ZHIXINZHONGXUE

奥林匹克解题宝典

解题指要

典型题析

专题训练

执信中学

陈竟新 主编

陈竟新 李莉 编写

数学

初三

新世纪出版社

奥林匹克解题宝典

数学 初三

ZHIXINZHONGXUE

执信中学

陈竟新 主编

陈竟新 李莉 编写

新世纪出版社

责任编辑：刘永光
封面设计：高豪勇
责任技编：王建慧

奥林匹克数学解题宝典

初三

陈竞新 主编

陈竞新　李　莉 编写

出版发行：新世纪出版社
经　　销：新 华 书 店
印　　刷：广东新华印刷厂
厂　　址：广州市永福路 44 号
规　　格：787 毫米 × 1092 毫米　1/16　16.5 印张　330 千字
版　　次：2002 年 6 月第 1 版
印　　次：2002 年 6 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-5405-2467-7/G·1604
定　　价：18.00 元

目　录

第一讲　一元二次方程(一)

解题指要

一元二次方程是初中数学的基础，占有举足轻重的地位．初中数学竞赛中涉及到一元二次方程的问题很多，运用一元二次方程的解、根的判别式及韦达定理进行解题的应用很多．本讲就一些常见方法进行分析．

已知一元二次方程的一般式为：

$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)(*)$

1．根的判别式

$\Delta=b^2-4ac$ 叫做方程($*$)的根的判别式，

并且：$\Delta>0\Rightarrow$方程($*$)有两个不等的实数根；

$\Delta=0\Rightarrow$方程($*$)有两个相等的实数根；

$\Delta<0\Rightarrow$方程($*$)没有实数根．

方程($*$)若有实数根，则其根可由公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 求得．

2．韦达定理

设 x_1、x_2 是方程($*$)的两个根，则 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$

这两个等式表示了方程中根与系数之间的密切关系，一般称为方程($*$)的韦达定理，同时韦达定理的逆命题也成立．

典型例题分析

例 1　解方程：$9406x^2-8289x-1117=0$．

分析：此方程各项系数绝对值较大，注意到 $x=1$ 时方程成立，可有一根 $x=1$，从而求出另一根．

解：观察方程可知有一个根为 1，原方程化为$(x-1)(9406x+1117)=0$

$\therefore\quad x_1=1\qquad x_2=-\dfrac{1117}{9406}$

说明：若把 $x=a$ 代入方程可成立，即方程必有因式$(x-a)$，利用因式分解可求出一元二次方程的根．

例 2　解关于 x 的方程：$abx^2+ab-(a^2+b^2)x=0$．

分析：方程含有字母 a，b，故应考虑对 a，b 的取值进行讨论．

解：(1) 当 $a=b=0$ 时，x 可为任意实数．

▶笔▶记▶栏

(2) 当$\begin{cases}a=0\\b\neq0\end{cases}$ 或$\begin{cases}a\neq0\\b=0\end{cases}$时，$x=0$.

(3) 当$\begin{cases}a\neq0\\b\neq0\end{cases}$时，$(ax-b)(bx-a)=0$,

$ax-b=0$ 或 $bx-a=0$

$\therefore\quad x=\dfrac{b}{a}$ 或 $x=\dfrac{a}{b}$

例 3 设 a，b，c 是实数，证明方程

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ 的根是实数.

分析：可证根的判别式 $\Delta\geqslant0$，常用配方法化判别式为完全平方式(或几项平方的和).

证明：把原方程化为：$3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ac)=0$

判别式为 $\Delta=4(a+b+c)^2-12(ab+bc+ac)$

$=2(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac)$

$=2[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant0$

$\therefore$ 原方程的根为实数.

说明：化判别式为几个因式的平方和，是证明代数式为非负数的常用手段.

例 3 已知方程 $x^2+(m-2)x+5-m=0$ 的两个实数根都大于 2，试求实数 m 的取值范围.

