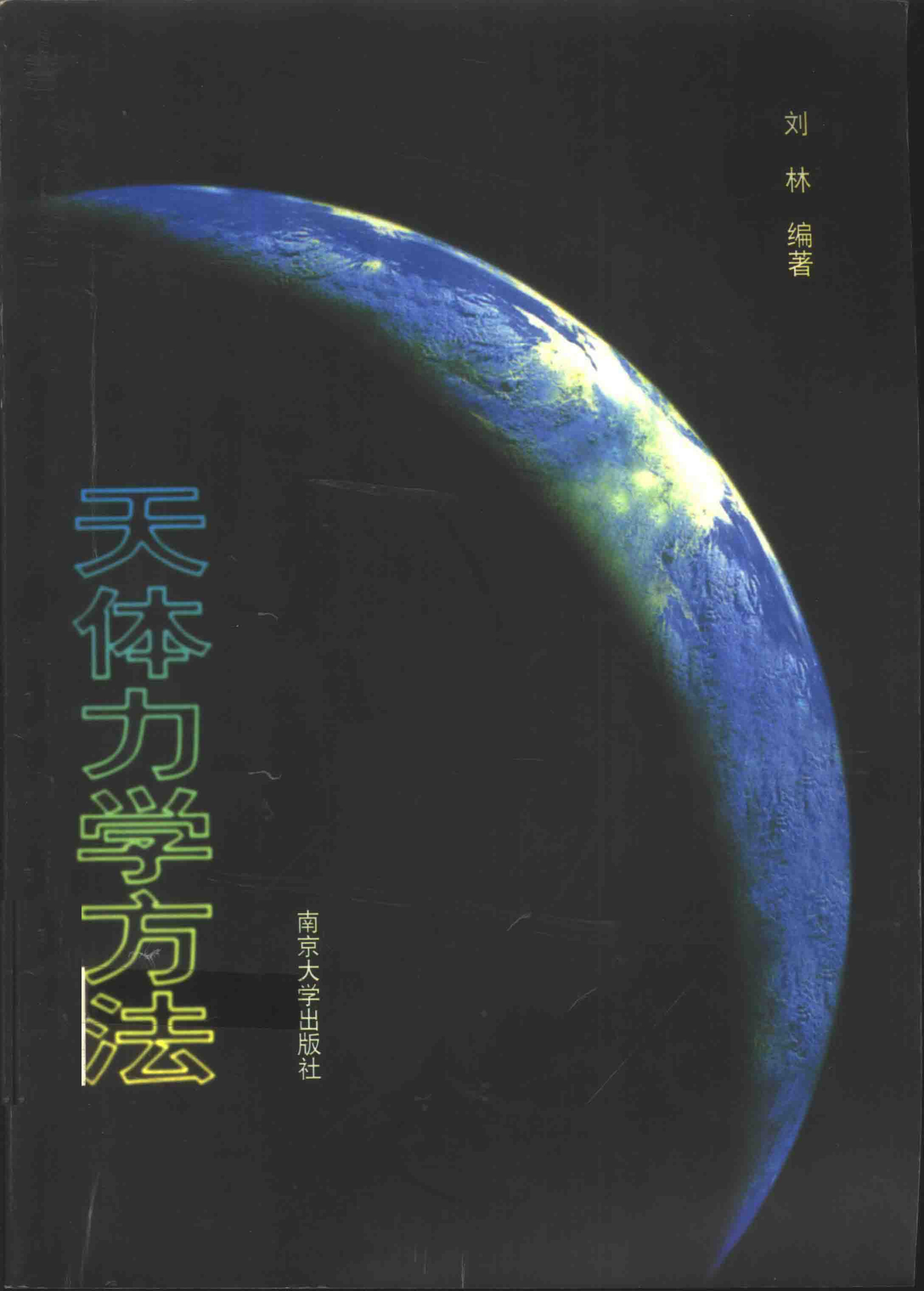


天体力学方法

刘林 编著

南京大学出版社

天 体 力 学 方 法

刘　林　编著

南 京 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书是一部天体力学领域的基础论著，是南京大学天文系计划编著出版的天体力学丛书的第二部(第一部《天体力学基础》已于1994年出版)。书中对近代天体力学中所采用的基本方法，诸如分析方法(又称普遍摄动法)中的摄动法、平均法和变换方法，数值方法(又称特别摄动法)中的单步法、多步法和哈密顿算法(亦称辛算法)，以及各种摄动因素的处理和轨道改进等，都作了详尽的论述和系统的介绍。除此之外，为了保持本书具有一定的独立性，便于读者阅读，书中对无摄运动和受摄运动的概念等天体力学基础知识也作了必要的阐述。

