

高等学校教材

范钦珊

材料力学教程

[I]

高等教育出版社



高等学校教材

材料力学教程

[II]

范钦珊

高等教育出版社

(京)112号

内 容 简 介

本书是作者在清华大学多年从事材料力学课程教学和内容的改革更新的成果。作者在试用多次的讲义基础上经过精心的修改,分成Ⅰ、Ⅱ两卷出版。第Ⅰ卷包含了国家教委审定的本课程基本要求的全部内容;第Ⅱ卷则为进一步要求的新内容。本书采用融合和渗透的方法,一方面对传统的教学内容推陈出新,使之富有新意;另一方面引入一些反映近似科学技术成果的全新内容。更新的内容约占全书的三分之一。本书第Ⅰ卷可作为高等学校实行学分制本科材料力学课程的必修内容;第Ⅱ卷可作为该课程必修部分之外的选修内容,或作为开设选修课的教学内容。本书可用作高等工业学校本科各专业多学时和中学时材料力学课程的教材。

各章所附习题85%以上是经过作者精心编选的,有19章编选了“选择类习题”,以配合经国家教委审定的《全国通用材料力学试题库》的使用。习题均附有答案,全部习题的解答将作为教师用书。需要者,可与清华大学材料力学教研室联系。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学教程(Ⅰ)/范钦珊编著. —北京:高等教育出版社,1996

ISBN 7-04-005662-3

I. 材… I. 范… II. 工程材料-材料力学-高等学校-教材 IV. TB30

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 19020 号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码:100009 传真:4014048 电话:4054588

新华书店总店北京发行所发行

国防工业出版社印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 印张 14 字数 340 000

1996 年 5 月第 1 版 1996 年 5 月第 1 次印刷

印数 0001—3 412

定价 11.00 元

凡购买高等教育出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换。

版权所有,不得翻印

目 录

第六篇 能量原理及其在杆件问题中的应用

第 14 章 虚位移原理及其应用	1
§ 14-1 引言	1
§ 14-2 基本概念	1
14-2-1 功和余功	1
14-2-2 应变能和余应变能	2
14-2-3 应变能与余应变能的计算	2
§ 14-3 互等定理	3
14-3-1 功的互等定理	3
14-3-2 位移互等定理	4
§ 14-4 虚位移原理	5
14-4-1 弹性体的虚位移原理	5
14-4-2 必要条件的简单证明	5
14-4-3 关于虚位移的几点讨论	6
14-4-4 虚位移原理的应用条件	7
§ 14-5 虚位移原理的应用	7
14-5-1 直接应用——求解变形曲线的近似 方程	7
14-5-2 由虚位移原理导出卡氏第一定理	8
习题	9
第 15 章 虚力原理及其应用	13
§ 15-1 引言	13
§ 15-2 虚力原理	13
15-2-1 弹性体的虚力原理	13
15-2-2 关于虚力原理的几点讨论	13
15-2-3 虚力原理直接应用举例	14
§ 15-3 卡氏第二定理	15
§ 15-4 莫尔法	17
15-4-1 虚力等于 1 单位时的虚力原理	17
15-4-2 关于单位力与 Δ 的讨论	18
15-4-3 莫尔法应用举例	18
§ 15-5 图乘法——计算莫尔积分的图 解解析法	20
习题	24

第七篇 超静定结构的进一步问题

第 16 章 力法及其应用	30
§ 16-1 引言	30
§ 16-2 超静定次数的判断	30
§ 16-3 正则化的变形协调方程——正 则方程	32
§ 16-4 对称性的应用	38
16-4-1 对称结构的对称变形	39
16-4-2 对称结构的反对称变形	39
16-4-3 对称结构的一般变形及其简化	40
§ 16-5 空间超静定问题的特殊情形	40
§ 16-6 连续梁静定基的一种特殊选择, 三弯矩方程	42
§ 16-7 超静定结构的位移计算	44
习题	48
第 17 章 矩阵位移法及其计算机分析	55
§ 17-1 引言	55
17-1-1 位移法概述	55
17-1-2 单元与节点 单元端点力与端点 位移	56
17-1-3 局部坐标与总体坐标	56
17-1-4 正负号规则	57
§ 17-2 桁架的矩阵位移法基本方程	57
17-2-1 局部坐标中杆单元的刚度矩阵	57
17-2-2 杆单元的坐标变换	58
17-2-3 总体坐标中杆单元的刚度矩阵	60
17-2-4 单元综合 结构的总体刚度矩阵	60
17-2-5 总体刚度矩阵与单元刚度矩阵之 间的关系	62
17-2-6 总体刚度矩阵集成	63
17-2-7 矩阵位移法的一般过程	64
§ 17-3 平面刚架的矩阵位移法	68
17-3-1 刚架单元的刚度方程与单元刚度 矩阵	68
17-3-2 刚架单元的坐标变换矩阵	70

17-3-3 刚架的总体刚度方程与总体刚度 矩阵	71
17-3-4 非节点载荷的处理 等效节点载 荷	72
§ 17-4 矩阵位移法的计算流程与计算机 程序	74
17-4-1 变量与数组标识符含义	74
17-4-2 程序功能与使用	75
17-4-3 计算流程图	76
17-4-4 计算机程序	80
§ 17-5 算例	89
习题	94