解：应用韦达定理及根的判别式可得

$$\begin{cases}x_1+x_2>4\\(x_1-2)(x_2-2)>0\\\Delta\geqslant0\end{cases}\quad 即\begin{cases}2-m>4\\(5-m)-2(2-m)+4>0\\(2-m)^2-4(5-m)\geqslant0\end{cases}$$

解得：$-5<m\leqslant-4$

说明：如用 $x_1>2$，$x_2>2\Rightarrow x_1x_2>4\Rightarrow5-m>4\Rightarrow m<1$，则 m 值放得太大，不可.

例 3 已知 a，b，c 为正数，且一元二次方程$(a+c)x^2+2bx+(c-a)=0$ 有二个相等实根，问 a，b，c 可否是一个三角形的三边之长？如果是，可构成何种三角形？

分析：根据 $\Delta=0$ 即得 $c^2=a^2+b^2$，但还需验证任两边之和大于第三边，方可判定可否构成三角形.

解：据已知方程有两个相等实根，$\Delta=0$，得 $4(b^2+a^2-c^2)=0$，又 $c^2=b^2+a^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+4ab$,

$\therefore\quad (a-b)^2\leqslant c^2\leqslant(a+b)^2$，$|a-b|\leqslant c\leqslant(a+b)$

$\therefore\quad a$，b，c 可构成三角形的三边长，且三角形为 Rt△

例 3 实数 x，y 满足方程$x^2-2x-4y-5=0$，试求 $x-2y$ 的取值范围.

分析：令 $m=x-2y$，化为 $2y=x-m$，再化原方程为关于 x 的一元二次方程，利用 $\Delta\geqslant0$ 求解.

解：设 $m=x-2y$，把 $x=m+2y$ 代入方程得

$(m+2y)^2-2(m+2y)-4y-5=0$

笔记栏

整理得 $4y^2+4(m-2)y+m^2-2m-5=0$

∵ 已知方程有实根 ∴ $\Delta\geqslant 0$

$16(m-2)^2-16(m^2-2m-5)\geqslant 0$

得 $m\leqslant\frac{9}{2}$ ∴ $x-2y\leqslant\frac{9}{2}$

说明：求代数式的值的范围，常利用一元二次方程有实根，$\Delta\geqslant 0$，再解不等式，此方法又叫做判别式法.

例 7 已知一元二次方程 $x^2-x+1-m=0$ 的两实根 α，β 满足 $|\alpha|+|\beta|\leqslant 5$，试求实数 m 的值.

分析：注意到 $\Delta\geqslant 0$ 和已知条件，解不等式组.

解：在方程有实根的前提下，由于 $0<|\alpha|+|\beta|\leqslant 5$，所以 $(|\alpha|+|\beta|)^2\leqslant 25$，即 $\alpha^2+\beta^2+2|\alpha\beta|\leqslant 25$. 利用韦达定理得到一个关于 m 的含绝对值符号的不等式. 解此不等式即可.

根据题意有 $\begin{cases}(-1)^2-4(1-m)\geqslant 0 & ①\\ |\alpha|+|\beta|\leqslant 5 & ②\end{cases}$

由①得 $m\geqslant\frac{3}{4}$，由②得 $\alpha^2+\beta^2+2|\alpha\beta|\leqslant 25$

∵ $\alpha+\beta=1$ $\alpha\beta=1-m$，∴ $1-2(1-m)+2|1-m|\leqslant 25$

∴ $|m-1|\leqslant 13-m$

当 $m<1$ 时，$1-m\leqslant 13-m$， ∴ $1\leqslant 13$，不等式成立.

当 $m\geqslant 1$ 时，$m-1\leqslant 13-m$， ∴ $m\leqslant 7$.

∴ 不等式组的解为 $\frac{3}{4}\leqslant m\leqslant 7$，即为所求实数的 m 取值范围.

例 8 设 a，b 为整数，且方程 $ax^2+bx+1=0$ 的两个不同的正数根都小于 1，求 a 的最小值.

分析：方程有两个参数 a，b，可先求出 a，b 的关系式，再进一步分析 a，b 取整数能成立的可能情况.