本书可作为天文和数学、应用数学、计算数学、一般力学、航天和测绘等专业高年级大学生学习轨道力学的基础教材，也可作为研究生和有关科技人员的参考书。

天体力学方法

刘　林　编著

*

南京大学出版社出版

(南京大学校内　邮政编码:210093)

江苏省新华书店发行　江苏省地质测绘院印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16　印张:15.125　字数:378千

1998年4月第1版　1998年4月第1次印刷

印数1—1500

ISBN 7—305—03052—x/p·115

定价:18.00元

前　言

这部《天体力学方法》旨在为实际应用提供广泛的基础指导，内容的介绍和编排都尽可能便于计算工作，其目的不止是一部计算手册，更重要的是从基本原理出发，对论及的课题作必要的逻辑推导，并试图阐明采用这些过程的缘由，从而为读者进一步开展独立研究打下基础。

天体力学问题的研究既可以像数学那样作为一种思维的训练，从而获得对原理和形式逻辑关系的普遍了解，又可以从实用角度进行研究和解决具体问题。前者当然不可忽视，而后者正是本书内容侧重的方面。因此，书中将主要阐述近代天体力学问题中的一些重要方法，包括分析方法和数值方法以及必要的定性讨论。

阅读本书应具备一定的天文知识和天体力学、理论力学以及微积分学基础。此外，为了对某些推导能够彻底理解，还需要掌握线性代数、常微分方程和概率统计（估计理论）等领域的有关知识。

鉴于这本书的目的，其内容具体安排大致分为如下几个部分：

1. 绪论和第一章的基本内容是阐明天体力学问题的具体背景和相应数学模型的建立，即常用的受摄力学系统，特别是受摄二体问题的数学模型。具体介绍受摄系统中运动天体的参考轨道（包括二体问题等可积情况）对应的分析解。

2. 第二章、第三章、第六章和第七章的内容是介绍天体力学问题分析解的经典摄动法、改进的摄动法（即平均根数法）和变换方法，过去常称为普遍摄动(general perturbation)法。其中第六章和第七章的一节是介绍这些方法中出现的奇点问题及相应的运动特征和解决方法。

3. 第四章和第五章是介绍当今天体力学问题中各种天体（包括人造天体）运动可以归结为受摄二体问题时所涉及的几种主要摄动因素及其处理方法，为解决这类具体问题打下必备的基础。

4. 第八章和第九章是介绍求解受摄运动方程时常用的数值方法，即特别摄动(special perturbation)法，其内容并不单纯是通常求解常微分方程数值解法的重复，而是侧重天体运动方程的特点以及近年来引起注意的辛算法(symplectic algorithn)。辛算法是针对哈密顿(Hamiton)系统的，亦称哈密顿算法，对于天体力学和动力天文中的"演化"问题，采用该方法具有独特的优点。

5. 第十章是介绍天体力学定量问题中最重要的一个内容——多资料统计定轨，即轨道改进。

从内容的安排可以看出，虽然书名是天体力学方法，但对非天体力学专业的学生，完全可以作为学习轨道力学的基础教材。

书中公式和符号较多，同一符号在不同公式中可能有不同含义。另外，为了语言上的需要，同一量（或方法）在不同之处可能有不同名称。然而，对于最常用的量（如轨道根数等），将尽量

保持用同一符号表示，而且采用本学科领域中习惯采用的符号，便于读者查阅有关原始文献。

本书是根据南京大学天文系30多年来开设的有关课程的教材和研究工作积累的资料而写成，1993年3月完成初稿。初稿完成后正值作者去美国访问，借此机会，对美国大学有关专业的天体力学、轨道力学以及有关教材和专著作了较详尽的了解，在此基础上对初稿又作了一些必要的修改，于1995年5月完稿。另外，近年来，廖新浩博士在这一方面的教学与科研工作，也为本书的完稿提供了有益的帮助，在此表示衷心的感谢。

编者

1995.5.

目　　录

绪　论

一、动力模型

无论是太阳系还是恒星系统(密近双星、星团等),或星系系统,作为天体力学所讨论的对象,包括上述各系统中单个天体或一个天体系统的运动规律。在一定条件下,这些天体都可看成质点,这就对应最简单的 N 体模型,也是天体力学问题所采用的一个经典模型。

