

高等数学

上册

工科数学西南协作组重庆片区编

重庆大学出版社

高等数学

上册

工科数学西南协作组重庆片区 编

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书是根据《高等工业专科学校高等数学课程教学基本要求》，为适应高等院校专科层次发展的需要而编写的。本书不过分追求理论的论证和复杂的运算，着重强调基本概念、基本方法及其应用，以切合大专学生的实际状况。全书分上、下两册。上册内容为：函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学和微分方程。

本书可作为高等学校专科学生的教材，也可供其他专科层次的学生使用。

高等数学

上 册

工科数学西南协作组重庆片区 编

责任编辑 刘茂林

*

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆通信学院印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：9.75 字数：262千

1994年6月第1版 1994年6月第1次印刷

印数：00001—10,000

ISBN7-5624-0885-8/O·98 定价：4.98元

(川)新登字 020号

前 言

为了适应高等院校专科层次发展的需要,我们编写了这套教材。这套教材的初稿已在本地区若干学校试用过,本书是在广泛搜集意见的基础上修改而成。

在本书的编写中,我们始终紧扣《高等工业专科学校高等数学课程教学基本要求》,根据“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,不过分追求理论论证和复杂的运算,着重强调基本概念、基本方法及其应用。同时,力求切合大专学生的实际状况,总结编者们在教学第一线长期积累的教学经验,注重教学法,通俗易懂,深入浅出,便于自学。并在某些内容的处理上体现一些特色。

全书分为上、下两册。上册内容为函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学和微分方程;下册内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数和近似计算。考虑到不同专业的需要,对于基本要求以外的内容,均注以“*”号,供有关专业选择。全书(不含*内容)教学时数约150学时。

本书由工科数学西南协作组重庆片区编写,谢树艺教授和赵中时教授担任主编,参加编写的有赵中时(第一、七章)、陈庆轩副教授(第二、十一章)、唐钰其副教授(第三、十二章)、文万淮副教授(第四、八章)、林国芬副教授(第五、九章)和谢和熙副教授(第六、十章)。

本书的编写得到了重庆大学、重庆交通学院、重庆邮电学院、解放军后勤工程学院和解放军重庆通信学院有关领导的关心和支持,在试用和修改过程中,重庆片区各兄弟院校的同行人提出了许多宝贵意见,谨此一并表示衷心的感谢!

由于编者水平所限,书中难免有不少疏漏和错误之处,诚望同行和广大读者不吝指正。

编 者

15A315/01

目 录

第一章 函数与极限	(1)
第一节 函数概念	(1)
一、区间与邻域 二、函数的定义 三、反函数 四、复合函数 习 题 1-1	
第二节 函数的性质	(9)
一、函数的基本性质 二、基本初等函数及其性质 三、初等函数 习题 1-2	
第三节 数列的极限	(17)
习题 1-3	
第四节 函数的极限	(23)
一、函数极限的概念 二、无穷小量与无穷大量 习题 1-4	
第五节 极限存在准则	(33)
习题 1-5	
第六节 极限的运算	(36)
一、无穷小的运算 二、极限的四则运算 三、两个重要极限 四、 无穷小的比较与替换运算 习题 1-6	
第七节 函数的连续性	(47)
一、函数连续的概念 二、函数的间断点 三、连续函数的运算和 初等函数的连续性 四、闭区间上连续函数的性质 习题 1-7	
第二章 导数与微分	(62)
第一节 导数概念	(62)
一、引例 二、导数的定义 三、求导举例 四、导数的几何意义 五、函数的可导性与连续性的关系 习题 2-1	
第二节 初等函数的导数	(74)

