 相平面图分析 (58)
- § 8-4 用相平面分析法分析二阶非线性控制系统 (69)
- § 8-5 利用非线性特性改善系统的控制性能 (82)

第九章 线性离散(时间)控制系统理论基础

- § 9-1 线性离散(时间)控制系统 (94)
- § 9-2 采样过程和采样定理 (100)
- § 9-3 Z变换 (106)
- § 9-4 用Z变换法解差分方程 (121)

第十章 线性离散(时间)控制系统的分析与综合

- § 10-1 脉冲传递函数 (125)
- § 10-2 离散控制系统稳定性分析 (132)
- § 10-3 离散控制系统的稳态误差 (138)
- § 10-4 离散控制系统的动态性能 (142)
- § 10-5 离散控制系统的根轨迹法 (151)
- § 10-6 离散控制系统的频率特性法 (160)
- § 10-7 最少拍离散控制系统的综合 (170)
- § 10-8 $D(z)$ 的稳定性及其实现 (176)
- § 10-9 线性离散控制系统仿真 (183)

第七章 描述函数法

§ 7-1 非线性控制系统概述

一、研究非线性控制系统的意义

当自动控制系统是完全由线性环节组成的纯线性系统时,可以利用线性理论来研究。但是,组成实际自动控制系统的各环节不可避免地带有某种程度的非线性(元件或环节的静特性不是线性的)。此外,为了改善系统的性能,往往人为地把非线性元件引入系统中。系统中只要包含了一个非线性环节,整个系统就是非线性系统。所以,一般说来,实际的自动控制系统都是非线性控制系统。

自动控制系统中所包含的非线性特性可以分为两类。对于一些不太严重的非线性特性,如果可以认为,系统在运行过程中总是偏离工作点很少(这十分符合一般恒值调整系统的运行情况),则可以采用微偏法把非线性特性线性化。在这种情况下,应用线性理论是合适的。这种能采用微偏法线性化的非线性特性称为非本质非线性。另一类非线性特性,例如继电特性,其输入 x 与输出 y 的关系如图7-1所示。对这样的非线性特性是不可能采用微偏法进行线性化的。这样的非线性特性称为本质非线性。

如果系统中存在本质非线性环节,便不能利用线性理论进行研究。因此工程上,有时仅仅运用线性理论是不够的,还需要有研究分析非线性控制系统的理论。

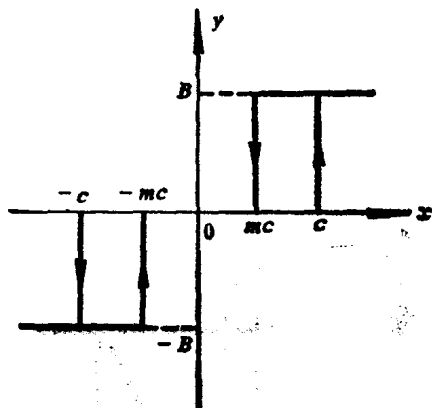


图7-1 继电特性

二、控制系统的典型非线性特性

在实际系统中所遇到的非线性特性是各式各样的,但是可以归纳为两大类:一类是单值非线性特性,其输入与输出有单一对应关系;另一类是非单值的非线性特性,对应于同一输入有一个以上的输出量。

经常遇到的典型非线性特性有以下几种:

1. 饱和限幅特性

任何实际的放大器只能在一定的输入范围内保持输出量和输入量之间的线性关系。输入量超出此范围,输出量便保持为一个常值。

许多元件的运动范围,运动速度由于受到能源、功率等条件的限制,也都具有饱和限幅特性。

有时,为了限制过负荷,人们还故意引入饱和限幅特性。

饱和限幅特性如图7-2所示,其中 $-c < x < +c$ 的区域叫做线性范围,线性范围之外称为饱和区。

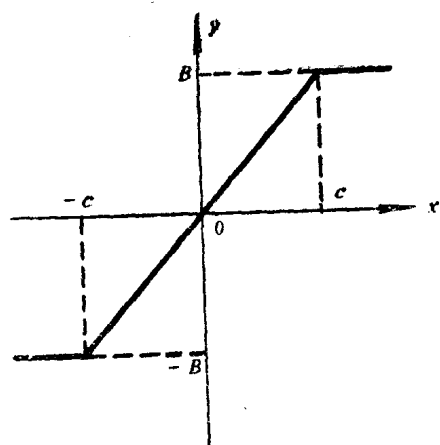


图7-2 饱和限幅特性

3. 具有不灵敏区的饱和特性

在很多情况下系统的元件同时存在死区和饱和限幅特性。譬如，测量元件的最大测量范围与最小测量范围都是有限的；采用电压电压控制的直流电动机其速度特性是既有不灵敏区又有饱和限幅特性的。

