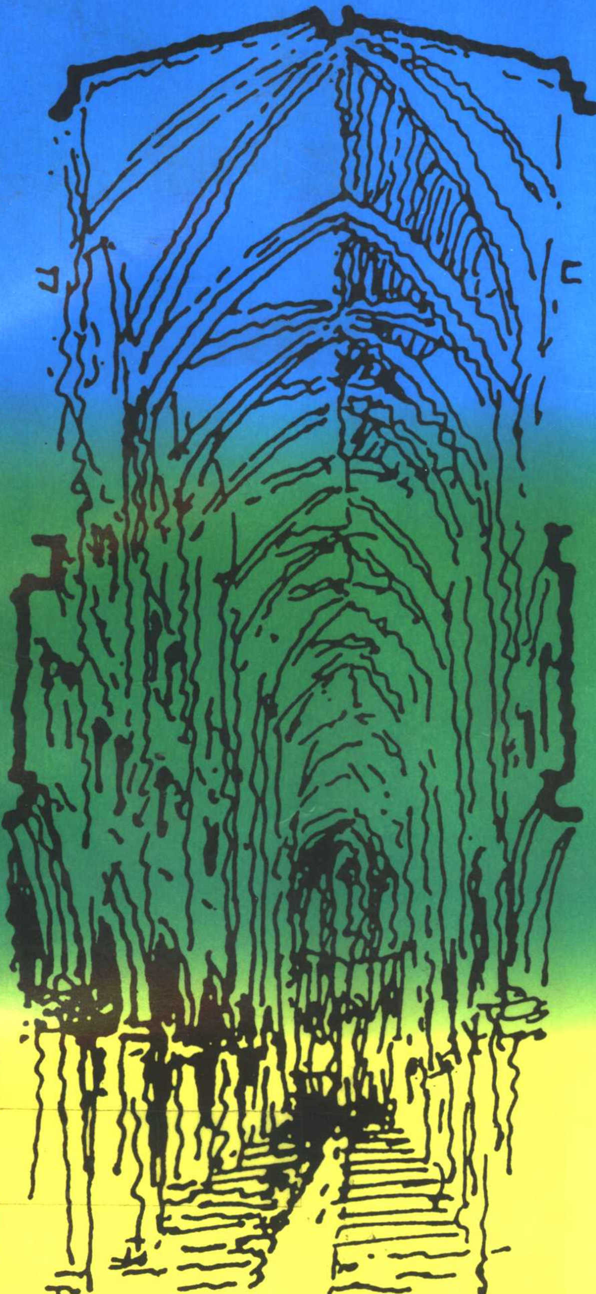

# 空间结构分析

金问鲁 著

# 空间结构分析

金问鲁 著

中国建筑工业出版社

（京）新登字035号

本书是作者从事空间结构工作多年在理论和实践方面的一个总结，探索了空间结构的许多重要问题。本书共分理论篇、应用篇和附录三个部分。理论篇中作者提出的有关空间结构分析的各种变分原理，是分析空间结构的有效工具，应用篇内容广泛，探讨了结构动力学、混凝土徐变等理论在建筑和桥梁方面的应用。附录中轴对称结构图表可供广泛应用。本书可供大专院校师生及研究人员使用，也可供广大设计、施工人员参考。

空间结构分析
金问鲁 著
中国建筑工业出版社出版、发行（北京西郊百万庄）
新 华 书 店 经 销
北京顺义板桥印刷厂印刷
*
开本：850×1168毫米 1/32 印张：13½ 字数：360千字
1996年6月第一版 1996年6月第一次印刷
印数：1—4，100册 定价：21.00元
ISBN 7-112-02791-8

TU·2147（7901）

# 自　　序

本书主要采集了作者在空间结构分析的工作，除了第一章是介绍前人的经典理论和读者在阅读本书所必备的教学和力学知识外，其余都是由作者所提出和完成的。空间结构分析在当前日益重要，它之所以重要一方面是因为它的应用日广，如建筑工程中的大跨度屋盖：板、壳、网架、网壳、悬索结构，桥梁、给排水及海洋工程中的各式大跨度桥梁，筒壳、球壳的贮液设备，码头及海洋平台等都属于空间结构。另一方面，结构设计日益要求精确，原先所认为的平面结构，为了考虑稳定，都要计算平面外的应力。这样，空间结构分析的研究工作日趋活跃，而且还有广阔发展的前途。