第八篇 弯曲与扭转的进一步问题

第 18 章 开口薄壁杆件的约束扭转问题 ... 98

§ 18-1 引言	98
§ 18-2 开口薄壁截面的扇性几何性质	99
18-2-1 扇性面积	99
18-2-2 对于不同极点的扇性面积之间的 关系	100
18-2-3 开口薄壁截面的扇性几何性质	101
18-2-4 主扇性面积与主扇性惯性矩	101
§ 18-3 弯曲中心的扇性几何性质描述 ...	105
§ 18-4 开口薄壁截面杆件的约束扭转 ...	107
18-4-1 基本假定	107
18-4-2 扭转中心与扭转翘曲位移	107
18-4-3 自由扭转与约束扭转	108
18-4-4 翘曲应力	109
18-4-5 扭转角变化率的微分方程	110
18-4-6 边界条件	111
18-4-7 约束扭转引起的自相平衡力系—— 双力矩	114
§ 18-5 杆上作用有均布扭转外力偶时 的微分方程及其解答	115
§ 18-6 一般载荷作用下开口薄壁杆件 的应力计算	116
§ 18-7 静力等效的影响区域——圣维 南原理的适用范围	120
习题	121

第九篇 屈曲与疲劳失效的进一步问题

第 19 章 屈曲问题的进一步研究 125

§ 19-1 引言	125
§ 19-2 非理想约束压杆的临界载荷	125
19-2-1 一端理想约束、另一端非理想约束 的压杆	125
19-2-2 两端非理想约束压杆	127
§ 19-3 偏心加载压杆的承载能力	130
§ 19-4 具有初始缺陷(微弯)压杆的承 载能力	132
§ 19-5 纵向与横向载荷同时作用时压 杆的承载能力	133
§ 19-6 压杆的非弹性屈曲分析	136
19-6-1 切线模量理论	137
19-6-2 双模量理论	138
19-6-3 向磊(Shanley)理论	139
* § 19-7 其它形式的屈曲问题	142
19-7-1 狭长截面梁的侧向屈曲	142
19-7-2 圆环及圆拱的屈曲	143
§ 19-8 能量方法在屈曲分析中的应用	144
19-8-1 稳定问题的能量准则	144
19-8-2 能量准则应用于判别平衡路径的 稳定性	145
19-8-3 能量方法用于确定临界载荷	147
* § 19-9 确定杆件临界载荷的动力学 方法	152
19-9-1 稳定性的动力学准则	152
19-9-2 动力学方法应用于保守系统	152
19-9-3 动力学方法应用于非保守系统 ...	153
习题	154

第 20 章 线性累积损伤理论与疲劳寿命 估算 159

§ 20-1 引言	159
§ 20-2 线性累积损伤理论	159
20-2-1 损伤的概念	159
20-2-2 线性累积损伤理论	160
20-2-3 迈因纳准则	160
§ 20-3 变幅交变应力作用下的疲劳 强度设计	161
§ 20-4 简单应力状态下的疲劳寿命估算	163
20-4-1 等幅交变应力时的疲劳寿命估算 ...	163
20-4-2 变幅交变应力时的疲劳寿命估算 ...	164

§ 20-5 疲劳强度可靠性概念	166
20-5-1 疲劳试验结果的分散性	166
20-5-2 标准离差与可靠性的关系	166
习题	168

第十篇 新材料的材料力学

第 21 章 复合材料的材料力学问题	169
§ 21-1 引言	169
§ 21-2 单层复合材料的弹性模量的确定	170
21-2-1 垂直于纤维方向的弹性模量	170
21-2-2 平行于纤维方向的弹性模量	171
§ 21-3 增强效应	173
21-3-1 复合材料中的名义应力与纤维和基体中的实际应力	173
21-3-2 增强效应	173
§ 21-4 单层复合材料的沿轴性态	174
21-4-1 坐标与符号定义	174
21-4-2 柔度矩阵及其确定	175
21-4-3 刚度矩阵及其确定	176
§ 21-5 单层复合材料的离轴性态	177
21-5-1 应力变换	177
21-5-2 应变变换	178
21-5-3 单层复合材料的离轴刚度与柔度矩阵	178
§ 21-6 单层复合材料的失效准则	181
§ 21-7 对称叠层复合材料的应力-应变性态	182
21-7-1 面内载荷作用下对称叠层复合材料的刚度矩阵	182

21-7-2 面内载荷作用下对称叠层复合材料的柔度矩阵	184
21-7-3 对称叠层复合材料的弯曲性态	185
21-7-4 工程应用实例	186
习题	188

第 22 章 粘弹性材料构件的应力、变形分析与设计

析与设计	190
§ 22-1 引言	190
§ 22-2 线性粘弹性问题	190
22-2-1 两种基本元件	191
22-2-2 麦克斯韦模型	191
22-2-3 开尔文模型	191
§ 22-3 非线性粘弹性问题分析基础	193
22-3-1 蠕变分析	194
22-3-2 应力松弛分析	195
22-3-3 工程应用实例	196
§ 22-4 非线性粘弹性构件的弯曲与扭转问题	200
22-4-1 弯曲蠕变时的应力分析	200
22-4-2 弯曲蠕变时的位移分析	201
22-4-3 扭转蠕变时的切应力与相对扭转角	203
§ 22-5 非线性粘弹性构件设计的工程方法	206
22-5-1 等应变线与等时线	206
22-5-2 伪弹性设计方法	206
22-5-3 应用举例	207
习题	208
附录 习题答案	211

第六篇 能量原理及其在杆件问题中的应用

第 14 章 虚位移原理及其应用

§ 14-1 引言

在本书第 I 卷的一些章节中,为了分析杆件的应力、变形和位移,应用了平衡、变形协调和物理方程,这是基于两个前提,即:杆件在各种力作用下处于平衡,以及杆件各部分的变形必须协调。