解：设 x_1、x_2 为已知方程的两个正根，则 $0<x_1<1$，$0<x_2<1$，

据韦达定理 $\frac{1}{a}=x_1x_2>0\Rightarrow a>0$

$-\frac{b}{a}=x_1+x_2>0\Rightarrow b<0$

据求根公式得 $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2a}$，$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4a}}{2a}<0$(不合题意舍去)

解不等式组

$$\begin{cases}a>0\\ b<0\\ b^2-4a>0\\ \frac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2a}<1\end{cases} \quad 即\begin{cases}a>0\\ b<-2\sqrt{a}\\ \sqrt{b^2-4a}<2a+b\\ b>-2a\end{cases}$$

解得 $-(a+1)<b<-2\sqrt{a}$，对 a，b 进行讨论：

当 $a=1$ 时，$-2<b<-2$，不合题意；

当 $a=2$ 时，$-3<b<-2\sqrt{2}$，与 b 为整数矛盾；

笔记栏

当 $a=3$ 时，$-4<b<-2\sqrt{3}$，不合题意；
当 $a=4$ 时，$-5<b<-4$，不合题意；
当 $a=5$ 时，$-6<b<-2\sqrt{5}$，存在 $b=-5$.

$\therefore$ 此时原方程为 $5x^2-5x+1=0$ $\quad x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{10}$

且 $0<\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{10}<1$，故 a 的最小值为 5.

例 9 已知 α、β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个实数根，求 $\alpha^4+3\beta$ 的值.

分析：本例 $\alpha^4+3\beta$ 为非对称式，直接用韦达定理较难求值，可设法化为对称式再用韦达定理.

解：α 为方程 $x^2-x-1=0$ 的根，

$\therefore$ $\alpha^2-\alpha-1=0$ 或 $\alpha^2=\alpha+1$，$\alpha^4=\alpha^2+2\alpha+1$

$\therefore$ $\alpha^4+3\beta=\alpha^2+2\alpha+1+3\beta=(\alpha+1)+(2\alpha+1)+3\beta=3(\alpha+\beta)+2$
$=3\times1+2=5$

笔记栏

练习一

1．解方程：$(2\sqrt{7}+5\sqrt{2})x^2-(5\sqrt{2}+3)x=2\sqrt{7}-3$.

2．解关于 x 的方程：$ab(a^2+b^2)^2x^2-(a^2+b^2)^2x+a^2-b^2=0$.

3．设 α、β 为实数，求证方程 $(x-\alpha)(x-\beta)=1$ 的两根也是实数.

4．已知关于 x 的二次方程 $x^2-k=2x$（k 为实数）无实根．试证明关于 x 的二次方程 $x^2+2kx+1+2(k^2-1)(x^2+1)=0$ 也没有实根.

5．设 a，b，c 为△ABC 的三边的长，试判别二次方程：$a^2x^2+(b^2+a^2-c^2)x+b^2=0$ 的根的情况.

6. 关于 x 的二次方程 $mx^2-2(m-1)x-4=0(m\neq0)$ 的两个根一个比 1 大，另一个比 1 小，求 m 的取值范围.

7. 已知实数 x，y，z 满足方程 $x=6-y$，$z^2=xy-9$. 求证：$x=y$.

8. 当 k 为何值时，方程 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$ 的两实根的平方和最大?

9. (1) 已知 x_1，x_2 是二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两实根，求 $x_1^3-4x_2^2+19$ 的值;

(2) 已知 x_1，x_2 是二次方程 $x^2-3x-5=0$ 的两实根，不解方程，试求 $2x_1-3x_2+7$ 的值.

专题训练一

一、填空题

1. 二次方程 $x^2+px+q=0$ 的一个根是另一个根的 2 倍，则 p、q 满足的关系式是__________.

2. 已知方程 $2000^2x^2-2001\times1999x-1=0$ 的较大根为 α，方程 $x^2+1998x-1999=0$ 的较小根为 β，则 $\alpha-\beta=$________.

3. 若 $(2s-1)y^{(t-3)^2}-4y+\frac{2}{3}=0$ 是关于 y 的一元二次方程，则 s__________，$t=$__________.

4. 已知 $(x+2y)(2x-3y)=y(y-4x)$，那么 $\frac{x}{y}$ 的值是__________.