具有不灵敏区的饱和特性如图7-4所示。

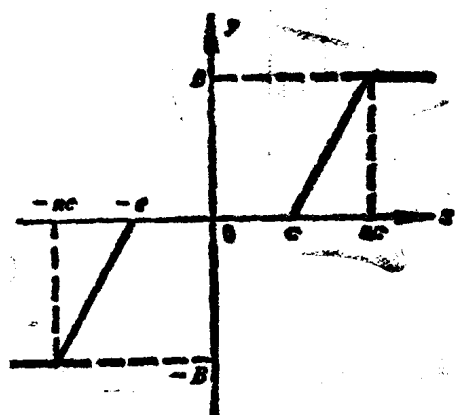


图7-4 具有不灵敏区的饱和特性

2. 不灵敏区（死区）特性

一般的测量元件，执行机构都具有不灵敏区特性。如敏感元件对于一定范围内的输入量感受不到；执行机构并不是一有输入信号便马上动作。它们都是需要输入信号大到一定程度以后才有与输入成比例的输出。

这种只有当输入量超过一定值后才有输出的特性称为不灵敏区特性，如图7-3所示。其中， $-c < x < +c$ 的区域叫做不灵敏区或死区。

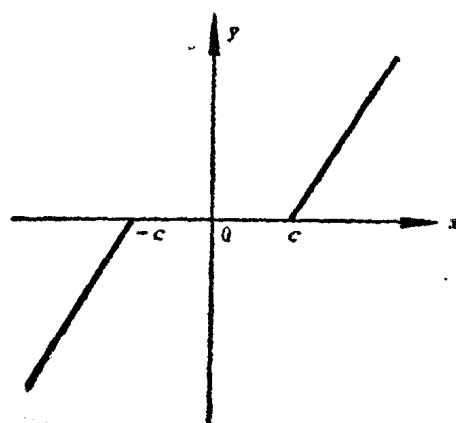


图7-3 不灵敏区特性

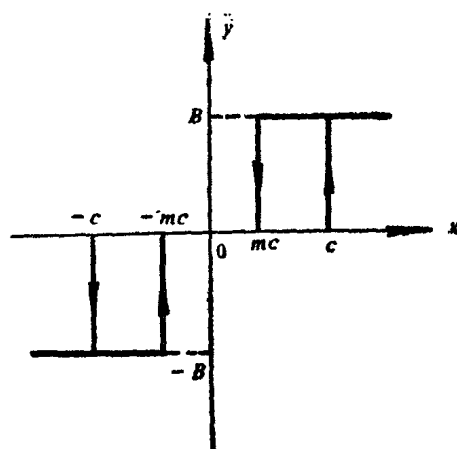


图7-5 具有滞环的三位置继电器特性

4. 继电器特性

实际继电器的特性如图7-5所示，输入和输出之间的关系不完全是单值的。由于继电器吸合及释放时磁路的磁阻不同，继电器的吸合与释放电流是不相等的。因此，继电器

的特性具有一个滞环（回差特性）。用于鉴别电平的射极耦合触发器等比较电路也具有同样的特性。这种特性称为具有滞环的三位置继电特性。当 $m = -1$ 时，便得到具有滞环的两位置继电特性，如图7-6所示。当 $m = +1$ 时，便得到具有三位置的理想继电特性，这是继电器在没有回差时的理想情况。这种特性如图7-7所示。