除此之外,还存在其它分析杆件应力、变形和位移的方法(既要满足平衡,又要满足变形协调),这种方法的基础就是“能量原理”(Principle for Work and Energy)。

本书第 I 卷中曾经在一些章节中介绍过能量守恒原理及其在计算加力点沿加力方向的位移以及确定冲击载荷时的应用,当时所涉及的都是线弹性问题。

本篇所介绍的能量原理的内容将更加丰富、更加广泛,应用面将更加宽阔:

- 可以确定任意点、沿任意方向的位移。
- 可以确定位移函数。
- 既可以确定位移,又可以确定内力和应力。
- 既适用于线性弹性问题,又适用于非线性弹性问题。
- 可以直接用于求解超静定问题。
- 与深层次的能量原理相衔接,为分析进一步的固体力学问题打好基础。

本章将介绍能量原理的某些基本概念、虚位移原理及其应用;下一章主要介绍虚力原理以及由之导出的几个能量原理。

§ 14-2 基本概念

14-2-1 功和余功

讨论一般的力和位移关系下的功和余功,如图 14-1 所示。所谓“一般的”,其含义是指:

- 力和位移都是广义的,即广义力可以是集中力、分布力、均匀压力、力偶、分布力偶等;这些广义力做功时的对应位移,即为广义位移。
- 力和位移的关系是非线性的。

根据图 14-1, 若以位移作为积分变量, 则

$$W = \int_{\Delta} P d\Delta \quad (14-1)$$

称之为力所作之“功”(Work).

若以力作为积分变量, 则

$$W_c = \int_P \Delta dP \quad (14-2)$$

称之为力的“余功”(Complementary Work).

不难看出, 功和余功互补为“常力功”。

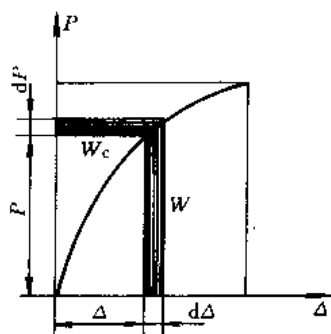


图 14-1 功和余功

14-2-2 应变能和余应变能

在一般的应力-应变关系中, 应力和应变都是广义的, 它们的关系是非线性的, 如图 14-2 所示。

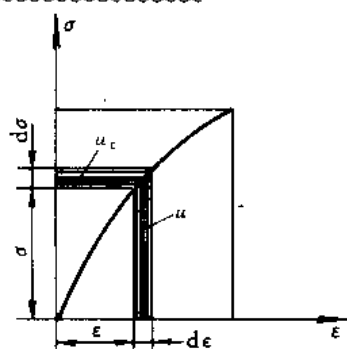


图 14-2 应变比能与余应变比能

若以应变作为积分变量, 则根据 $du = \sigma d\epsilon$, 有

$$u = \int_{\epsilon} \sigma d\epsilon \quad (14-3)$$

$$U = \int_V u dV = \int_V \left(\int_{\epsilon} \sigma d\epsilon \right) dV \quad (14-4)$$

二者分别称为“应变比能”(Density of Strain Energy)和“应变能”(Strain Energy).

若以应力作为积分变量, 根据 $du_c = \epsilon d\sigma$, 则有

$$u_c = \int_{\sigma} \epsilon d\sigma \quad (14-5)$$

$$U_c = \int_V u_c dV = \int_V \left(\int_{\sigma} \epsilon d\sigma \right) dV \quad (14-6)$$

二者分别称为“余应变比能”(Density of Complementary Strain Energy)和“余应变能”(Complementary Strain Energy).

不难看出, 应变能与余应变能互为余函数; 对于线性应力-应变关系则有

$$u = u_c, \quad U = U_c \quad (14-7)$$

14-2-3 应变能与余应变能的计算

计算应变能与余应变能时, 注意应用以下两个前提:

● 横截面在变形后仍保持为平面成立, 于是,

对于拉伸, 有 $\epsilon_x = \text{const}$ (14-8)

对于弯曲(忽略剪力影响), 有 $\epsilon_x = -y \frac{d\theta}{dx} = -\frac{y}{\rho}$ (14-9)

对于圆轴扭转, 有 $\gamma(\rho) = \rho \frac{d\varphi}{dx}$ (14-10)

● 下述静力学方程成立

$$N_x = \int_A \sigma dA, \quad M_x = \int_A y \sigma dA, \quad M_x = \int_A \rho r dA \quad (14-11)$$

上述前提,在小变形条件下,对线性和非线性问题均适用。

对于线性问题, $U=U_c$, 而应变能的计算,在本书第 I 卷中已经作了详尽的叙述,现将结果简述如下:

$$\text{对拉压杆:} \quad U = U_c = \int_l \frac{N_x^2}{2EA} dx \quad (14-12)$$

$$\text{对梁:} \quad U = U_c = \int_l \frac{M^2}{2EI} dx \quad (14-13)$$

$$\text{对受扭圆轴:} \quad U = U_c = \int_l \frac{M_x^2}{2GI_p} dx \quad (14-14)$$

对于非线性问题,在应力-应变关系给定后,根据 u, u_c 以及 U, U_c 的表达式,利用“平而保持平而”和静力学方程,即可计算 U 和 U_c 。

以材料的应力-应变关系为 $\sigma = E|\epsilon|^{\frac{1}{2}}$ 的梁为例,根据

$$u = \int_0^\epsilon \sigma d\epsilon = \frac{2}{3} E |\epsilon|^{\frac{3}{2}} \quad (a)$$

$$u_c = \int_0^\sigma \epsilon d\sigma = \frac{1}{3} \frac{\sigma^3}{E^2} \quad (b)$$