一、函数的和、差、积、商的导数	二、反函数的导数	三、复合函数的导数	四、求导法则与求导公式小结	习题 2-2
第三节	高阶导数			(86)
习题	2-3			
第四节	微分			(91)
一、引例	二、微分的定义	三、微分的几何意义	四、微分的基本公式与运算法则	习题 2-4
第五节	隐函数的导数、由参数方程所确定的函数的导数			(99)
一、隐函数的导数	二、由参数方程所确定的函数的导数			习题 2-5
第三章	中值定理与导数的应用			(107)
第一节	微分中值定理			(107)
习题	3-1			
第二节	罗必达法则			(113)
一、未定式 $\frac{0}{0}$ 型	二、未定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 型			习题 3-2
第三节	函数与曲线的性态			(119)
一、函数单调性的判别法	习题 3-3(1)	二、函数的极值及其求法	习题 3-3(2)	三、曲线的凹凸与拐点
习题	3-3(3)	四、曲线的渐近线	习题 3-3(4)	五、函数图形的描绘
习题	3-3(5)			
第四节	函数的最大值与最小值			(135)
习题	3-4			
第五节	曲率			(139)
一、弧微分	二、曲率			习题 3-5
第四章	不定积分			(145)
第一节	不定积分的概念与性质			(145)
一、原函数与不定积分的概念	二、不定积分的性质	三、基本积分公式		习题 4-1
第二节	换元积分法			(154)

一、第一换元法(凑微分法) 二、第二换元法 习题 4-2	
第三节 分部积分法·····	(167)
习题 4-3	
第四节 简单有理函数积分举例·····	(171)
习题 4-4	
第五章 定积分及其应用·····	(176)
第一节 定积分概念·····	(176)
一、实例 二、定积分的定义 三、定积分的存在定理 四、定积分的几何意义 五、用定积分定义计算定积分举例 习题 5-1	
第二节 定积分的性质 牛顿-莱布尼兹公式 ·····	(184)
一、定积分的性质 二、牛顿-莱布尼兹公式 习题 5-2	
第三节 定积分的换元法和分部积分法·····	(195)
一、用换元法计算定积分 二、用分部积分法计算定积分 习题 5-3	
第四节 定积分在几何上的应用·····	(200)
一、定积分的元素法 二、平面图形的面积 三、体积 四、平面曲线的弧长 习题 5-4	
第五节 定积分在物理上的应用·····	(213)
一、引力 变力作功 二、液体的侧压力 习题 5-5	
* 第六节 平均值·····	(220)
一、函数的平均值 二、均方根 习题 5-6	
第七节 广义积分·····	(222)
一、积分区间为无穷的情形 二、被积函数有无穷间断点的情形 习题 5-7	
第六章 微分方程·····	(230)
第一节 微分方程的基本概念·····	(230)
习题 6-1	
第二节 可分离变量的微分方程·····	(234)

习题 6-2	
第三节 齐次微分方程	(237)
习题 6-3	
第四节 一阶线性微分方程	(241)
习题 6-4	
第五节 可降阶的高阶微分方程	(246)
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程 *
三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	习题 6-5
第六节 二阶线性微分方程的解的结构	(250)
习题 6-6	
第七节 二阶常系数齐次线性微分方程	(254)
习题 6-7	
第八节 二阶常系数非齐次线性微分方程	(259)
一、 $f(x)=ae^{bx}$ 的情形	二、 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ 的情形
三、 $f(x)=a\cos bx+b\sin bx$ 的情形	习题 6-8
* 第九节 常系数线性微分方程组求解举例	(268)
习题 6-9	
附录一 积分表	(272)
附录二 习题答案	(282)

第一章 函数与极限

客观世界的事物中存在着各种不同的量,这些量之间常常有着一定的内在联系,它反映了事物变化的规律。17世纪创立起来的微积分学,正是研究变化着的量之间的重要关系——函数关系的科学。几个世纪以来,它一直是人们认识和改造客观世界的重要工具和理论基础。高等数学就是以微积分学为主体的一门课程。这门课程研究的主要对象是连续函数,研究中采用的基本方法是极限方法。本章作为高等数学的基础,将学习函数、极限、连续等基本概念及其性质和有关的基本运算方法。

第一节 函数概念

一、区间与邻域

在研究函数时,常用的一种数集,就是区间。

设 a, b 是两个不同的实数,且 $a < b$ 。将满足不等式 $a < x < b$ 的数 x 的集合称为开区间,记为 (a, b) ,即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

将满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的数 x 的集合称为闭区间,记为 $[a, b]$,即