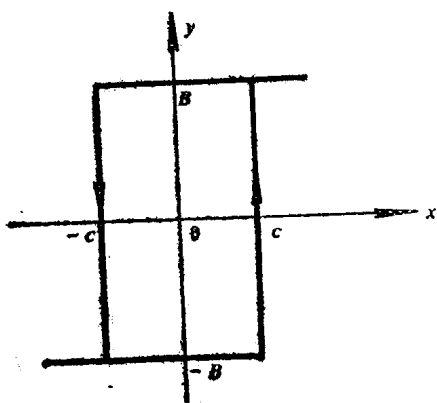


图7-6 具有滞环的两位置继电特性

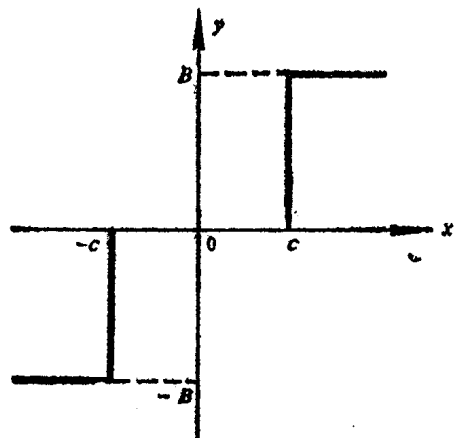


图7-7 具有三位置的理想继电特性

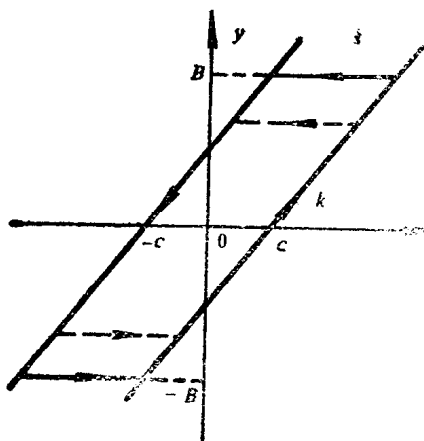


图7-8 间隙特性

5. 间隙特性

间隙特性的特点是：当输入量的变化方向改变时，输出量保持不变，一直到输入量的变化超出一定数值（间隙）后，输出量才跟着变化。凡是有机械传动的地方一般总有间隙存在。齿轮传动中的齿隙是最明显的例子。间隙特性如图7-8所示。

三、非线性控制系统的特殊性

系统中含有的非线性特性会给系统的动力学特性带来一定的影响，出现一些特殊现象。这些特殊现象往往不能用线性系统理论来解释。

1. 不能应用叠加原理

描述线性控制系统动力学特性的线性微分方程满足叠加原理。如果系统对输入 x_1 的响应为 y_1 ，对 x_2 的响应为 y_2 ，则在输入信号

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

作用下（ a_1 、 a_2 为常量），系统的总的响应为

$$y = a_1 y_1 + a_2 y_2$$

这便是叠加原理。但是，在非线性系统中，这种关系便不再成立。例如对图7-2的饱和限幅特性，设：

$$x_1 < c ; x_2 < c$$

则 x_1 ， x_2 单独作用的结果分别为：

$$y_1 = kx_1, y_2 = kx_2$$

如果 $x = x_1 + x_2 > c$

则在 x 作用下的输出为:

$$y = B \neq kx_1 + kx_2$$

显然, 叠加原理不再成立。

在线性系统中, 一般可以采用传递函数、频率特性、根轨迹法等概念。同时, 由于线性系统的运动特征和输入幅值、系统的初始状态无关, 所以通常是在典型输入函数和零值初始条件下进行研究。在非线性的系统中, 由于叠加原理不成立, 不能应用上述方法。

2. 稳定性问题

对于线性系统, 如果它的一个运动, 即描述系统的方程在一定外作用和初始条件下的解是稳定的, 那么线性系统中可能的全部运动都是稳定的。对于非线性系统, 不存在系统是否稳定的笼统概念, 要研究的是非线性系统平衡状态的稳定问题。一个非线性系统, 它的某些平衡状态 (如果有不止一个平衡状态的话) 可能是稳定的, 而另外一些平衡状态却是不稳定的。

在线性系统中, 系统的稳定性只与系统的结构形式和参数有关, 而与外作用及初始条件无关。非线性系统的稳定性问题除了和系统的结构形式和参数有关外, 还与外作用及初始条件有关。

3. 自持振荡问题

描述线性系统的微分方程可能有一个周期运动解, 但这一周期运动是物理上不可实现的。例如, 二阶无阻尼系统的自由运动解是 $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ 。这里, ω 只取决于系统的结构和参数, 而振幅 A 和初相 φ 取决于初始状态。一旦系统受到扰动, A 和 φ 的值都会改变, 原来的周期运动不能保持原来的振幅。也就是说, 我们不可能观察到一个振幅不改变的周期运动。这种周期运动就叫做不具有稳定性。在非线性的系统中, 在没有外作用时, 系统中有可能发生一定频率和振幅的周期运动。并且, 当受到扰动作用后, 运动还能保持原来的频率和振幅。我们说, 这种周期运动具有稳定性。非线性系统出现的这种周期运动称为自持振荡或简称为自振。