有

$$U = \int_V u dV = \frac{2}{3} \int_l \left(\int_A E |\epsilon|^{\frac{3}{2}} dA \right) dx \quad (c)$$

$$U_c = \int_V u_c dV = \frac{1}{3} \int_l \left(\int_A \frac{\sigma^3}{E^2} dA \right) dx \quad (d)$$

利用 $\epsilon = -y/\rho$ 和静力学方程 $M = - \int y \sigma dA$, 则式(c)、(d) 分别变为

$$U = \frac{2}{3} \int_l \frac{|M|^3}{E^2 I^{\frac{3}{2}}} dx \quad (e)$$

$$U_c = \frac{1}{3} \int_l \frac{|M|^3}{E^2 I^{\frac{3}{2}}} dx \quad (f)$$

其中 $I^{\frac{3}{2}} = \int_A |y|^{\frac{3}{2}} dA$ 。对于给定的承载梁,只要确定了弯矩方程 M , 代入上述二式即可计算 U 和 U_c 。当然,对于不同的应力-应变关系, U 和 U_c 的表达式各不相同。这是非线性问题与线性问题的重要区别。

§ 14-3 互等定理

根据能量守恒原理与叠加原理,可以导出两个有用的互等定理。

14-3-1 功的互等定理

假设两个不同的广义力系 $P_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 和 $Q_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 作用在相同的两个构件上,则对于线性问题在小变形的条件下,有下列重要结论:

P_i 力系在 Q_j 力系引起的位移上所作之功,等于 Q_j 力系在 P_i 力系引起的位移上所作之功。

这一结论称之为“功的互等定理”(Reciprocal Theorem of Work). 它的数学表达式为

$$\sum_{i=1}^m P_i \Delta_{ij} = \sum_{j=1}^n Q_j \Delta_{ji} \quad (14-15)$$

其中 Δ_{ij} 为 Q_j 力系在 P_i 力作用点、沿 P_i 力方向引起的位移; Δ_{ji} 为 P_i 力系在 Q_j 力作用点、沿 Q_j 力方向引起的位移。

现以图 14-3 中所示之梁为例,证明如下。

考察两种加载过程:一种是先加 P_i 后加 Q_j ;另一种是先加 Q_j 再加 P_i 。对于线性问题,根据叠加原理,变形状态与加力的顺序无关。因此,两种加力过程所产生的最后变形状态是相同的,故二者所引起的应变能是相等的,即

$$U_{P \rightarrow Q} = U_{Q \rightarrow P} \quad (a)$$

应用能量守恒原理,

$$\left. \begin{aligned} U_{P \rightarrow Q} &= \sum \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii} + \sum \frac{1}{2} Q_j \Delta_{jj} + \sum P_i \Delta_{ij} \\ U_{Q \rightarrow P} &= \sum \frac{1}{2} Q_j \Delta_{jj} + \sum \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii} + \sum Q_j \Delta_{ji} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

其中 Δ_{ii} 和 Δ_{jj} 分别为 P_i 和 Q_j 力在自身作用点处、沿自身作用线方向引起的位移。

将式(b)代入式(a),得到

$$\sum_{i=1}^m P_i \Delta_{ij} = \sum_{j=1}^n Q_j \Delta_{ji}$$

此即功的互等定理表达式。

14-3-2 位移互等定理

当 P_i 和 Q_j 力系中各自只有一个力 P_i 和 Q_j 时,功的互等定理式(14-15)变为

$$P_i \Delta_{ij} = Q_j \Delta_{ji} \quad (14-16)$$

如果这两个力在数值上又相等,则由上式得到

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji} \quad (14-17)$$

它表明:广义力 Q_j 在 i 点引起的与 P_i 相对应的广义位移,在数值上等于广义力 P_i 在 j 点引起的与 Q_j 相对应的广义位移。此即“位移互等定理”(Reciprocal Theorem of Displacement)。

需要注意的是, Δ_{ij} 与 Δ_{ji} 中的第 1 个下标表示位移的点;第 2 个下标表示加力点。

还需要指出的是,在式(14-16)中,若广义力 P_i 、 Q_j 均等于 1 单位时($P_i = Q_j = 1$, 称为单位力),这时的位移称为“单位广义位移”,用 δ 表示。于是,式(14-17)写成:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (14-18)$$

图 14-4 中所示为几个位移互等的实例。在图 14-4 a 中, $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$; 在图 14-4 b 中 $\theta_{BA} = \theta_{AB}$; 在图 14-4 c 中,当 P 和 M 在数值相等时,有 $\theta_{AB} = \Delta_{AB}$ 。