在一个天体系统中,N 个天体又往往包含 n 个大天体和 k 个小天体($N=n+k$),其中 k 个小天体相对 n 个大天体而言小到对后者运动没有影响(确切地说影响是存在的,只是该影响从定量或定性的角度来看,小到无需考虑)。但 k 个小天体之间可能相距较近,它们之间的相互作用应予考虑,这就构成了限制性 $n+k$ 体问题,特别当 $N=3$,$n=2$,$k=1$,即通常所说的限制性三体问题。例如太阳系中太阳和九大行星即构成一个 10 体问题($N=10$)。而太阳、木星和小行星(处于火星和木星轨道间的主带小行星)这三体系统就构成一个 $N=2+1$ 的限制性三体问题;密近双星及其之间交换的物质(看成小天体)亦可看成限制性三体问题;太阳、木星和木星的四颗伽里略(Galilean)卫星即构成一个 $N=2+4$ 的限制性(2+4)体问题。

所有的天体都并非质量分布均匀的球体,在自转平衡条件下,通常为扁球体,而且还有潮汐形变,如各大行星。相应的引力场与球形引力场有明显的差别,在讨论自然卫星和人造卫星绕大行星运动时,由于距离较近,必须考虑非球形效应,即大行星与其卫星构成的不是一个简单的二体系统,在该系统中,还有非球形引力摄动存在,相当于一个限制性三体问题:大行星(作为质点)、非球形部分和作为小天体的卫星。除非球形影响外,还有辐射压(简称光压)作用,如人造地球卫星的运动,就要受到太阳光压力的影响;在密近双星系统中,辐射压也是非常显著的。上述各力学因素都属于保守力范畴,也是经典天体力学考虑的主要内容。事实上,耗散因素几乎在各种层次的天体系统中都存在,人造地球卫星(特别是近地卫星)的运动就是一个典型的例子,地球大气的阻尼影响相当明显。

随着观测精度的提高,广义相对论效应必须考虑,作为牛顿(Newton)框架下的天体力学,天体运动方程中,将要增加后牛顿(Post-Newton)项。

综上所述,各层次的天体系统,从动力学角度来看都比较复杂,一个简单的质点二体问题事实上是不存在的。严格地说,质点型的 N 体问题亦与真实天文背景有距离。但是在一定条件下,可以用简化的动力模型来描述真实的天体背景,而且这样做确是有效的,无论从定量或定性角度来看都是有意义的。

二、受摄力学系统的建立

尽管动力模型很复杂，但大多数天体系统都有一个共同特征：对于运动天体（即所要讨论的天体）而言，它在该系统中所受到的各种力学作用，只有一“项”是主要的，其它作用相对较小。因此，可以将这样的系统处理成一个受摄二体系统。例如，太阳、地球、木星三体系统，讨论地球或木星（作为运动天体）的运动时，太阳引力是主要的，这就可以构成一个受摄二体问题，中心引力天体是太阳，运动天体是两个行星之一，而另一个即为摄动天体。再如，讨论人造卫星绕地球运动时，也是一个典型的受摄二体系统，作为质点的地球（即质量分布均匀的球体）是该系统的中心引力体，其引力作用是主要的，而非球形部分对应的修正项即为摄动体。

考虑一个可以归结为受摄二体问题的 n 体系统，相应的各天体的质量分别记作 $m_1,m_2,\cdots,m_n$。不失一般性，就令 m_1 作为该系统的中心天体，且记 $M=m_1$，并采用运动坐标系 $M\text{-}xyz$（见图 1），坐标原点即中心天体 M 的质心。如果 n 个天体均可看成质点，则各天体 $m_i(i=2,3,\cdots,n)$ 相对中心天体 M 的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i=-\frac{G(M+m_i)}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i-G\sum_{j=2}^{n}m_j\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}_{ij}}{\Delta_{ij}^3}+\frac{\boldsymbol{r}_j}{r_j^3}\right)\quad j\neq i \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{ij}=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j \tag{2}$$

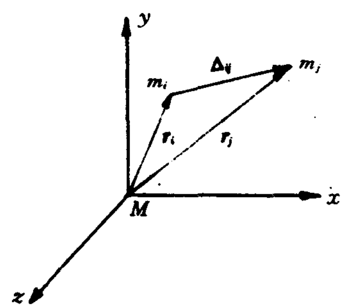


图 1 运动坐标系 $M\text{-}xyz$

方程（1）中的 G 是万有引力常数。

对于受摄二体问题，一般有

$$m_j\ll M\quad(j=2,3,\cdots,n) \tag{3}$$

如太阳系中太阳和大行星组成的力学系统；或

$$r_i\ll(r_j,\Delta_{ij})\quad(j\neq i) \tag{4}$$

如月球绕地球运动考虑太阳摄动时，人造卫星绕地球运动考虑太阳摄动时，即如此。当然，也有同时满足上述两个条件的。满足上述条件时，运动方程（1）右端的第一项比第二大项大得多。若将这两项分别记作 $\boldsymbol{F}_0$ 和 $\boldsymbol{F}_1$，则方程（1）可写成下列形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_0+\boldsymbol{F}_1\quad(i=2,3,\cdots,n) \tag{5}$$