5. 有若干个大小相同的球，可将它们摆成实心的正方形或实心的正三角形，摆成正三角形比摆成正方形时每边多两个球，则球的个数是__________.

二、选择题

1. 方程 $x|x|-3|x|+2=0$ 的实根的个数是（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 已知三个一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，$bx^2+cx+a=0$，$cx^2+ax+b=0$，有公共根，则 $a+b+c$ 的值应为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. 不确定

3. 关于 x 的方程 $6x^2=(2m-1)x+m+1$ 有一根 α 满足不等关系：$-1988\leqslant\alpha\leqslant1988$，且使得 $\frac{3}{5}\alpha$ 为整数，则 m 可取（　　）个值.

A. 6627　　B. 3977　　C. 2385　　D. 1989

4. 方程 $2(m+1)x+1=(|m|-1)x^2$ 只有一个实根 x，则 m 的值是（　　）.

A. $m=0$　　B. $m=-1$　　C. $m=1$　　D. $m=-\frac{1}{2}$

三、解答题

1. 已知方程 $x^2-(m+1)x-6=0$ 有一个根是方程 $x^2-mx+3=0$ 的一个根的 2 倍，两个方程的另一根互为相反数，试求实数 m 的值.

2. 已知 $|2m-3|=1$，试解关于 x 的方程 $3mx(x+1) \quad 5(x+1)(x \quad 1)-x^2$.

3. 若方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个不同的实根. 求证：方程 $x^4+ax^3+(b-2)x^2-ax+1=0$ 有四个不同的实根.

第二讲　一元二次方程(二)

解题指要

在熟悉了一元二次方程的解和根的判别式、韦达定理的基础上，如何进一步加以推广应用，是本讲的主要内容．这里主要讨论一元二次方程根的情况、应用判别式和韦达定理分析解题的常用方法．

一、在实数范围内分解因式

当分解因式常用的方法不能奏效时，对于可化为二次三项式的多项式，常可利用一元二次方程进行分解．

二、求极值

当方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有实根时，$\Delta\geqslant0$，利用这一条件，可求出一些代数式的极值．

三、在几何方面的应用

初中平面几何图形常见有三角形和四边形等．对于一些图形的计算，常可利用二次方程进行求解．

四、关于整数解的讨论

一元二次方程的解为整数时，可考虑判别式为完全平方数，或由整除性及不定方程的有关性质进行求解．

典型例题分析

例 1　分解因式：$8x^3-20x+12$．

分析：可先分解为 $4(x-1)(2x^2+2x-3)$，再求方程 $2x^2+2x-3=0$ 的解，进一步进行分解．

解：原式 $=4(2x^3-5x+3)=4(2x^3-2-5x+5)=4[2(x^3-1)-5(x-1)]$

$=4(x-1)(2x^2+2x-3)$

解方程 $2x^2+2x-3=0$ 得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$

$\therefore$　原式 $=4(x-1)\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}\right)$

$=(x-1)(2x+1-\sqrt{7})(2x+1+\sqrt{7})$

例 2　已知 $x^2+7xy+my^2-5x+43y-24$ 可分解为关于 x、y 的两个一次因式之积，求 m 的值．

分析：已知多项式可分解为两个一次因式，其对应关于 x 的方程：x^2+7xy+

笔记栏

$my^2-5x+43y-24=0$ 可整理为：$x^2+(7y-5)x+(my^2+43y-24)=0$，判别式为完全平方式.

解：由已知 $x^2+7xy+my^2-5x+43y-24$ 能分解成关于 x、y 的两个一次因式之积，也即关于 x 的二次方程 $x^2+(7x-5)x+my^2+43y-24=0$ 的判别式 $\Delta=(7y-5)^2-4(my^2+43y-24)=(49-4m)y^2-242y+121$ 为一个完全平方式，也即关于 y 的二次方程 $(49-4m)y^2-242y+121=0$ 判别式 $\Delta_1=0$，即 $(-242)^2-4\times121\times(49-4m)=0$，解之得 $m=-18$，此时代入原式前三项为：$(x-2y)(x+9y)$，再用十字相乘法分解，从而，当 $m=-18$ 时，有 $x^2+7xy-18y^2-5x+43y-24=(x-2y+3)(x+9y-8)$.