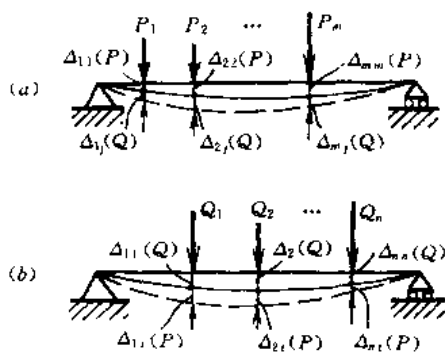


图 14-3 功的互等定理

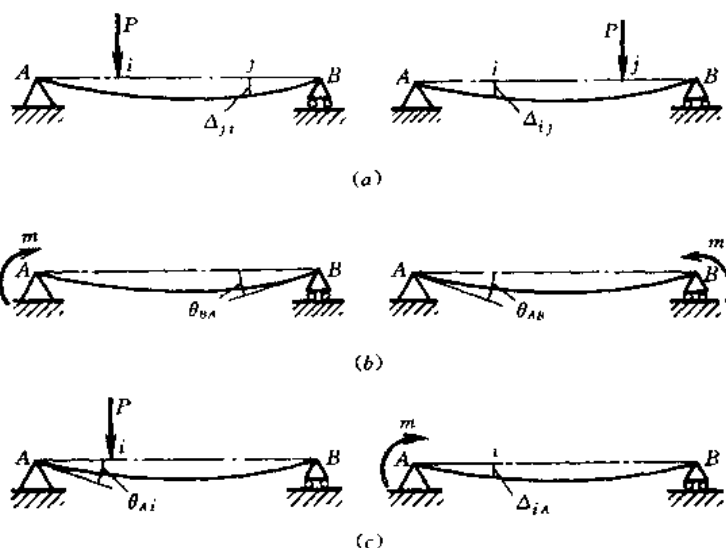


图 14-4 位移互等定理应用实例

§ 14-4 虚位移原理

14-4-1 弹性体的虚位移原理

对于处于平衡状态的弹性体,自平衡位置令其有一微小“虚位移”(Virtual Displacements),则作用在弹性体上的外力在虚位移上所作之功等于弹性体内力在虚位移上所作之功。前者称为“外力虚功”,用 δW_e 表示;后者称为“内力虚功”,用 δW_i 表示。简而言之:

$$\text{弹性体平衡} \Rightarrow \delta W_e = \delta W_i$$

另一方面,如果弹性体上的外力或内力在虚位移上所作之功相等,则弹性体处于平衡状态,即

$$\delta W_e = \delta W_i \Rightarrow \text{弹性体平衡}$$

上述两方面的综合,即为弹性体的“虚位移原理”(Principle of Virtual Displacements);

弹性体平衡的充分和必要条件是,外力虚功等于内力虚功,即

$$\text{弹性体平衡} \Leftrightarrow \delta W_e = \delta W_i \quad (14-19)$$

14-4-2 必要条件的简单证明

以梁为例,在小变形条件下,梁平衡时,有

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x), \quad \frac{dM}{dx} = Q(x), \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -q(x)$$

令梁自平衡位置 $[w(x)]$ 开始有一虚位移 δw (图 14-5a),则外力虚功为

$$\delta W_e = \int [q(x)dx] \delta w$$

将 $d^2M/dx^2 = -q(x)$ 代入,并应用分部积分,得到

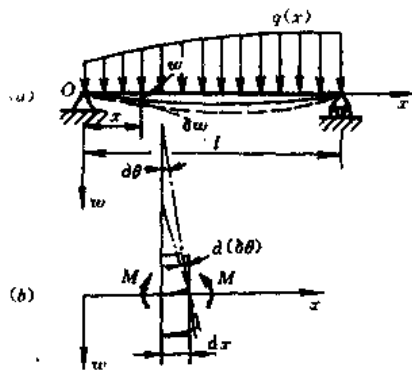


图 14-5 虚位移原理的简单证明

$$\begin{aligned}\delta W_e &= \int_l \left(-\frac{d^2 M}{dx^2} dx \right) \delta w \\ &= -\frac{dM}{dx} \delta w \Big|_0^l + M \frac{d(\delta w)}{dx} \Big|_0^l - \int_l M \frac{d^2(\delta w)}{dx^2} dx\end{aligned}$$

虚位移是任意的但必须满足约束条件。即 $\delta w(0) = \delta w(l) = 0$, 加上 $M(0) = M(l) = 0$, 上式中前两项均为零。因此, 外力虚功

$$\delta W_e = - \int_l M \frac{d^2(\delta w)}{dx^2} dx$$

等号右边项即为内力虚功。为证明这一点, 考察梁上任意 dx 微段, 如图 14-5 b 所示。其中 $d\theta = dw/dx$ 为梁的真实位移引起的两相邻截面的转角; 若梁自平衡位置有一虚位移 δw , 则微段相邻截面在 $d\theta$ 上又有一新的转角 $d(\delta\theta) = d(d\delta w/dx) = (d^2\delta w/dx^2)dx$ 。忽略剪力影响, 此即与内力 M 相对应的虚位移。

由于在图示坐标系中, 弯矩 M 和曲率 $d^2\delta w/dx^2$ 异号, 而功恒为正, 因此, $-\int_l M \frac{d^2(\delta w)}{dx^2} dx$ 即为内力 M 在相应的虚位移上所作之功, 亦即内力虚功。于是, 有

$$\delta W_e = - \int_l M \frac{d^2(\delta w)}{dx^2} dx = \delta W_i$$

这就是所要证明的结论。

类似地, 还可以证明充分条件。建议读者作为练习自行完成。

需要指出的是, 以上推证是以简支梁为例进行的, 读者不难证明对于其它支承条件下的梁, 同样可以导出上述结论。

14-4-3 关于虚位移的几点讨论

- 虚位移可以是任意的微小位移, 但必须满足变形协调条件。例如, 对于杆件必须满足约束条件和连续条件。
- 虚位移可以是与真实位移无关的任意位移。
- 虚位移可以是真实位移的增量: 在这种情形下, 设与真实位移相对应的应变能为 U , 虚位移后应变能变为 $U + \delta U$, 其中 δU 为虚位移引起的应变能增量, 数值上等于外力虚功。于是, 虚位移原理可以写成:

$$\text{弹性体平衡} \Leftrightarrow \delta W_e = \delta U \quad (14-20)$$

需要指出的是, 当虚位移为真实位移的增量时, 增量记号 δ 与微分记号 d 具有相同的运算规则, 而且当二者同时出现时, 可以互换位置。

- 虚位移也可以是某一部分或某些部分真实位移的增量, 而不是全部真实位移。例如, 图 14-6 中的虚位移(虚线), 与 w_1 和 w_n 对应的虚位移为零。
- 虚位移还可以是另一个与之相关系统的真实位移。例如, 图 14-7 a、b 中所示两悬臂梁除载荷外, 完全相同, 则可以将图 14-7 a 中梁的真实位移 $w_1(x)$ 作为图 14-7 b 中梁的虚位移。

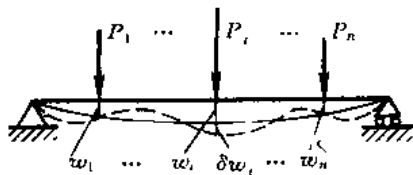


图 14-6 不同的虚位移模式

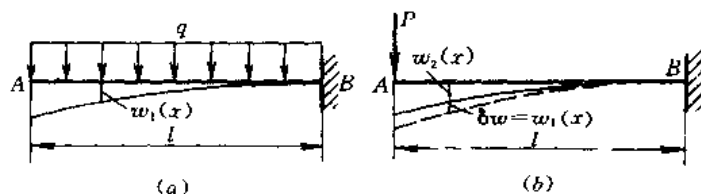


图 14-7 以真实位移作为虚位移

14-4-4 虚位移原理的应用条件

以上推证虚位移原理过程中,只涉及小变形条件下的平衡方程和变形几何关系: $d^2M/dx^2 = -q(x)$ 和 $d\theta/dx = -d^2w/dx^2$,并没有涉及材料的应力-应变关系.因此,虚位移原理的应用便仅有小变形的限制,而与材料的应力-应变关系无关.

§ 14-5 虚位移原理的应用

14-5-1 直接应用——求解变形曲线的近似方程

若以真实位移的增量作为虚位移,然后应用 $\delta W_e = \delta U$,可以求得真实位移曲线的近似方程.

以图 14-8 中的梁为例,为应用虚位移原理,首先假定满足梁的位移约束条件的真实挠度方程

$$w(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{l}$$

其中 a_1 为待定常数.显然,这一方程满足 $w(0) = w(l) = 0$ 的边界条件.

与这一挠度方程相对应,在线弹性材料的情形下,梁的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (b)$$

将式(a)代入式(b),得到

$$U = \frac{EI\pi^4}{4l^3} a_1^2 \quad (c)$$

通过 a_1 有一增量 δa_1 ,使真实位移 $w(x)$ 的增量为

$$\delta w(x) = \delta a_1 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (d)$$

以此作为虚位移,显然也满足约束条件 $\delta w(0) = \delta w(l) = 0$,则外力虚功和应变能增量分别为

$$\left. \begin{aligned} \delta W_e &= P \delta w_c = P \delta a_1 \\ \delta U &= 2a_1 \delta a_1 \left(\frac{EI\pi^4}{4l^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

其中 δw_c 为加力点的虚位移.

最后,应用虚位移原理 $\delta W_e = \delta U$,解出

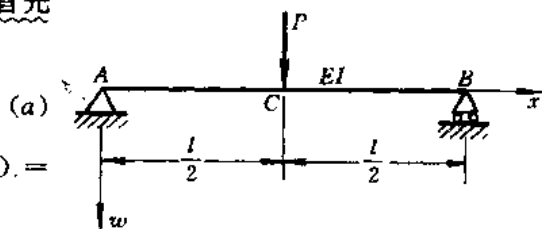


图 14-8 虚位移原理的应用

$$a_1 = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \quad (f)$$

将式(f)代入式(a), 便得挠度曲线的近似方程

$$w(x) = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \sin \frac{\pi x}{l}$$

由此求得梁中点的挠度

$$w_1 = \frac{Pl^3}{48.7EI}$$

这一结果与小挠度微分方程得到的 $w_1 = Pl^3/(48EI)$ 相比, 误差仅为 1.4%.

以上分析是假定挠度曲线方程只包含一项的情形. 若假定挠度曲线方程包含两项或更多项, 则所得结果将会更加逼近小挠度微分方程所得到的数值. 有兴趣的读者不妨假定 $w(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$, 按上述过程作一次练习. 不难发现, 其结果误差仅为 0.2%.

14-5-2 由虚位移原理导出卡氏第一定理

对于由若干个力 $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$ 组成的载荷系统, 与这些力对应的真实位移分别为 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_n$ (图 14-9), 应用虚位移原理, 但在众多位移 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_n$ 中, 只令某一个位移 Δ_i 有一增量 $\delta\Delta_i$, 并以此作为虚位移. 其余各处的虚位移则满足连续条件和约束条件 (图 14-9 中的虚线).