并有

$$\frac{F_1}{F_0}=O(\varepsilon),\ \ \varepsilon\ll 1 \tag{6}$$

$\boldsymbol{F}_1$ 即称为摄动力（实为摄动加速度）。如果在该 n 体系统中，还存在其它力学因素，且对 m_i 运动的影响亦相对较小，同样称为摄动因素，仅仅使 $\boldsymbol{F}_1$ 增加一些内容，只不过各种摄动因素的性质可能大不相同，并不局限于方程（1）右端第二大项那种保守力。

对于上述受摄二体问题，一个很好的近似是考虑 $\varepsilon=0$ 的情况，此时有

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_0=-\frac{G(M+m_i)}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i \tag{7}$$

在该系统中只有运动天体和中心天体，此即二体问题，它是可积的。该问题的解是完整系统

(5)的一个近似(在摄动解中,称它为零阶近似),并可以此解作为参考解,去求受摄系统(5)的完整解。

当然,在具体处理复杂力学系统(5)时,首先令 $\varepsilon=0$,用二体问题的解作为参考解并不是唯一的办法,根据不同问题的特点和需要,曾出现过多种方法,例如,将 $\boldsymbol{F}_1$ 中的主要部分并入 $\boldsymbol{F}_0$ 中,作为原问题(5)的一个参考系统。这类方法,一般应满足以下两点:

1. 参考系统必须是"可积"的,并能给出相应解的具体表达式。

2. 要便于在此基础上求剩余摄动(即 $\boldsymbol{F}_1$ 的剩余部分引起的变化)。

尽管这一参考系统的解与二体问题的解一样,都是原系统(5)的一个近似,但通常却把这种同时考虑了部分摄动的解对应的轨道称为问题(5)的中间轨道。事实上,二体问题解对应的轨道亦是一种中间轨道。由于目前已找出的各类中间轨道解,都比二体问题的解复杂,尽管它们更接近真实轨道解,但要在它的基础上求剩余摄动都比较麻烦。因此,在天体力学中比较成熟而常用的方法,还是以二体问题的解作为参考解。不过,在某些问题中,无论是分析方法还是数值方法,都在不同程度上引用了中间轨道的思想和某些处理方法(如经典的月球运动理论等),这将在本书的有关章节中分别介绍。至于有关中间轨道理论的详细内容,读者可参阅有关书籍,作者曾在《人造地球卫星轨道力学》(高等教育出版社 1992 年出版)一书的第十三章中作过较全面的介绍。

对于那些不能构成受摄二体问题的 $N(N\geqslant3)$ 体问题,除特殊情况外,一般不能给出分析解,仍然停留在定性研究上,或采用数值方法给出必要的离散解。至于数值方法,对所要解决问题的动力模型没有任何特殊限制。鉴于上述情况,本书主要针对受摄二体问题模型,介绍近代天体力学常用的几类分析方法及其有关内容,同时也结合天体运动的特点(包括受摄二体问题中的小参数方程),专门介绍有关的数值方法,共有两章。

三、空间坐标系与时间系统

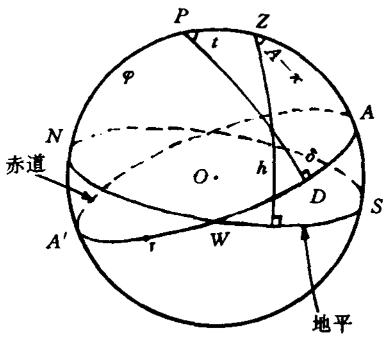
研究天体运动常采用的空间坐标系主要有三种:地平坐标系、赤道坐标系和黄道坐标系。一个空间坐标系应包含三个要素:坐标原点、参考平面(xy 平面)和该平面的主方向(x 轴方向)。

地平坐标系(Horizontal System)。确切地说应该是站心地平坐标系,坐标原点为观测站"中心",参考平面为过站心与地球参考椭球体相切的平面(地平面),其主方向是地平面中朝北的方向,即天球上的北点(N)方向,该坐标系的 z 轴方向即天球上的天顶(Z)方向,见图 2。

赤道坐标系(Equatorial System)。该坐标系又分站心赤道坐标系和地心赤道坐标系。前者的原点在站心,后者则在地心,即地球质心,参考平面是地球赤道面,但要注意,对于站心赤道坐标系,参考平面与地球赤道面平行,而在天球上两者合一,主方向都是春分点(γ)方向。因此,这两个坐标系之间只是一个平移关系。

黄道坐标系(Ecliptic System),也可分地心黄道坐标系和日心黄道坐标系。坐标原点各为地心和日心,参考平面都是地球绕日运动的轨道面,即黄道面,而主方向仍是春分点方向。