自振是非线性系统特有的, 是非线性控制系统理论研究的重要问题。

四、非线性控制系统的分析与设计方法

实际上没有一个通用的方法求解非线性微分方程。运用模拟计算机和 (或) 数字计算机的计算机仿真技术对分析和处理非线性控制系统是非常有效的。李亚普诺夫第2方法可以用来分析任何非线性系统的稳定性, 虽然寻求李亚普诺夫函数不总是容易的。关于这些问题, 本书不准备论述。目前, 工程上广泛应用的两个分析设计非线性控制系统的方法是描述函数法和相平面分析法。本书着重论述这两种方法。

描述函数法又称为谐波线性化法, 它是一种工程近似方法。应用描述函数法研究非线性控制系统的自振时, 能给出振荡过程的基本特性 (如振幅、频率) 与系统参数 (如放大系数、时间常数等) 的关系, 给系统的初步设计与调整提供一个思考方向。描述函数法可以看成是线性控制系统理论中的频率法在研究非线性系统中的推广。线性控制理

其中的很多结果在描述函数法中可以得到运用。

非线性控制系统的相平面分析法是状态空间分析法在二维空间情况下的应用。它是一种用图解法求解二阶非线性常微分方程的方法。相平面分析方法适用于分析二阶系统。由于它应用相平面上的轨迹曲线来描述系统状态的运动过程，所以可以在相平面图上分析系统平衡状态的稳定性，分析系统的瞬态响应性能等。

§ 7-2 描述函数法

一、描述函数的基本概念

描述函数法是分析非线性控制系统的一种近似方法。只含有一个非线性环节的控制系统经过适当的变换可以用图7-9表示。

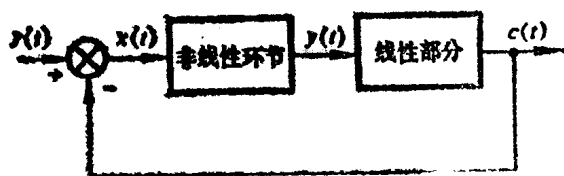


图7-9 非线性控制系统

假定非线性环节的输入信号为

$$x(t) = A \sin \omega t$$

一般情况下，输出 $y(t)$ 是非正弦周期信号。将 $y(t)$ 按富里哀级数展开，可以认为 $y(t)$ 是由恒定分量 y_0 ，基波分量 $y_1(t)$ 和高次谐波分量 $y_2(t)$ ， $y_3(t)$

……组成的。系统的线性部分在 $y(t)$ 作用下其稳态响应 $c(t)$ 也含有相应的谐波分量 $c_0(t)$ ， $c_2(t)$ ……每个谐波分量的幅值和初相位取决于 $y(t)$ 中各相应谐波分量及线性部分的频率特性 $G(j\omega)$ 。如果非线性特性曲线具有中心对称的性质，则输出信号的波形具有奇次对称性（波形的后半周期重复前半周期的变化，但符号相反），恒定分量 y_0 为零。又如果系统的线性部分具有良好的低通滤波器特性，则系统的稳态输出 $c(t)$ 中不包含恒定分量，并且高次谐波的幅值也远小于基波。略去这些较小的高次谐波分量，得到

$$c(t) = c_1(t)$$

在满足上面两个假设的情况下，当输入到非线性环节的信号是一个正弦振荡时，系统的输出是相同频率的正弦振荡。对于非线性环节的输出，只研究它的基波成分便足够了。我们用一个复数来描述非线性环节输入正弦振荡和输出基波的关系。用这个复数的模值表示输出信号的基波幅值和输入正弦振荡幅值之比，用这个复数的幅角表示输出信号的基波和输入正弦振荡之间的相位差（初相位差）。在非线性环节内部不包含储能元件的情况下，这个复数是输入正弦振荡幅值的函数，与频率无关，称为非线性环节的描述函数，用符号 $N(A)$ 表示。