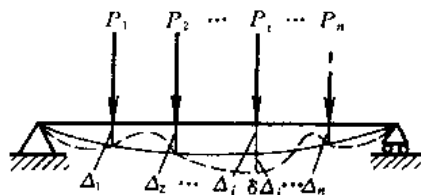


图 14-9 卡氏第一定理

于是, 外力虚功为

$$\delta W_e = P_i \delta\Delta_i \quad (a)$$

为求得应变能增量, 首先必须将应变能表达成位移的函数, 即

$$U = U(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_n) \quad (b)$$

这一多元函数的增量

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial \Delta_1} \delta\Delta_1 + \frac{\partial U}{\partial \Delta_2} \delta\Delta_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \delta\Delta_i + \dots + \frac{\partial U}{\partial \Delta_n} \delta\Delta_n$$

其中 $\delta\Delta_1 = \delta\Delta_2 = \dots = \delta\Delta_n = 0$, 惟有 $\delta\Delta_i \neq 0$, 于是应变能增量为

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \delta\Delta_i \quad (c)$$

应用虚位移原理, 由式(a)、(c)得

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i \quad (14-21)$$

此即“**卡氏第一定理**”(Castigliano's First Theorem). 它表明: 系统应变能对某一真实位移的偏导数, 在数值上等于与这一真实位移相对应的外力.

由于卡氏第一定理是由虚位移原理导出的, 因此, 其应用条件与虚位移原理相同, 即小变形的限制, 而与材料的应力-应变关系无关.

需要指出的是, 以上在推证虚位移原理与卡氏第一定理时, 均以梁的弯曲为例, 事实上, 它们对于除梁以外的杆件与结构, 对于弯曲以外的受力与变形形式也都是成立的. 为简单起见, 此处

不再一一赘述。

[例题 14-1] 由三铰二杆(线弹性材料)组成的特殊结构 ABC , 如图 14-10 所示, 加载后, 不能在原来 ABC 的位置上保持平衡, 而是在变形后的 $AB'C$ 位置保持平衡。于是, 二杆的受力与 B 点的位移有关。这时, 若通过二杆的变形确定 B 处的位移, 所得到的位移与载荷不再是线性关系。若已知二杆的拉压刚度 EA 、杆长 l 、外力 P , 试用卡氏第一定理求 Δ_B 。

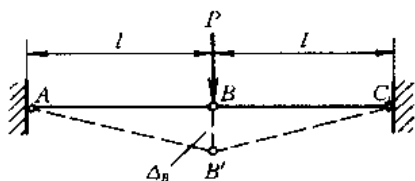


图 14-10 例题 14-1 图

解: 为应用卡氏第一定理, 需将应变能表成位移 Δ_B 的函数, 即 $U = U(\Delta_B)$ 。

1. 建立杆伸长(Δl)与位移(Δ_B)之间的关系: 根据图示之几何关系, 有

$$\Delta l = \sqrt{l^2 + \Delta_B^2} - l = l \left[1 + \left(\frac{\Delta_B}{l} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - l$$

展成泰勒级数(Taylor Series)后, 上式变为

$$\Delta l = l \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_B}{l} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{\Delta_B}{l} \right)^4 + \dots \right] - l \approx \frac{l}{2} \left(\frac{\Delta_B}{l} \right)^2 \quad (a)$$

其中略去了高于二次的项。

2. 建立应变(ϵ)与位移(Δ_B)之间的关系:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_B}{l} \right)^2 \quad (b)$$

3. 计算应变能: 由于二杆均为均匀拉伸, 故应变能

$$U = \int_V u dV = uV \quad (c)$$

其中

$$u = \frac{E}{2} \epsilon^2, V = 2Al \quad (d)$$

将式(b)、(d)代入式(c), 得到应变能与位移的关系式:

$$U = (2Al) \frac{E}{8} \left(\frac{\Delta_B}{l} \right)^4 = \frac{EA}{4l^3} \Delta_B^4 \quad (e)$$

4. 应用卡氏第一定理求位移:

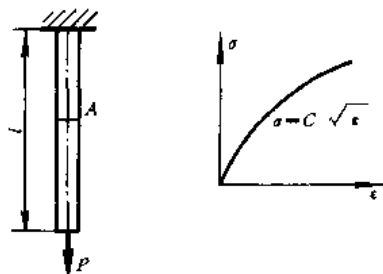
$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_B} = \frac{dU}{d\Delta_B} = \frac{EA}{l^3} \Delta_B^3 = P$$

由此解出

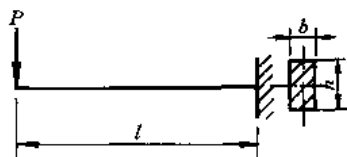
$$\Delta_B = \sqrt[3]{\frac{P}{EA}} l^3$$

习 题

14-1 承受轴向拉伸的杆及其材料的应力-应变关系如图所示。若杆长 l 、横截面面积 A 以及轴向载荷 P 等均为已知, 且应力-应变关系表为 $\sigma = C \sqrt{\epsilon}$ 。试确定杆内的应变能和余应变能。



习题 14-1 图

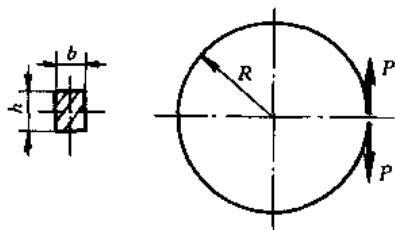


习题 14-2 图

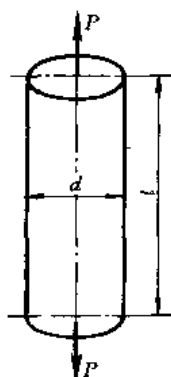
14-2 矩形截面悬臂梁受力如图所示,若已知材料的应力·应变关系为 $\sigma = E' |\epsilon|^{\frac{1}{2}}$, P, l, E', b, h 等亦为已知,求梁内的应变能与余应变能,忽略剪力影响。