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

类似地规定半开区间为

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}.$$

以上几种数集都叫做有限区间。类似地又规定以下几种为无穷区间

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$$

$$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$$

$$(-\infty, b) = \{x | x < b\}$$

$$(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x | x \text{ 为一切实数}\}$$

(这里记号 $+\infty$ 、 $-\infty$ 不代表任何数,而是表示正无限与负无限的意思,分别读作正无穷大与负无穷大。)

上述诸数集统称为区间,各区间记号中的点 a 、 b 称为区间的端点(称 a 为左端点, b 为右端点), $b-a$ 称为区间的长度。(各种区间都可以在数轴上表示出来,图 1-1 表示了其中的五种。)

设 a 、 δ 都是实数,且 $\delta > 0$ 。将满足不等式 $a - \delta < x < a + \delta$ (即 $|x - a| < \delta$)的数 x 的集合称为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a, \delta)$,即

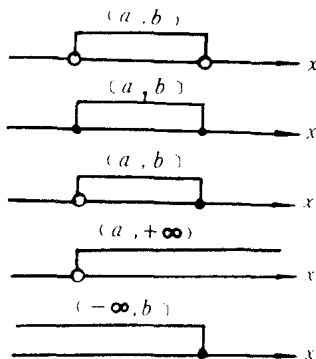


图 1-1

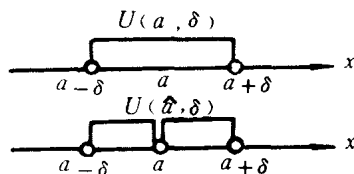


图 1-2

$U(a, \delta) = \{x | |x - a| < \delta\}$, 称 a 为邻域的中心, δ 为邻域的半径,可见, $U(a, \delta)$ 是一个以 a 为中心,长为 2δ 的开区间。此外,将满足 $a - \delta < x < a + \delta$ 但 $x \neq a$ (即 $0 < |x - a| < \delta$)的数 x 的集合称为点 a 的去心 δ 邻域,记为 $U(\hat{a}, \delta)$,即

$$U(\hat{a}, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\}$$

(见图 1-2)。在不需要指明邻域半径的具体长度时,将以上两种邻

域简称为点 a 的邻域和点 a 的去心邻域,并分别记为 $U(a)$ 和 $U(\dot{a})$ 。

二、函数的定义

在观察某个自然现象或技术过程时,把在过程中保持同一数值的量称为常量,而把在过程中可以取不同数值的量称为变量。例如对封闭容器中的气体加热时,气体的体积在加热过程中是一个常量,而温度和气体的压强就都是变量。又如当气缸内的活塞运动时,气体的体积则是一个变量。(变量与常量是相对而言的,比如重力加速度 g 在通常情况下把它看作常量,但如果从太空的角度来观察,当物体离地心越远时,重力加速度就越小,这时就需把 g 看作变量。)习惯上,常用字母 a, b, c 等表示常量,用 x, y, t 等表示变量。

变量之间常常存在着某种确定的依赖关系。比如自由落体下落的路程 s 与时间 t 有 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 的关系(g 为重力加速度);在固定温度下,气缸内的气体压强 P 与体积 V 有 $P = \frac{C}{V}$ 的关系(C 为常量)等等。在同一问题中,变量之间的这种确定的依赖关系就称为函数关系。

定义 设有变量 x 和 y ,如果变量 x 在某个数集 D 内任取一个数时,变量 y 按照某种确定的法则,总有确定的数值与它对应,那么就称变量 y 是变量 x 的函数,常记为 $y = f(x)$ 。称 x 为自变量, y 为因变量。称数集 D 是函数 $y = f(x)$ 的定义域。如果定义域是区间,也称之为函数的定义区间。对于定义域 D 中的所有 x ,与它对应的 $f(x)$ 的集合称为函数的值域。此外,在讨论同一问题时,对于不同的函数关系,应该采用不同的字母来表示,比如 $g(x)$ 、 $F(x)$ 、 $\varphi(x)$ 等。