例 3 如果关于 x 的实系数一元二次方程 $x^2+2(k+3)x+k^2+3=0$ 有 2 个实数根 α，β，试求 $(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 的最小值.

分析：方程有 2 个实根，$\Delta\geqslant0$，可得 k 的取值范围，再把所求的代数式变形，化为用 k 的代数式表示即可求最值.

解：方程有两个实根 $\Delta=4(k+3)^2-4(k^2+3)\geqslant0\Rightarrow k\geqslant-1$.

又∵ $\alpha+\beta=-2(k+3)$ $\alpha\beta=k^2+3$

∴ $(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2$

$=4(k+3)^2-2(k^2+3)+4(k+3)+2=2k^2+28k+44=2(k+7)^2-54$

∵ $k\geqslant-1$ $k+7\geqslant6$ $(k+7)^2\geqslant36$，∴ $2(k+7)^2-54\geqslant2\times36-54=18$

∴ 最小值为 18.

例 4 已知扇形 OAB 中(图 2－1) $OA\perp OB$ 于 O，$OA=OB=6$ 当 Q 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上移动时，$QD\perp OB$ 于 D，试求 $Rt\triangle QDO$ 面积 S 的取值范围.

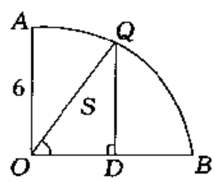

图 2－1

分析：令 $QD=x$ 构造关于 x 的二次方程.

利用 $\Delta\geqslant0$ 可求出 S 的取值.

解：设 $QD=x$，$DQ\perp OB$ 于 D，则 $OD=\sqrt{36-x^2}$.

$S=\dfrac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}$

$S^2=\dfrac{1}{4}x^2(36-x^2)$． 令 $x^2=u$（u 为实数，$u>0$）

可得 $u^2-36u+4S^2=0$

$\Delta=(-36)^2-16S^2\geqslant0$，$S^2-9^2\leqslant0$

解之 $-9\leqslant S\leqslant9$ ∵ $S>0$ ∴ $0<S\leqslant9$.

说明：构造一元二次方程，利用方程有实根时 $\Delta\geqslant0$ 求极值，称为判别式法，是常用方法之一.

例 4 已知方程 $x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-q)x+q=0$ 的三个根分别是 $\triangle ABC$ 的三个内角的正弦，求这三个角的度数.

分析：已知方程为三次方程，观察可知 1 为方程的解，故原方程左边可分解因式：$(x-1)(x^2-\sqrt{2}x-q)$，其中必有一个角的正弦值为 1，从而进一步求出各角.

解：通过观察和计算，方程各项系数和

$1-(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-q)+q=0$

∴　1是方程的一个根．$(x-1)(x^2\ \sqrt{2}x-q)=0$

设 $\sin A=1$　则 $A=90^\circ$.

∴　$B+C=90^\circ$，$C=90^\circ-B$　　∴　$\sin C=\cos B$.

∵　$\sin B$、$\sin C$ 是方程 $x^2-\sqrt{2}x-q=0$ 的两根.

∴　$\sin B+\cos B=\sqrt{2}$，$\sin B\cos B=-q$

∵　$(\sin B+\cos B)^2=\sin^2B+2\sin B\cos B+\cos^2B=1+2\sin B\cos B$

∴　$(\sqrt{2})^2=1-2q$，$q=-\dfrac{1}{2}$　　∴　$x^2-\sqrt{2}x+\dfrac{1}{2}=0$

∴　$x_1=x_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　　∴　$\sin B=\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　∴　$B=C=45^\circ$.

∴　三个角为 90°，45°，45°.

例 6　求证：对任意一个矩形 A，总存在一个矩形 B，使得矩形 A 与 B 的周长比和面积比都等于常数 $k(k\geqslant1)$.

分析：设两个矩形的长、宽分别为 a，b 和 x，y，可得方程组：

$$\begin{cases}x+y=k(a+b)\\xy=kab\end{cases}\quad(k,\ a,\ b\text{ 为常数})$$

若符合条件的矩形存在，则上述方程组有正数解，可把问题转化为求方程组的解.