14-3 矩形截面杆制成半径为 R 的开口圆环,受力如图所示。若不计剪力和轴力的影响,求下列情形下圆环的应变能:

1. 线弹性材料 $\sigma = E\epsilon$;
2. 弹性非线性材料 $\sigma = C\epsilon^{\frac{1}{2}}$ (σ, ϵ 均取绝对值)。



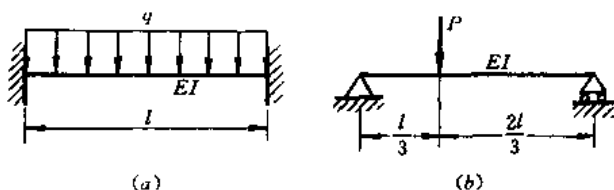
习题 14-3 图



习题 14-4 图

14-4 圆柱体承受轴向拉伸,若已知 P, l, d 以及材料弹性常数 E, ν ,试用功的互等定理,求圆柱体的体积改变量。

14-5 线弹性材料梁的支承与受力如图所示,试用虚位移原理,通过假定虚位移函数,确定挠度曲线方程。



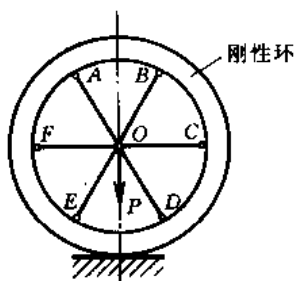
习题 14-5 图

14-6 刚性圆环内,铰接 6 根非线性材料制成的弹性杆, O, A, B, C, D, E, F 等处均为铰链,各杆的长度均为 l ,直径均为 d ;材料的应力·应变关系为 $\sigma = C\epsilon^{\frac{1}{2}}$ (压缩时 σ, ϵ 均取绝对值)。试用卡氏第一定理求加力点 (O) 处的铅垂位移。

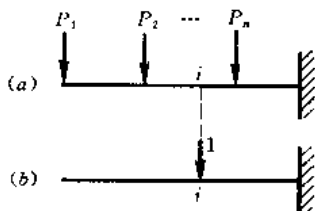
14-7 应用虚位移原理可以导出确定任意系统上任意点沿任意方向的位移,方法是建立一个单位载荷系统,这一系统与原载荷系统结构完全相同,只在所要求位移的那一点、沿所要求的位移方向施加单位载荷。试以梁为例(图 a 为原载荷系统,图 b 为单位载荷系统),用虚位移原理推证原载荷系统上任意点 i 的位移表达式为

$$\Delta_i = \int_l \frac{M\bar{M}}{EI} dx$$

其中 M ——原载荷系统的弯矩; $\bar{M}$ ——单位载荷系统的弯矩; EI ——弯曲刚度。



习题 14-6 图



习题 14-7 图

选择类习题

14-8 图示之悬臂梁, 设自由端只作用有集中力 P 时, 梁的应变能为 $U(P)$; 自由端只作用有弯曲力偶 m 时, 梁的应变能为 $U(m)$. 若同时施加 P 和 m 时, 梁的应变能为:

- (A) $U(P) + U(m)$;
- (B) $U(P) + U(m) + m\theta$ (θ 为 P 作用时自由端转角);
- (C) $U(P) + U(m) + \frac{1}{2}Pw_{\max}$ ($w_{\max}$ 为 m 作用时自由端挠度);
- (D) $U(P) + U(m) + \frac{1}{2}(m\theta + Pw_{\max})$.

正确答案是_____.

14-9 简支梁中点只承受集中力 P 时, 最大转角为 $\theta_{\max}$, 应变能为 $U(P)$; 中点只承受集中力偶 m 时, 最大挠度为 $w_{\max}$, 梁的应变能为 $U(m)$. 当同时在中点施加 P 和 m 时, 梁的应变能为:

- (A) $U(P) + U(m)$;
- (B) $U(P) + U(m) + m\theta_{\max}$
- (C) $U(P) + U(m) + Pw_{\max}$
- (D) $U(P) + U(m) + \frac{1}{2}(m\theta_{\max} + Pw_{\max})$.

正确答案是_____.

14-10 根据功的定义, 与集中力、集中力偶、梁上均布线载荷(q)、均匀压力对应的广义位移有四种答案:

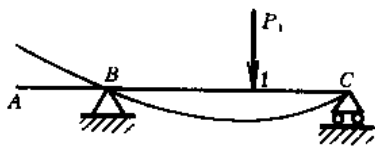
- (A) 线位移、角位移、线位移、线位移;
- (B) 线位移、角位移、线位移曲线与初始位置之间的面积、体积改变量;
- (C) 线位移、角位移、线位移曲线长度、面积改变量;
- (D) 线位移、角位移、线位移曲线长度、体积改变量.

正确答案是_____.

14-11 外伸梁 ABC 若在 I 截面处施加集中力 $P_1 = 3\text{kN}$, 可测得支承 B 处截面转角 $\theta_B = 0.006\text{rad}$. 现在外伸端 A 处施加顺时针方向的力偶, 使得 I 截面处产生 1mm 的向下挠度, 则这力偶的数值应等于:

- (A) $m = 1.0\text{ kN} \cdot \text{m}$;
- (B) $m = 10\text{ kN} \cdot \text{m}$;
- (C) $m = 0.5\text{ kN} \cdot \text{m}$;
- (D) $m = 5\text{ kN} \cdot \text{m}$.

正确答案是_____.



习题 14-11 图