$$N(A) = \frac{Y_1}{A} e^{j\varphi_1} \quad (7-1)$$

式中： Y_1 ——非线性环节输出信号基波分量的振幅，

φ_1 ——非线性环节输出信号基波与输入正弦振荡的相位差。

这样一种仅取输出量的基波（把非线性环节等效于一个线性环节）而忽略高次谐波的方法叫做谐波线性化法。非线性环节等效于一个具有复放大系数的放大器，所以描述

函数又称为复放大系数。又由于 $N(A)$ 描述了非线性环节输出量的基波和输入正弦振荡之间的幅值和相位关系,所以又被称为非线性环节的等效幅相特性。

二. 典型非线性特性的描述函数

1. 描述函数的计算方法

设非线性环节的特性为

$$y = f(x)$$

在正弦振荡输入 $x = A \sin \omega t$ 作用下,输出 $y(t)$ 是非正弦周期信号。用富里哀级数展开,得

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \phi_n) \end{aligned} \quad (7-2)$$

其中

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos n\omega t d(\omega t) \quad (7-3)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin n\omega t d(\omega t) \quad (7-4)$$

$$Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad (7-5)$$

$$\phi_n = \arctg \frac{A_n}{B_n} \quad (7-6)$$

如果非线性特性是中心对称的,则 $y(t)$ 具有奇次对称性, $A_0 = 0$ 。输出的基波分量为

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \\ &= Y_1 \sin(\omega t + \phi_1) \end{aligned} \quad (7-7)$$

非线性环节的描述函数为

$$\begin{aligned} N(A) &= \frac{Y_1}{A} e^{j\phi_1} = \sqrt{\frac{A_1^2 + B_1^2}{A^2}} e^{j\phi_1} \frac{A_1}{B_1} \\ &= \frac{Y_1}{A} \cos \phi_1 + j \frac{Y_1}{A} \sin \phi_1 \\ &= \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A} = b(A) + ja(A) \end{aligned} \quad (7-8)$$