证明：设矩形 A、B 的长和宽分别为 a、b 与 x、y.

$$\therefore\quad\begin{cases}x+y=k(a+b)\\xy=kab\end{cases}\quad(k,\ a,\ b\text{ 为已知数})$$

要证明符合条件的矩形 B 存在，只需证明方程组有正数解.

根据韦达定理，x，y 是方程 $t^2-k(a+b)t+kab=0$ 的两根.

∵　$k\geqslant1$　∴　$\Delta=k^2(a+b)^2-4kab\geqslant k^2(a+b)^2-4k^2ab=k^2(a-b)^2\geqslant0$，

又∵　$t_1+t_2=k(a+b)>0$，　　$t_1t_2=kab>0$

∴　方程必有两正根，即方程组必有正数解.

∴　满足条件的矩形 B 必存在.

例 7　m 为何值时，方程 $x^2+(m-1)x+m+1=0$ 的两根都是整数?

分析：利用韦达定理消去参数 m 后，再分析两根为整数的取值.

解：设方程两根为 x_1，x_2，　则$\begin{cases}x_1+x_2=-(m-1)\\x_1x_2=m+1\end{cases}$

∴　$x_1+x_2+x_1x_2=-(m-1)+(m+1)=2$

　　$(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+1=3$

∵　x_1，x_2 为整数，∴　$\begin{cases}x_1+1=3,\\x_2+1=1\end{cases}$或$\begin{cases}x_1+1=-3,\\x_2+1=-1.\end{cases}$

∴　$\begin{cases}x_1=2,\\x_2=0\end{cases}$；或$\begin{cases}x_1=-4,\\x_2=-2.\end{cases}$

∴　$m=-1$ 或 $m=7$.

例 7　当 m 为何整数值时，二次三项式 m^2+2m-1 的值可分解为两个连续整数之积?

分析：可构造一个二次方程，如令 $m^2+2m-1=x(x+1)$，即 $x^2+x-(m^2+$

$2m-1)=0$．利用关于 x 的方程的判别式为完全平方数时讨论其整数解．

解：令 $m^2+2m-1=x(x+1)$．问题转化为关于 x 的二次方程有整数根，求字母系数 m 的整数值问题来解决．

$$x^2+x-(m^2+2m-1)=0.$$

其判别式 $\Delta=1+4(m^2+2m-1)=4m^2+8m-3$

$\because$ 关于 x 的二次方程有整数根，$\therefore$ $4m^2+8m-3$ 为完全平方数设 $4m^2+8m-3=n^2$（n 为自然数），则 $4(m+1)^2-n^2=7$，$(2m+n+2)(2m-n+2)=7$

$\therefore$ $2m+n+2$，$2m-n+2$ 都是整数且 $2m+n+2>2m-n+2$

$$\therefore \begin{cases}2m+n+2=7,\\ 2m-n+2=1;\end{cases} \text{或} \begin{cases}2m+n+2=-1,\\ 2m-n+2=-7.\end{cases}$$

$$\text{解方程组得} \begin{cases}m_1=1,\\ n_1=3;\end{cases} \quad \begin{cases}m_2=-3,\\ n_2=3.\end{cases}$$

$\therefore$ $x=\dfrac{-1\pm3}{2}$，$x_1=1$，$x_2=-2$ 符合条件．

$\therefore$ $m=1$ 或 $m=-3$．

练习二

1．若 x_0 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根，则判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 与平方式 $M=(2ax_0+b)^2$ 的关系是（　　）．

A．$\Delta>M$　　B．$\Delta=M$　　C．$\Delta<M$　　D．不确定

2．如果方程 $(x-1)(x^2-2x+m)=0$ 的三根可以作为一个三角形的三边长，则 m 的取值范围是（　　）．

A．$0\leqslant m\leqslant1$　　B．$\geqslant\dfrac{3}{4}$　　C．$\dfrac{3}{4}<m\leqslant1$　　D．$\dfrac{3}{4}\leqslant m\leqslant1$

3．分解因式：$2x^4+7x^3-30x^2+x+6=0$．

4．若 $x^2+y^2=25$，求 $z=x+y$ 的最值．

5．求分式函数 $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}$ 的取值范围．

6. 如图 2－2 所示，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=DC=1$，$\angle DAB=\angle DCB=90°$，$BC$、$AD$ 的延长线交于点P，试求 $AB\cdot S_{\triangle PAB}$的最小值.