例如函数

$$f(x) = x^2 + 3x - 2$$

它的对应法则是 $f(\quad) = (\quad)^2 + 3(\quad) - 2$, 因此有

$$f(-2) = (-2)^2 + 3(-2) - 2 = -4,$$

$$f(x^2) = (x^2)^2 + 3(x^2) - 2 = x^4 + 3x^2 - 2,$$

$$f(x+a) = (x+a)^2 + 3(x+a) - 2$$

等等。

决定一个函数的要素在于自变量的取值范围(定义域)和变量的对应法则(函数关系), 而不在于用什么字母来表示。所以, 凡定义域相同、对应法则也相同的函数, 就看作是同一个函数。比如 $y = 2x + 1$ 和 $v = 2u + 1$ 是同一个函数, 又如 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ 和 $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$, 其定义域都是一切实数, 由 $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \sqrt{x^2 + 1} - x$ 知, 对应法则实际上也是相同的, 因此它们也是同一个函数。

一般说来, 对于由解析表达式给出的函数, 在没有赋与任何具体意义的情形下, 它的定义域就是能使因变量有确定对应值的那些自变量的全体, 这样的定义域叫做自然定义域。对于实际问题, 自变量的取值范围常常要受到实际问题的限制, 因此要根据实际意义来确定函数的定义域, 这样的定义域叫做实际定义域。例如自由落体运动公式 $s = \frac{1}{2}gt^2$, 由于 t 代表运动的时间, 因此这个函数的定义域应该是 $[0, T]$ (T 为物体着地的时间)。

例 1 一块边长为 a 的正方形铁板, 在它的四个角上各剪去一个相同的小正方形, 做成一个无盖的铁盒(图 1-3)。如果剪去的小正方形边长为 x , 那么铁盒的体积 V 与 x 之间有以下函数关系

$$V = (a - 2x)^2 x。$$

根据实际意义知, 其定义域是 $(0, \frac{a}{2})$ 。

例 2 断面是边长为 a 的倒置等边三角形, 长为 l 的水槽(图 1-4), 槽中水的体积 V 与水面高度 h 之间有以下函数关系

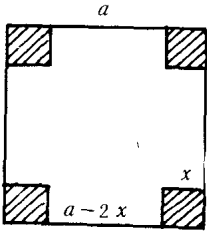


图 1-3

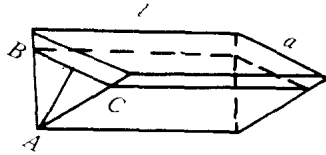


图 1-4

$$\begin{aligned}
 V &= \triangle ABC \text{ 面积} \cdot l = \frac{1}{2} BC \cdot h \cdot l \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} h \cdot h \cdot l = \frac{1}{\sqrt{3}} h^2 l .
 \end{aligned}$$

其定义域为 $[0, \frac{\sqrt{3}}{2}a]$ 。

例 3 在电子技术中常遇到三角形脉冲波(图 1-5), 它的一个波形可以表示成以下函数关系

$$y = \begin{cases} \frac{2b}{l}x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 2b - \frac{2b}{l}x, & \frac{l}{2} < x \leq l. \end{cases}$$

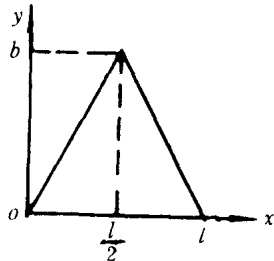


图 1-5

注意, 它是一个定义在 $[0, l]$ 上的函数, 而不是两个函数。在定义域的不同范围, 其对应法则分别有各自的

解析表达式。这种用分段形式来表达的函数, 通常称为分段函数。它也是实际问题中常遇见的一种函数形式。例如邮件的邮资与重量的关系、公共汽车的票价与路程的关系等都是分段函数。

对于自变量在定义域中的任一个值, 如果对应的函数值是唯一的, 这样的函数称为单值函数, 如果对应的函数值多于一个, 就称为多值函数。多值函数可以分成若干个单值分支来讨论, 比如 y^2