地平坐标系与赤道坐标系之间,赤道坐标系与黄道坐标系之间的几何关系,分别见图 2 和图 3,图中各符号均为天文上常用的符号。



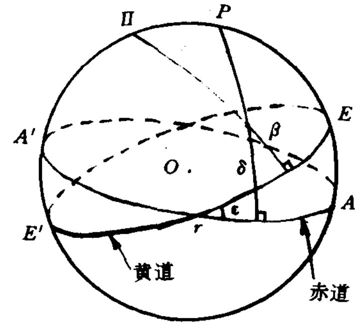


图 2　地平坐标系与赤道坐标系　　　　图 3　赤道坐标系与黄道坐标系

在上述地平、地心赤道和日心黄道坐标系中，天体的坐标矢量各记为 $\boldsymbol{\rho}$，$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{R}$，相应的球坐标各记为 $\rho,A,h;r,\alpha,\delta$ 和 R,λ,β。其中 ρ,r 和 R 各为天体到坐标原点的距离。A 为地平经度，从北点沿地平经圈向东点(E)方向(顺时针方向)计量，h 为地平高度，它与天顶距 z 的关系为 $h=90°-z$；α 为赤经，从春分点方向沿赤道向东计量，δ 是赤纬；λ 是黄经，从春分点方向沿黄道向东计量，β 是黄纬。在相应的直角坐标系中，有下列关系存在：

$$\boldsymbol{\rho}=\rho\begin{pmatrix}\cos h\cos A\\-\cos h\sin A\\\sin h\end{pmatrix}\tag{8}$$

$$\boldsymbol{r}=r\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\\cos\delta\sin\alpha\\\sin\delta\end{pmatrix}\tag{9}$$

$$\boldsymbol{R}=R\begin{pmatrix}\cos\beta\cos\lambda\\\cos\beta\sin\lambda\\\sin\beta\end{pmatrix}\tag{10}$$

关于地平经度 A 的度量，也有从南点(S)沿地平经圈向东(逆时针方向)计量的，相应的(8)式则改为

$$\boldsymbol{\rho}=\rho\begin{pmatrix}\cos h\cos A\\\cos h\sin A\\\sin h\end{pmatrix}\tag{11}$$

站心赤道坐标系和地心黄道坐标系中的位置矢量则用 $\boldsymbol{r}'$ 和 $\boldsymbol{R}'$ 表示，相应的表达式分别与 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 的表达式相同，只是 r 改为 r'，R 改为 R'，α,δ 和 λ,β 应理解为站心赤道坐标和地心黄道坐标。

上述几种坐标之间的转换关系是简单的，仅涉及到平移和旋转，有

$$\boldsymbol{r}'=R_z(\pi-S)R_y\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\boldsymbol{\rho}\tag{12}$$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{r}_A\tag{13}$$

$$\boldsymbol{R}'=R_x(\varepsilon)\boldsymbol{r}\tag{14}$$

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}'+\boldsymbol{R}_E\tag{15}$$

其中，φ 是测站的天文纬度，S 是春分点的时角，即测站的地方恒量时（见图 2），$\boldsymbol{r}_A$ 是地面测站的地心坐标矢量，ε 是黄赤交角，$\boldsymbol{R}_E$ 是地心的日心坐标矢量。上述坐标转换中涉及到的旋转矩阵由下式表达：

$$R_x(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{16}$$

$$R_y(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{17}$$

$$R_z(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{18}$$

对于太阳系动力学，讨论大行星和小行星的运动时，采用的是日心黄道坐标系，而在人造地球卫星动力学中采用的则是地心赤道坐标系。由于岁差章动和地极移动等原因，上述坐标系的参考平面和春分点方向等都将发生变化，这就使得空间坐标系的选取复杂化。在许多实际问题中，采用的是历元平赤（黄）道坐标系，例如近年来采用的是 J2000 赤（黄）道坐标系，参考平面和主方向分别为平赤（黄）道面和平春分点，它将涉及到岁差章动和极移等多种改正。有关知识在各种球面天文学的教材中都有详细介绍，关于地球卫星动力学中的各种地心坐标系，在本章参考文献[1]的第一章中亦有详细介绍。

讨论各种天体运动时，除空间坐标系外，还涉及到时间系统。就运动而言，既需要一个联系天体位置测量的时间系统，又需要一个反映天体运动过程的均匀时间尺度，地球自转曾作这两种时间系统的统一基准。但由于地球自转的不均匀性和测量精度的不断提高，问题也复杂化了，既要有一个均匀时间基准，又要与地球自转相协调（联系到对天体的测量），因此就导致了下述几种时间系统。