2. 描述函数计算举例

(1) 饱和限幅特性

从图7-10(c)可看出 $y(t)$ 具有奇次对称性,所以 $A_0 = 0$ 。根据公式(7-3)计算 A_1 。

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos \omega t d(\omega t)$$

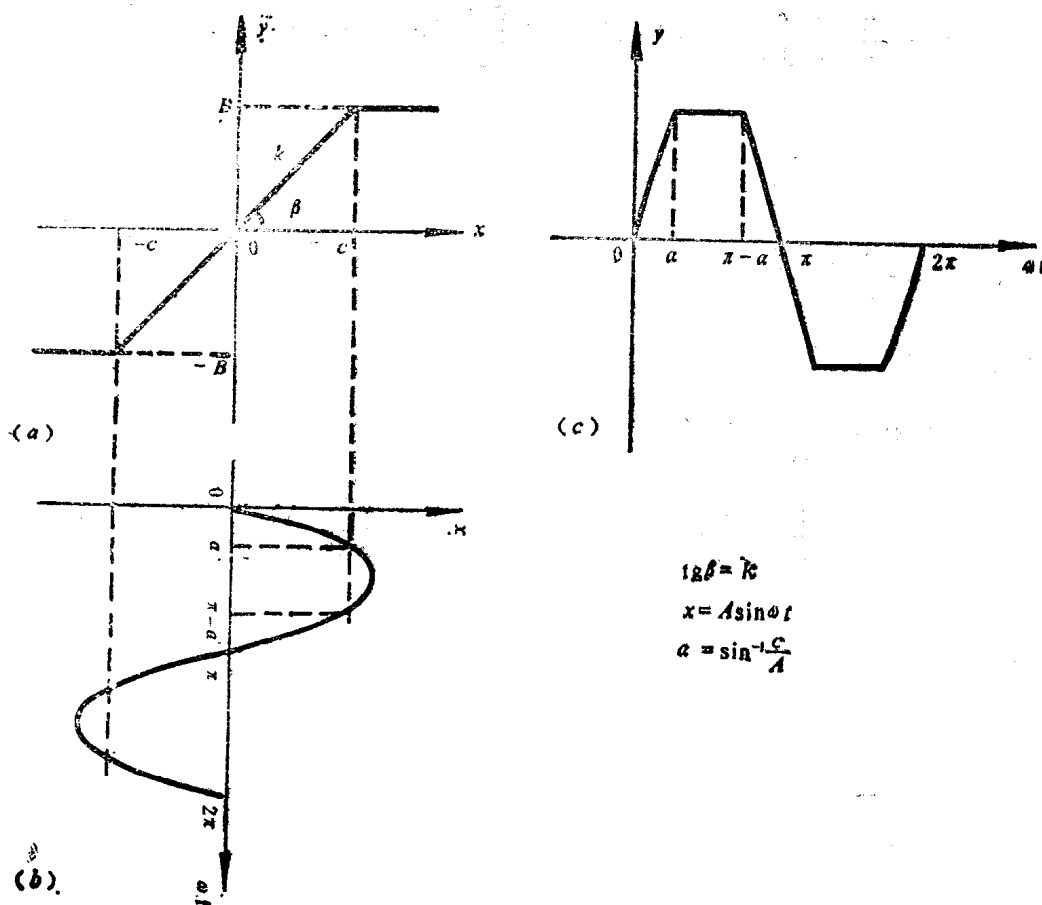


图7-10 (a) 饱和特性 (b) 输入波形 (c) 输出波形

为因 $y(t) \propto \cos \omega t$ 的波形也具有奇次对称性，所以 $A_1 = 0$ 。根据公式(7-4)计算 B_1 。

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t)$$

$y(t)$ 的波形具有偶次对称性（波形的后半周期重复前半周期的变化，且符号相同）。所以

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\alpha} y(t) \sin \omega t d(\omega t) \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t) + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t) \right) \quad (7-9)
 \end{aligned}$$

若 $A > c$, 则

$$y(t) = \begin{cases} kA \sin \omega t & 0 \leq \omega t \leq \alpha \\ kc & \alpha \leq \omega t \leq \pi - \alpha \\ kA \sin \omega t & \pi - \alpha \leq \omega t \leq \pi \end{cases} \quad (7-10)$$

把(7-10)代入(7-9)得

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^a kA \sin^3 \omega t d(\omega t) + \int_a^{\pi-a} kc \sin \omega t d(\omega t) \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\pi-a}^{\pi} kA \sin^3 \omega t d(\omega t) \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} kA \left[\sin^{-1} \frac{c}{A} + \frac{c}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{c}{A}\right)^2} \right] \quad (7-11)
 \end{aligned}$$

根据式 (7-8)

$$\begin{aligned}
 N(A) &= \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A} \\
 &= \frac{2}{\pi} k \left[\sin^{-1} \frac{c}{A} + \frac{c}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{c}{A}\right)^2} \right] \quad (7-12)
 \end{aligned}$$

$$A > c$$

显然, 只有当 $A > c$ 时研究饱和限幅特性才是有意义的。实用上常使用相对描述函数 $N_o(A)$ 。

$$N(A) = K_o N_o(A) \quad (7-13)$$

并且把相对描述函数看作是 A/d 的函数。 K_o , d 为表示环节非线性因素的量的。在本例中, 令 $K_o = k$, $d = c$ 则 (7-12) 可以改写为

$$N\left(\frac{A}{d}\right) = K_o \frac{2}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{1}{\frac{A}{d}} + \frac{1}{\frac{A}{d}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\frac{A}{d}}\right)^2} \right] \quad (7-14)$$

饱和限幅特性的相对描述函数为

$$N_o\left(\frac{A}{d}\right) = \frac{2}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{1}{\frac{A}{d}} + \frac{1}{\frac{A}{d}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\frac{A}{d}}\right)^2} \right] \quad (7-15)$$

从式 (7-15) 可知, 饱和限幅特性的描述函数是一个实数。这时的非线性环节等效于一个

放大系数为 $N(A)$ 的比例环节。图 7-11 是 $N_o\left(\frac{A}{d}\right)$ 与 $\frac{A}{d}$ 的关系曲线。 $N_o\left(\frac{A}{d}\right)$