$=x$ 可以分成两个单值分支 $y = \sqrt{x}$ 和 $y = -\sqrt{x}$ 来讨论。因此，今后如果不加说明，那么所讨论的函数都是指单值函数。

三、反函数

对于函数 $y=f(x)$ ，如果对于值域中的每一个值 y ，都有确定的对应值 x ，这时将 y 认作自变量， x 认作因变量，就确定了一个新的函数 $x=\varphi(y)$ ，称它是 $y=f(x)$ 的反函数。 $y=f(x)$ 的反函数也常记为 $x=f^{-1}(y)$ ，其定义域就是 $y=f(x)$ 的值域。例如 $y=2x+1$ 的反函数是 $x=\frac{y-1}{2}$ 。

容易看出，一个函数和它的反函数是互逆的，既可以说 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，也可以说 $y=f(x)$ 是 $x=\varphi(y)$ 的反函数。

习惯上常把自变量记为 x ，因变量记为 y 。所以 $y=f(x)$ 的反函数也可以记为 $y=f^{-1}(x)$ （它与 $x=f^{-1}(y)$ 是同一个函数），这样便于比较它们的图形。比如上面的例子， $y=2x+1$ 的反函数 $x=\frac{y-1}{2}$ 也可以写成 $y=\frac{x-1}{2}$ 。

现在来观察一个函数与其反函数的图形之间的关系。由于习惯上把平面直角坐标系中的横坐标作为自变量，纵坐标作为因变量，因此在观察图形时应把 $y=f(x)$ 的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$ 。设 (a, b) 是 $y=f(x)$ 的图形上的一点，即 $b=f(a)$ 。由反函数的关系有 $a=f^{-1}(b)$ ，这就是说， (b, a) 是 $y=f^{-1}(x)$ 的图形上的一点，而点 (a, b) 和 (b, a) 是关于直线 $y=x$ 对称的（图 1-6），因此知道，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的。

四、复合函数

将函数 $u = \sqrt{x^2+1}$ 代入函数 $y = \sin u$ 中，可以得到一个新的函数

$$y = \sin \sqrt{x^2+1}$$

这个函数就叫做由 $y = \sin u$ 和 $u = \sqrt{x^2 + 1}$ 复合而成的复合函数。

一般地,对于函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$, 如果 $u = \varphi(x)$ 的值域与 $y = f(u)$ 的定义域有公共部分,那么就把函数 $y = f[\varphi(x)]$ 称为由 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数。称 u 为中间变量。通常把函数的这种复合过程叫做复合运算。

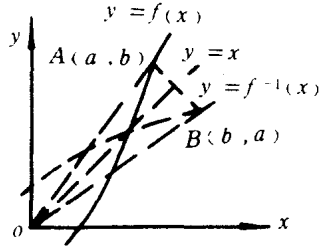


图 1 6

但要注意,并不是任何两个函数都可以复合。比如 $y = \frac{1}{\sqrt{u}}$ 和 $u = -x^2$ 就不能复合,因为 $u = -x^2$ 的值域是 $u \leq 0$, 而 $y = \frac{1}{\sqrt{u}}$ 的定义域是 $u > 0$, 它们没有公共部分。

我们还常常遇到由多于两个函数复合而成的复合函数。比如由 $y = \sqrt{u}$, $u = \sin v$, $v = \frac{x^2}{2}$ 复合而成的复合函数是

$$y = \sqrt{\sin \frac{x^2}{2}};$$

又如由 $r = \frac{1}{u}$, $u = v^2$, $v = \operatorname{tg} \omega$, $\omega = 2\theta$ 复合而成的复合函数是

$$r = (\operatorname{tg}^2 2\theta)^{-1}.$$

反过来,许多函数常常可以根据需要,按复合关系,把它分解成为几个较简单的函数。比如函数

$$y = \operatorname{tg}^2(\sin x + 1)$$

可以分解成 $y = u^2$, $u = \operatorname{tg} v$, $v = \omega + 1$, $\omega = \sin x$ 。又如函数

$$y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$$

可以分解成 $y = \arcsin u$, $u = \sqrt{v}$, $v = 1 - \omega$, $\omega = x^2$ 等等。

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域

(1) $y = \log_a(1 - 2\cos x)$;

(2) $y = \arcsin(\log_a \frac{x}{10}) (a > 1)$;

(3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 6}} + \arccos \frac{2x-1}{7}$.