对于科学的发展，作者有一个信念是："用理论指导实践，从实践里汲取理论"。在结构力学是如此，对于其它科学，如近代物理等莫不如此。作者从事设计工作四十余年，随时注意学习和应用新的理论，如40年代中叶作者运用了太沙基土力学及结构中的克劳斯弯矩分配法，50年代后期作者设计并制作了多种预应力构件，从而吸取了混凝土的徐变理论，60年代末作者开始吸取有限元理论。工程实践中遇到的问题是科学研究中永不衰竭的源泉，对于每一项工程，作者觉察到都存在不少问题远非当前已有理论所能解决，每一个设计都应该是一个创造，于是作者在设计中同时开展了研究工作。作者于1962年在国际上首先提出了鞍形索网和辐射索网屋盖的分析方法，由于种种原因到1975年才由中国建筑工业出版社刊印发行，以此获得1978年全国科学大会重大成果奖。1962年到1964年作者提出道路路面的徐变理论，应邀在1964年上海土木学会年会上介绍，同时发表混凝土徐变、土力学极限平衡理论论文在力学学报和土木工程学报发表。以后作者着重研

究土力学中桩、土共同作用问题和混凝土徐变问题，桩、土共同作用问题对当前地基设计和工程费用有重大影响，而混凝土徐变理论改进了林同炎的平衡荷载法，分别收入作者的《预应力混凝土弹性—徐变统一计算理论》和《实用土力学和地基处理实例》两书中，另有一著作《高层建筑结构的连续化分析》，三书均已由中国铁道出版社刊印发行，在本书中不再予以叙述。

工程设计中经常遇到空间结构的项目，因此，作者对此作了研究。本书是作者有关这方面的系统总结，以下对书中内容作简单的介绍。

书中分理论篇和应用篇两个部分。理论篇共有三章。第一章介绍了经典理论为阅读本书作准备，从第二章开始基本是作者自己的工作。第二章是作者所提出的多种变分原理，其中一些内容曾作为国际会议论文或刊于各个学报。所提出的变分原理有以下四种:积分变换包括富里叶变换和拉普拉斯变换形式的变分原理，是研究结构动力学和混凝土徐变的有效工具。薄壳具有任意的曲面形状，最适宜采用张量分析，作者提出在薄壳中张量形式的变分原理，可以统一地求解一切薄壳问题。用统计方法进行设计已是各国的共同趋势，如地震和风振都是随机振动，按理说更应该进行统计性的设计，作者提出随机过程的变分原理可以和有限元法共同使用，在作者所著《高层建筑结构的连续化分析》中有一章专门阐明它在高层建筑结构的应用。作者在所著《预应力混凝土弹性——徐变统一计算理论》中所提方法只是计算施加预应力后的瞬时和长久性质,不能反映在施工和使用中期各阶段的情况。对一些特殊的施工情况，如桥梁中的悬臂施工法，分期施加预应力，这时了解中期情况特别重要。作者提出了预应力混凝土徐变理论中古尔丁折积形式的变分原理对计算中期情况特别有利。

第三章是薄壳理论及奇异摄动理论的应用，这是作者最近的工作。钱伟长指出近期力学的分析方法有两个方面，广义变分原理和奇异摄动理论。奇异摄动理论中有一个重要内容便是进行各阶导数中数量级的比较。作者阐述引伸了这个原理，可以对不同

的薄壳理论获有更深刻的认识，同时又对当前薄壳中的边界层理论作出统一的基础。有关这方面的中心思想作者已在杭州召开的国际会议大会上予以介绍。作者认为这可能是发展实用薄壳力学的一条途径。

以下是应用篇。

早在20世纪初叶结构力学中已发展了变位逆算法，将变位看成三次代数曲线，在一定意义下，它是精确的计算方法，至今为杆件系结构力学的基础。但是在动力情况，常用的变位逆算法决不是精确的，因为动力情况的变位曲线决不是代数曲线。在第四章中作者提出杆件系结构动力学的精确性分析方法，同样提出了固端矩、刚度和分配系数的观念。第五章将这个方法推广到预应力混凝土构件。这个方法可以应用在桥梁和楼面上的振动问题。