恒星时（ST）。春分点连续两次过中天的时间间隔称为一"恒星日"，那么，恒星时就是春分点的时角，它的数值 S 等于上中天恒星的赤经 α，即

$$S=\alpha \tag{19}$$

这是经度 λ（不要与黄经混淆）的地方恒星时。与下述世界时密切相关的格林威治(Greenwich)恒星时 S_0 由下式给出：

$$S_0=S-\lambda \tag{20}$$

格林威治恒星时又有真恒星时（或称视恒星时）GAST 与平恒星时 GMST 之分。既然恒星时是由地球自转所确定，那么地球自转的不匀匀性就可通过它与均匀时间尺度的差别来测定。

世界时（UT）。与恒星时相同，世界时也是根据地球自转测定的时间，它以平太阳日为单位，1/86400 平太阳日为秒长。根据天文观测直接测定的世界时，记为 UT0，它对应于瞬时极的子午圈。加上引起测站子午圈位置变化的地极移动的修正，就得到对应平均极的子午圈的世界时，记为 UT1，即

$$\mathrm{UT1}=\mathrm{UT0}+\Delta\lambda \tag{21}$$

$\Delta\lambda$ 是极移改正量。

由于地球自转的不均匀性，UT1 并不是均匀的时间尺度。而地球自转不均匀性呈现三种

特性：长期慢变化（每百年使日长增加 1.6 毫秒），周期变化（主要是季节变化，一年里日长约有 0.001 秒的变化，除此之外还有一些影响较小的周期变化）和不规则变化。这三种变化不易修正，只有周年变化可用根据多年实测结果给出的经验公式进行改正，改正值记为 ΔT_s，由此引进世界时 UT2：

$$\mathrm{UT2}=\mathrm{UT1}+\Delta T_s \tag{22}$$

相对而言，这是一个比较均匀的时间尺度，但它仍包含着地球自转的长期变化和不规则变化，特别是不规则变化，其物理机制尚不清楚，至今无法改正。

周期项 ΔT_s 的振幅并不大，而 UT1 又直接与地球瞬时位置相联系，因此，对于一般精度要求不太高的问题，就可用 UT1 作为统一的时间系统。而对于高精度问题，即使 UT2 也不能满足，必须寻求更均匀的时间尺度，这正是下面要介绍的另一类时间系统。

国际原子时（TAI），这是一种标准频率。1967 年 10 月第十三届国际计量大会上通过了一种新的秒长定义，即铯原子 C_s^{133} 基态的两能级间跃迁辐射的 9192631770 周所经历的时间间隔作为 1 秒的长度，称为国际单位秒（SI）。由这种时间单位确定的时间系统称为国际原子时（TAI），它的起算点靠近 1958 年 1 月 1 日的 UT2 0 时，有

$$(\mathrm{TAI}-\mathrm{UT2})_{1958.0}=-0^{s}.0039 \tag{23}$$

动力学时——地球动力学时（TDT）和质心动力学时（TDB）。因上述原子时 TAI 是在地心参考系中定义的具有国际单位制秒长的坐标时间基准，从 1984 年起，它就取代历书时（ET）正式作为动力学中所要求的均匀时间尺度。由此引入一种地球动力学时（TDT，1991 年后改称地球时 TT），它与原子时 TAI 的关系为

$$\mathrm{TDT}=\mathrm{TAI}+32^{s}.184 \tag{24}$$

这一关系是根据 1977 年 1 月 1 日 $00^h00^m00^s$（TAI）对应 TDT 为 1977 年 1 月 $1^d.0003725$ 而来，此起始历元的差别就是该时刻历书时与原子时的差别。这样定义起始历元就便于用 TDT 系统代替 ET 系统。

显然，TDT 是地心时空标架的坐标时，用作视地心历表的独立变量。在人造地球卫星动力学中，它就是一种均匀时间尺度，相应的运动方程即用它作为自变量。除此之外，对于太阳系动力学，还定义一种质心动力学时 TDB，即太阳系质心时空标架的坐标时。它是一种抽象、均匀的时间尺度，月球、太阳和行星的历表都是以 TDB 为独立变量的，岁差、章动的计算公式也是依据该时间尺度的。

上述两种动力学时的差别（TDB－TDT）是由相对论效应引起的，它们之间的转换关系仍在讨论中，文[2]曾给出过它们之间的一种转换公式，其中最大的一项为

$$1^{s}.658\times10^{-3}\sin E$$

E 是地月系质心绕日轨道的偏近点角。

除上述时间系统外，在计算中常常会遇到历元的取法以及几种年的长度问题。一种是贝塞耳（Bessel）年，或称假年，其长度为平回归年的长度，即 365.2421988 平太阳日。常用的贝塞耳历元是指太阳平黄经等于 280°的时刻，例如 1950.0，并不是 1950 年 1 月 1 日 0 时，而是 1949 年 12 月 31 日 $22^h09^m42^s$（世界时），相应的儒略（Julian）日为 2433282.4234。另一种就是儒略年，其长度为 365.25 平太阳日。儒略历元是指真正的年初，例如 1950.0，即 1950 年 1 月 1 日 0 时。显然，引用儒略年较为方便，因此，从 1984 年起，贝塞耳年被儒略年代替。这两种历元之间的对应关系列于表 1。