2. 设 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 求 $f[f(x)]$ 并确定其定义域。

3. 设 $f(x) = x^2 + 1$, 求 $f(0)$ 、 $f(\frac{1}{a}) (a \neq 0)$ 、 $f(x+h) - f(x)$ 。

4. 设 $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, 求 $f(x)$ 。

5. 设

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x > 0 \\ x+1, & x \leq 0 \end{cases}$$

求 $f(-\frac{\pi}{2})$ 、 $f(\frac{\pi}{2})$ 、 $f(0)$ 。

6. 写出下列函数的复合函数

(1) $y = \cos u$, $u = \frac{v}{2}$, $v = \arcsin x$;

(2) $y = a^u$, $u = -\sqrt{v}$, $v = 2 - \omega$, $\omega = \sin t$;

(3) $y = \log_a u$, $u = \sin v$, $v = \sqrt{1 - \omega}$, $\omega = x^2$ 。

7. 某工厂位于点 A 处(图 1-7), 它距铁路线 BC 的垂直距离为 20 公里, BC 长 100 公里, 为了使工厂的货物运到 C 处, 欲在 BC 上选一处 D , 修筑一条公路 AD 。已知铁路与公路每公里运费之比为 3 : 5, 试建立总运费 y 与 D 到 B 的距离 x 之间的函数关系。

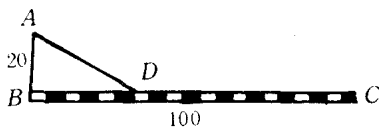


图 1-7

8. 欲建造一个容积为 V 的无盖圆柱形蓄水池, 底部单位面积造价为 a 元, 侧面单位面积造价为 b 元。试建立总造价 M 与水池半径 R 之间的函数关系。

9. 把一个半径为 R 的圆形铁片, 自圆心处剪去一个扇形后, 余下部分做成一个漏斗(图 1-8)。试建立漏斗体积与余下部分的中心角 α 之间的函数关系。

10. 用直线 $x+y=t$ (t 是参数, $0 \leq t \leq 2$) 去截割以点 $A(1,0)$ 、 $B(1,1)$ 、 $C(0,1)$ 和 $O(0,0)$ 为顶点的正方形, 求截割后原点所在部分的面积 S 与参数 t 之间的函数关系(图 1-9)。(提示: 表示成分段函数。)

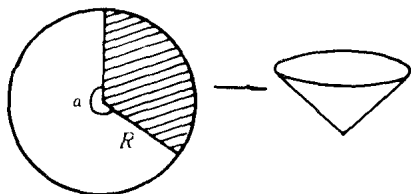


图 1-8

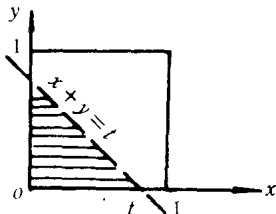


图 1-9

第二节 函数的性质

一、函数的基本性质

为了研究函数, 必须熟悉函数可能具有的性质。在这些性质中, 最基本的性质是函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性。

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义。如果存在一个正数 M , 使得对于 I 上的一切 x , 函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)| \leq M$, 就称 $f(x)$ 在区间 I 上有界。 M 称为 $f(x)$ 在 I 上的界。如果这样的正数 M 不存在, 也就是无论 M 为什么正数, 在 I 上都至少有一点 x , 满足 $|f(x)| > M$, 就称 $f(x)$ 在 I 上无界。

因为 $|f(x)| \leq M$ 等价于不等式 $-M \leq f(x) \leq M$, 这表明函数 $f(x)$ 在 I 上有界的意思是, $y=f(x)$ 在区间 I 上的图形始终不越出由平行直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 所夹的带形域(图 1-10)。

例如 $f(x) = \sin x$, 它在 $(-\infty, +\infty)$ 内部满足 $|\sin x| \leq 1$, 因此