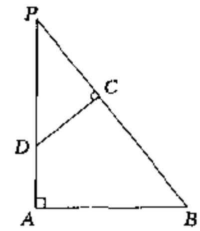

图 2－2

7. 若 k 为正整数，且方程$(k^2-1)x^2-6(3k-1)x+72=0$ 有两个不等的正整数根，求 k 的值.

8. 证明：不存在这样的两个既约分数，它们的积与和都是整数.

专题训练二

一、填空题

1. 若$(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$，则用 x，z 表示 y 为_________.

2. 满足$(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 的所有实数对$(x、y)$中，$\frac{y}{x}$的最大值是_________.

3. 已知 $A=\frac{x^2-2x+4}{x^2-3x+3}$，使 A 为整数的一切实数x 是_________.

4. 对任意实数 k，关于 x 的方程$(k^2+1)x^2-2(a+k)^2x+k^2+4k+b=0$ 总有一个根是 1，则实数 $a=$_________，$b=$_________，另一根的范围是_________.

5. 已知关于 x 的二次方程 $x^2-k=2x$(k 为实数)无实根，则关于 x 的二次方程 $x^2+2kx+1+2(k^2-1)(x^2+1)=0$ 的根的情况是_________.

二、选择题

1. 设 $a+b>c>0$ 且$|a-b|<c$，那么二次方程 $a^2x^2+(b^2+a^2-c^2)x+b^2=0$ 的根的情况是(　　).

   A. 有两个等根　　B. 无实根　　C. 有两个不等根　　D. 不确定

2. 若$(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)$是关于 x 的完全平方式，则 a、b、c 的关系是(　　).

   A. $a>b>c$　　B. $a<b<c$　　C. $a=b=c$　　D. $b^2-4ac=0$

3. 设非零实数 a_1，b_1，a_2，b_2 满足 $a_1a_2=2(b_1+b_2)$，则关于方程 $x^2+a_1x+b_1=0$ 与 $x^2+a_2x+b_2=0$ 的判断一定不正确的是(　　).

A. 两个方程均无实根　　　　　　　　B. 两个方程至少有一个有实根

C. 两个方程均有相等实根　　　　　　D. 不确定

4. 若对于任何实数 a，关于 x 的方程 $x^2-2ax-a+2b=0$ 都有实数根，则实数 b 的取值范围是（　　）.

A. $b\leqslant 0$　　　B. $b\leqslant -\frac{1}{2}$　　　C. $b\leqslant -1$　　　D. $b\leqslant -\frac{1}{8}$

三、解答题

1. (1) 设三个方程 $x^2+4ax-4a+3=0$，$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$2x^2-(4a+1)x+2a^2-1=0$ 中，至少有一个方程有实根，求 a 的取值范围.

(2) 设实系数方程 $x^4+\sqrt{a}x^3+3x^2+\sqrt{a}x+1=0$ 有实数根，试求 a 的取值范围.

2. 设 a、b，c 是实数，且 $a\neq 0$，$\Delta=(b-1)^2-4ac=0$，求证：以下关于 x_1，x_2，…，x_n 的方程组的解惟一.

$$\begin{cases} ax_1^2+bx_1+c=x_2 \\ ax_2^2+bx_2+c=x_3 \\ \cdots \\ ax_{n-1}^2+bx_{n-1}+c=x_n \\ ax_n^2+bx_n+c=x_1 \end{cases}$$

3. a、b 是实数，关于 x 方程 $|x^2-ax+b|=2$ 有三个不等的实数根.

(1) 求证：$a^2-4b-8=0$；

(2) 若该方程的三个不等实根，恰为一个三角形三内角的度数，求证该三角形必有一个内角是 $60°$；

(3) 若该方程的三个不等实根恰为一直角三角形的三条边，求 a 和 b 的值.