第六章薄壳的薄膜理论及一般旋转壳的求解方法讨论了各式薄膜理论问题以及可以将薄膜问题看成静定结构的条件。本章与第三章结合可以求解任意形状的薄壳。

第七章扁壳按半无矩理论的内力分析是作者早期的工作，参考符拉索夫的半无矩理论分析鞍形预应力薄壳，完善地解释了鞍壳出现纵向裂缝的原因。

第八章连续化假设与悬挂结构分析，连续化假设是作者常用来分析结构的一种手段，本章对如何使用连续化方法作了详细的讨论，作者早期对悬挂结构的分析即是应用连续化的成果，因为对于悬挂结构另有专著，本章仅作简单介绍。

第九、十两章是网架、网壳的连续化分析法，它和当前通用的拟板分析法不同之处，是应用了更精确的假定，不是将网架看成通常的克基霍夫假定的板，而是看成铁摩辛柯假定的板，或是更精确的板厚可以变形的板。对结构常数的折算作了详细阐述。第九章作出了单元刚度矩阵。第十章按前述实用薄壳分析方法讨论了网壳，提出分析方法。

第十一章张量分析在曲线桥的应用是在作者主持杭州大型立交工程中提出的方法，同样也是“连续化”法的一个应用。

作者与邵柏舟工程师在设计国家的水池标准图时编制了轴对称旋转壳的计算图表，受到了各市政设计院的欢迎，看来当前仍有使用价值，特作为本书的附录。

本书涉及范围较广，作者在多数章节中指出，在各个方面都大有发展的可能，作者希望广大的同行读者们共同努力充实完善这方面的工作。作者更希望读者们在自己的实践中找出更重要的问题予以研究解决，使结构力学进入更高的领域。

作者于杭州

1994年10月

# 目　录

# 上篇　理　论　篇

## 绪　言

实际上，结构都是属于空间的，即使是常用的桁架及框架，也存在着很大的空间作用。但是本书主要讨论空间性较强的结构。例如水池、梁板式建筑或桥梁、网架或网壳式屋盖都不可能分解为平面结构。

空间结构属复杂的结构问题，过去在建造大型空间结构前总是先建造较小的模型结构，进行各种试验，然后将所得成果推广到大型建筑中去。很多优秀的力学家为薄壳理论作出贡献，然而只有少数形状简单的薄壳问题得到解决。实际工程是出现结构问题的丰富源泉，作者从事工程设计数十年，遇到许多工程疑难问题，特别是许多结构问题，远非当前已有的计算方法所能解决。作者的一个信念是："从实践中汲取问题，用理论进行解决"。多年来，作者学习了多种数学和力学的知识，根据多年经验，作者形成一套解决问题的方法，解决了不少建筑和桥梁的实际问题。本书主要介绍作者在空间结构方面所作的一些成果。

这些成果包含理论和实际问题两个方面。不过应当指出理论属于方法论问题，是解决问题的一把钥匙。实际问题是层出不穷的，将来还会不断涌现，相比起来，基本理论可能更为重要。

在本篇第一章中将介绍经典著作中的势能原理和各种变分原理，富利叶（Fourier）变换、拉普拉斯（Laplace）变换的知识和张量分析的简单介绍，为下文所需知识作好准备。第二章介绍作者本人所提出的各种变分原理。有限元法开辟了走向计算力学的康庄大道，而变分原理是推导有限元法的必备基础。第三章介绍

奇异摄动理论在薄壳的应用。由于奇异摄动理论内容丰富，主要应用于现代物理，很难窥视全貌，但是用在薄壳问题特别有利，作者已指出可能这是解决各种复杂薄壳问题的一条捷径，这章也属于作者的工作。