$= N\left(\frac{A}{d}\right) / K_o$ 总是小于 1 的, 也就是说, 饱和限幅特性的等效放大系数总是小于饱

和限幅特性线性段的斜率 k 的。把描述函数 $N_o\left(\frac{A}{d}\right)$ 画在复平面上, 便可以得到饱和

和限幅特性的等效幅相特性曲线。由于饱和限幅特性的描述函数是一个实数, 等效幅相特性在复平面的实轴上, 如图 7-12 所示。

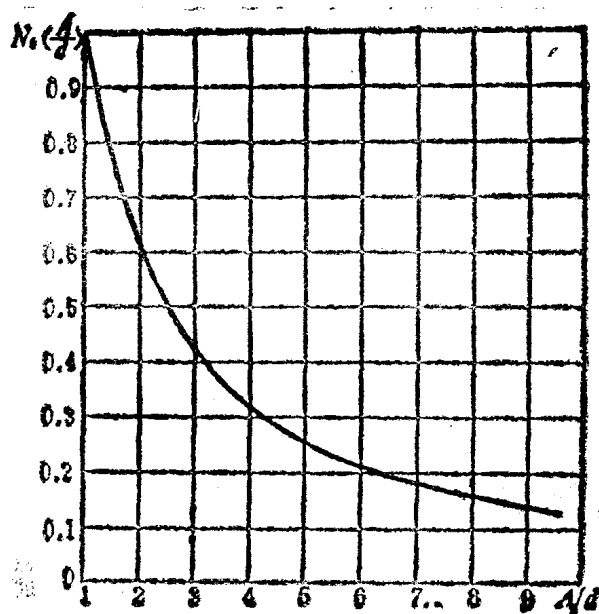


图7-11 饱和限幅特性的相对描述函数

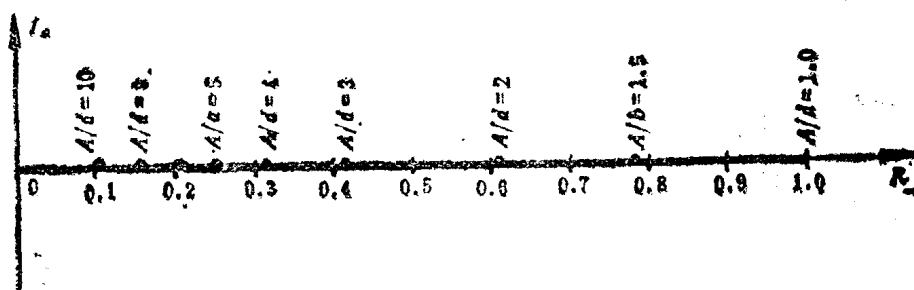


图7-12 饱和限幅特性的相对等效幅相特性曲线

(2) 继电特性

图7-13(a)是具有滞环的三位置继电特性。这是一般继电器所具有的输入-输出特性。图7-13(b)和7-13(c)分别是输入波形和输出波形。

从图7-13(c)可以看出, $y(t)$ 具有奇次对称性, 所以 $A_0 = 0$ 。当 $m \neq 1$, $y(t) \cos \omega t$ 和 $y(t) \sin \omega t$ 都没有奇次对称性, 所以 $A_1 \neq 0$, $B_1 \neq 0$ 。根据式(7-3)计算 A_1 。

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos \omega t d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(t) \cos \omega t d(\omega t) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^a y(t) \cos \omega t d(\omega t) + \int_a^{\beta} y(t) \cos \omega t d(\omega t) \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\beta}^{\pi} y(t) \cos \omega t d(\omega t) \right)
 \end{aligned} \tag{7-16}$$