表 1　两种历元的儒略日

贝塞耳历元	儒略历元	儒略日
1900.0	1900.000858	2415020.3135
1950.0	1949.999790	2433282.4234
2000.0	1999.998722	2451544.5333
1989.999142	1900.0	2415020.0
1950.000210	1950.0	2433282.5
2000.001278	2000.0	2451545.0

为了方便，常用修改的儒略日(MJD)，定义为

$$MJD = JD - 2400000.5 \tag{25}$$

例如 JD1950.0 对应 MJD=33282.0。

与上述两种年的长度对应的回归世纪(即 100 年)和儒略世纪的长度分别为 36524.22 平太阳日和 36525 平太阳日。

四、计算单位

对于不同的时空尺度，为了计算和公式表达的方便，采用不同的计算单位是很自然的。对于一个动力学问题，首先要提到的是引力常数 G 的数值及其量纲，目前采用的值为

$$G = 6.672 \times 10^{-11} \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}} \tag{26}$$

这里符号 m 是米，kg 是千克，s 是秒。但由天文观测直接测得的是地心引力常数 GE，E 是地球质量，有

$$GE = 3.986005 \times 10^{14} \mathrm{m^3 s^{-2}} \tag{27}$$

相应的几个导出常数——日心引力常数 GS、太阳质量 S 和日地质量比分别为

$$\left.\begin{aligned} GS &= 1.32712438 \times 10^{20} \mathrm{m^3 s^{-2}} \\ S &= 1.9891 \times 10^{30} \mathrm{kg} \\ S/E &= 332946.0 \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

在讨论大行星和小行星的运动时，常采用太阳质量、天文单位($AU = 1.49597870 \times 10^{11}$m)和平太阳日作为基本单位。那么引力常数将变为

$$G = 2.959122083 \times 10^{-4} \tag{29}$$

相应的高斯(Gauss)引力常数 k 为

$$k = \sqrt{G} = 0.01720209895 \tag{30}$$

如果为了公式表达方便，让引力常数 $G=1$，则相应的时间单位将为

$$T = (AU^3/GS)^{1/2} = 58.13244091 \text{ 平太阳日} \tag{31}$$

在人造地球卫星的有关工作中，常用的计算单位有两种，一是 kg，m，s(千克、米、秒)，引力常数 G 即(26)式给出的值；另一种是地球质量、地球参考椭球体的赤道半径，且使引力常数 G

$=1$，相应的时间单位则为

$$T=(a_e^3/GE)^{1/2}=13.446860\text{min}$$
$$=806.8116\text{s} \tag{32}$$

其中 GE 即前面(27)式给出的地心引力常数值，$a_e=6378140\text{m}$。在人造地球卫星精密定轨中，时间单位 T 常用 $(a_e^3/GE)^{1/2}$ 表达，使得采用计算机计算时能保留足够多的有效字长。

参 考 文 献

[1] 刘林，《人造地球卫星轨道力学》，高等教育出版社，1992 年。

[2] Moyer，T. D. ，*Celest. Mech*，23(1981)，33～56.

第一章　二体问题的基本关系式及其应用

在绪论中已指出，对于受摄力学系统，最常用的模型是受摄二体问题，二体问题的解就作为解决相应问题的基础。因此，尽管在《天体力学基础》[1]一书中对二体问题已有详尽的介绍，作为《天体力学方法》这本书，对此基础问题仍需再作必要的阐述，并针对解决受摄二体问题的具体情况，着重讨论椭圆运动，给出各种常用关系式和它的应用。同时还介绍广义力场中的二体问题，即两个相距为 r 的天体 m_1 和 m_2 之间的引力 $\boldsymbol{F}$ 不同于牛顿万有引力，有

$$\boldsymbol{F}=-\frac{Gm_1m_2}{r^N}\boldsymbol{r},\quad N>2$$

如中心天体为扁球体的二体系统，考虑广义相对论效应的二体问题，以及星系中恒星在星系自引力作用下的运动等，都会遇到这种情况。

1.1　二体问题的可积性与六个积分

作为二体问题，两个天体均作为质点对待。分别将该二天体的质量记作 M 和 m，讨论天体 m 相对天体 M 的运动。此时可将绪论中的运动方程(6)改写为下列形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{G(M+m)}{r^2}\hat{r} \tag{1.1}$$