# 第一章　基本数学知识和变分原理

## 一、富利叶变换和拉普拉斯变换

积分变换是求解数理方程的有力工具。其中富里叶变换和拉普拉斯变换常用来求解常系数偏微分方程，通过变换将原函数的微积分运算化为变换函数的乘除法运算，以便于方程求解。富利叶变换常用到动力学或随机振动的问题中，原函数是时间 $t$ 的函数，变换函数是谱量 $\omega$ 的函数，因此富利叶变换也称为谱分解法，它不仅能使求解方便，而且可以确定振动的谱密度，这是振动的一种重要测度。拉普拉斯变换是考虑在 $t=0$ 时开始受到外界影响，如施加荷载以后的各种物理变化，特别适用于土壤的固结理论和混凝土的徐变理论。以上两种变换在作者所提出的变分原理中都将用到，首先介绍富利叶变换和拉普拉斯变换的定义和主要性质。

### （一）富利叶变换

富利叶变换有两种表现形式，一种是三角函数形式，另一种是指数函数形式。今用函数上方的波号“～”表示变换函数，则第一种形式为：

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{f}(\omega)=\tilde{f}_C(\omega)+\tilde{f}_S(\omega)\\
&\tilde{f}_C(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t\mathrm{d}t\\
&\tilde{f}_S(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t\\
&f(t)=\int_0^{\infty}[\tilde{f}_C(\omega)\cos\omega t+\tilde{f}_S(\omega)\sin\omega t]\mathrm{d}\omega
\end{aligned}\right\}\tag{1-1}$$

第二种形式是：

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

第二种形式比较简洁，本书中主要用第二种形式。富利叶变换有如下主要性质，对一些比较明显的性质则不作证明。

**性质 1**：富利叶变换是线性变换。

即是说，如果 $a$、$b$ 为任意实数，则有：

$$\widetilde{af_1 + bf_2} = a\,\widetilde{f}_1 + b\,\widetilde{f}_2 \tag{1-3}$$

以下是折积的定义。$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的折积 $f(t)$ 定义为：

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-4}$$

上式又可简写为：

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \tag{1-5}$$

容易得知折积内的因子是可以变换的，即：

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \tag{1-6}$$

**性质 2**：$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 折积的富利叶变换等于 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 各自富利叶变换的乘积，即：

$$\widetilde{f_1 * f_2} = \widetilde{f}_1 \cdot \widetilde{f}_2 \tag{1-7}$$

［**证**］ 由定义有：$\widetilde{f_1 * f_2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\tau$

改变积分次序得：

$$\begin{aligned} \widetilde{f_1 * f_2} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)e^{i\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)e^{i\omega(\tau+\xi)}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau)e^{i\omega\tau}\mathrm{d}\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi)e^{i\omega\xi}\mathrm{d}\xi \\ &= \widetilde{f}_1 \cdot \widetilde{f}_2 \end{aligned}$$

得证。

**性质 3**：$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 乘积的富利叶变换等于 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 各自变换的折积乘以$\frac{1}{2\pi}$，即：

$$\widetilde{f_1 \cdot f_2} = \frac{1}{2\pi}\tilde{f}_1 * \tilde{f}_2 \tag{1-8}$$

［证］ $$\frac{1}{2\pi}\tilde{f}_1 * \tilde{f}_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}_1(\omega-\omega_1)\tilde{f}_2(\omega_1)\mathrm{d}\omega_1$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t_1)f_2(t_2)e^{i\omega t_1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1(t_2-t_1)}\mathrm{d}\omega_1\right]\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$$

由于狄拉克(Dirac)函数 $\delta(t)$ 的富利叶变换是：

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1-9}$$

则有：

$$\frac{1}{2\pi}\tilde{f}_1 * \tilde{f}_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t_1)f_2(t_2)\delta(t_2-t_1)e^{i\omega t_1}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t_1)f_2(t_1)e^{i\omega t_1}\mathrm{d}t_1 = \widetilde{f_1 * f_2}$$ 得证。

**这个性质表示非线性微分方程仍可用富利叶变换方法求解，作者曾用此性质写出《非线性随机振动谱分解法》一文。**

**性质 4**：如果 $f(t)$ 以及其导数 $f'(t)$ 都可进行富利叶变换，且当 $|t| \to \infty$ 时 $f(t) \to 0$，则存在关系式：

$$\widetilde{f'(t)} = -i\omega\widetilde{f(t)} \tag{1-10}$$

［证］ $$f'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$
$$=[f(t)e^{i\omega t}]\Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} i\omega f(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$
$$=-i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$
$$=-i\omega\widetilde{f(t)}$$ 得证。