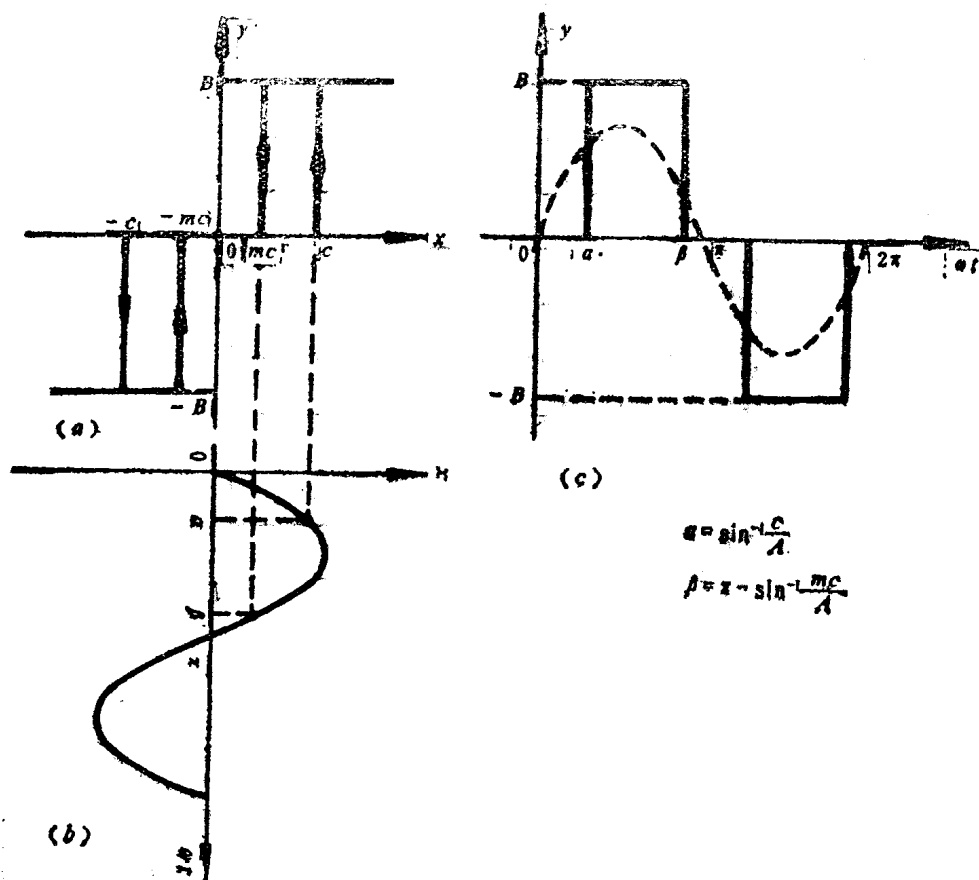


图7-13 (a) 具有滞环的三位置继电器特性
(b) 输入波形 (c) 输出波形

若 $A > c$, 则

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \omega t < \alpha \\ B & \alpha < \omega t < \beta \\ 0 & \beta < \omega t \leq \pi \end{cases} \quad (7-17)$$

把(7-17)代入(7-16)得

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} B \cos \omega t \, d(\omega t) \\ &= \frac{2B}{\pi} \sin \left(\pi - \sin^{-1} \frac{mc}{A} \right) - \sin \left(\sin^{-1} \frac{c}{A} \right) \\ &= \frac{2B}{\pi} \left(-\frac{c}{A} + \frac{mc}{A} \right) = -\frac{2Bc}{\pi A} (1-m) \end{aligned} \quad (7-18)$$

$A > c$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^a y(t) \sin \omega t d(\omega t) + \int_a^B y(t) \sin \omega t d(\omega t) \right. \\
 &\quad \left. + \int_B^{\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t) \right) \quad (7-19)
 \end{aligned}$$

把(7-17)代入(7-19)得

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{2}{\pi} \int_a^B B \sin \omega t d(\omega t) \\
 &= -\frac{2B}{\pi} \left[\cos\left(\pi - \sin^{-1} \frac{mc}{A}\right) - \cos\left(\sin^{-1} \frac{c}{A}\right) \right] \\
 &= \frac{2B}{\pi} \left[\cos\left(\sin^{-1} \frac{mc}{A}\right) + \cos\left(\sin^{-1} \frac{c}{A}\right) \right] \\
 &= \frac{2B}{\pi} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{mc}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{c}{A}\right)^2} \right] \quad (7-20) \\
 &\quad A > c
 \end{aligned}$$

根据式 (7-8)

$$\begin{aligned}
 N(A) &= \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A} \\
 &= \frac{2B}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{c}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{mc}{A}\right)^2} - j \frac{c(1-m)}{A} \right] \quad (7-21) \\
 &\quad A > c
 \end{aligned}$$

对于一个给定的继电器，最大输出值 B 和吸合电压（相当于 c ），释放电压（相当于 mc ）都是一定的。把(7-21)改写为

$$\begin{aligned}
 N\left(\frac{A}{d}\right) &= K_0 \times \frac{2}{\pi} \frac{1}{\frac{A}{d}} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\frac{A}{d}}\right)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{1 - \left(\frac{m}{\frac{A}{d}}\right)^2} - j \frac{(1-m)}{\frac{A}{d}} \right] \\
 K_0 &= \frac{B}{c}, \quad d = c
 \end{aligned}$$

继电器特性的相对描述函数为

$$N_v\left(\frac{A}{d}\right) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\frac{A}{d}} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\frac{A}{d}}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{m}{\frac{A}{d}}\right)^2} - j \frac{(1-m)}{\frac{A}{d}} \right]$$