$\hat{r}=\boldsymbol{r}/r$ 是 M 到 m 方向（径向）的单位矢量。关于相应的运动坐标系 $O\text{-}XYZ$（图 1.1），其原点 O 当然在天体 M 上（注意，此时 M 是质点），但基本平面（XY 坐标面）可有多种选取。根据天体力学问题的具体特点，对于人造地球卫星的运动，XY 平面与地球赤道面一致，而处理太阳系中大行星和小行星的运动问题，往往取日心黄道面作为 XY 平面，在讨论自然卫星运动时，则与讨论人造地球卫星的运动有些相似，即取各大行星的赤道面作为 XY 平面。至于 X 轴方向的确定，对于太阳系而言，无论是讨论行星运动，还是人造地球卫星的运动，几乎都是取春分点方向作为 X 轴方向。另外，有关赤道面、黄道面以及春分点方向的变化，对基本平面（XY 坐标面）和基本方向（X 轴方向）的选取有何影响，这里不再一一细谈，读者可在各有关问题的讨论中获知，本章参考文献[2]的第一章和第十一章有专门讨论。

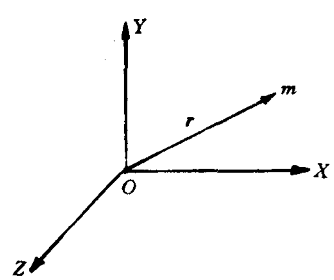


图 1.1　坐标系 $O\text{-}ZYZ$

为了简便，常记

$$\mu=G(M+m) \tag{1.2}$$

方程(1.1)对应的是一有心力问题，不仅是可积的(这里的可积是指上述微分方程的解可以写成求积形式)，而且可以具体给出六个积分的完整表达式。下面将作这一介绍，并在给出六个积分的同时，指出如何判断它是可积的，从而可以使读者了解到与其类似的广义力场中的二体问题为什么也是可积的。

1. 动量矩积分(或称面积积分)

根据有心力的性质，可直接写出方程(1.1)的动量矩积分，由方程(1.1)亦容易推出该积分。若记 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}$ 为面积速度矢量，则由方程(1.1)可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})=\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=0$$

这表明 $\boldsymbol{h}$ 为一常矢量，天体 m 相对 M 的运动为一平面运动。相应的动量矩积分可写成下列形式：

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=h\hat{R} \tag{1.3}$$

其中 $h=|\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}|$ 为面积速度常数，单位矢量 $\hat{R}$ 即表示面积速度的方向，它是天体运动平面的法向单位矢量。

如果用天体运动轨道来描述面积积分常数，则可引用辅助天球(见图 1.2)，图中大圆 AA' 和 BB' 分别表示基本平面(XY 坐标面)和运动天体轨道在辅助天球上的投影，R 方向即轨道面法向，i 就是轨道面与基本平面的夹角，Ω 即轨道升交点方向 N(或称节点)的经度，从 X 方向起量。在此坐标系中，利用球面三角的余弦公式，不难导出，法向单位矢量 $\hat{R}$ 的表达式为

$$\hat{R}=\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin i\ \sin\Omega\\-\sin i\ \cos\Omega\\\cos i\end{pmatrix} \tag{1.4}$$

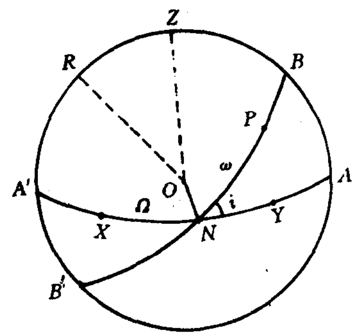


图 1.2　辅助天球

面积积分(1.3)包含了 h,i,Ω 三个积分常数，h 是面积速度的两倍，i,Ω 则确定了轨道平面的空间方向。

从积分(1.3)的导出过程不难看出，只要是有心力，即

$$\boldsymbol{F}=F(r,\lambda,\varphi)\boldsymbol{r} \tag{1.5}$$

必存在积分(1.3)，并不要求如同方程(1.1)右端的 $F(r)\hat{r}$ 那种简单形式。λ,φ 是常用的球坐标的另两个分量，即经纬度。

2. 运动平面内的轨道积分和活力公式

既然是平面运动，而相应的平面已由(i,Ω)确定，那么，我们即可在这一确定的平面内讨论降阶后的方程。引入平面极坐标(r,θ)，运动方程(1.1)的径向分量为

$$\ddot{r}-r\theta=-\frac{\mu}{r^2} \tag{1.6}$$