**这是富利叶变换在实用中最重要的性质，即原函数的微分计算成**

为变换函数的乘法运算。

类似性质 4 有如下性质：

**性质 5**：
$$itf(t) = \frac{\mathrm{d}\tilde{f}}{\mathrm{d}\omega} \tag{1-11}$$

富利叶变换应用到多自变量的函数成为多重富利叶积分，具有以上的类似性质。

很多问题需要用数值方法寻求富利叶积分，快速富利叶变换（F. F. T.）是一个有力的工具，本书不予介绍。

## （二）拉普拉斯变换

一些数学文献中将拉普拉斯变换从富利叶变换的理论推导出来。不过从解决实际问题看来，拉普拉斯变换决非仅是富利叶变换的一个变种。富利叶变换的原函数是自变量从$-\infty$到$+\infty$的函数，而拉普拉斯变换则仅是自变量从 0 到$\infty$的函数。这点很重要，物理现象中的原函数，即是激励决不会在宇宙中自始至终，永恒存在，而是从某一时刻，譬如 $t=0$ 时开始作用，求这个激励所引起的响应。拉普拉斯变换恰好适合这个要求。在预应力混凝土设计和建筑物基础设计中，人们所希望知道的是预应力的长期损失或建筑物的最终沉降，这时应用拉普拉斯变换特别有利。以下首先介绍拉普拉斯变换的意义和反变换的公式。

原函数 $f(t)$ 一般是时间 $t$ 的函数，它的拉普拉斯变换函数写为 $f^*(p)$，用星号 * 来表示拉普拉斯变换函数。拉普拉斯变换的意义是：

$$f^*(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \tag{1-12}$$

这里 $f(t)$ 仅在 $t \geqslant 0$ 时才有意义。拉普拉斯反变换公式为：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta-i\infty}^{\zeta+i\infty} e^{pt}f^*(p)\mathrm{d}p \tag{1-13}$$

上式可从 富利叶变换的理论导出，这里不赘述。一般说来，利用(1-13) 式求原函数 $f(t)$ 是比较复杂的，这需要复变函数的知识，一般不常使用。以下介绍拉普拉斯变换的一些主要性质。

**性质 1**：拉普拉斯变换是线性的。

即是说设 $c_1$、$c_2$ 为任意复数，且设

$$f(t)=c_1f_1(t)+c_2f_2(t) \tag{1-14}$$

则有：

$$f^*(p)=c_1f_1^*(p)+c_2f_2^*(p) \tag{1-15}$$

**性质 2**：

设
$$f(t)=f_1(t)f_2(t) \tag{1-16}$$

则有：

$$f^*(p)=\frac{1}{2\pi}\int_{q=-i\infty}^{q=i\infty}f_1^*(q)f_2^*(p-q)\mathrm{d}q \tag{1-17}$$

**性质 3**：$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的折积定义为：

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_0^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-18}$$

则有如下关系：

$$f^*(p)=f_1^*(p)f_2^*(p) \tag{1-19}$$

证明从略。

**性质 4**：设 $f(t)$ 的导数是 $f'(t)$，$n$ 次导数是 $f^{(n)}(t)$，则有：

$$f'^*(p)=pf^*(p)-f(0) \tag{1-20}$$

和
$$f^{(n)*}(p)=p^n\left[f^{(n-1)*}(p)-\frac{f(0)}{p}-\frac{f'(0)}{p^2}-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n}\right] \tag{1-21}$$

［证］
$$\begin{aligned}f'^*(p)&=\int_0^{\infty}f'(t)e^{-pt}\mathrm{d}t\\&=\left[f(t)e^{-pt}\right]\Big|_{t=0}^{t=\infty}+p\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t\\&=pf^*(p)-f(0)\\f''^*(p)&=pf'^*(p)-f'(0)\\&=p^2\left[f^*(p)-\frac{f(0)}{p}-\frac{f'(0)}{p^2}\right]\end{aligned}$$

同样可证明（1-21）式。