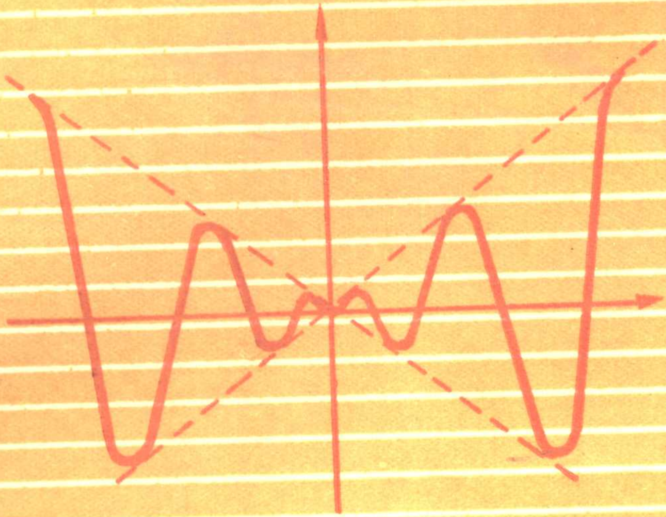

高等数学

上 册

工科数学西南协作组重庆片区编

重庆大学出版社

高等数学

上册

工科数学西南协作组重庆片区 编

重庆大学出版社

内容简介

本书是根据《高等工业专科学校高等数学课程教学基本要求》，为适应高等院校专科层次发展的需要而编写的。本书不过分追求理论的论证和复杂的运算，着重强调基本概念、基本方法及其应用，以切合大专学生的实际状况。全书分上、下两册。上册内容为：函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学和微分方程。

本书可作为高等学校专科学生的教材，也可供其他专科层次的学生使用。

高等数学

上　册

工科数学西南协作组重庆片区　编

责任编辑　刘茂林

*

重庆大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

重庆通信学院印刷厂印刷

*

开本：850×1168　1/32 印张：9.75 字数：262 千

1994 年 6 月第 1 版　　1994 年 6 月第 1 次印刷

印数：00001—10,000

ISBN7-5624-0885-8/O・98 定价：4.98 元

(川)新登字 020 号

前　言

为了适应高等院校专科层次发展的需要，我们编写了这套教材。这套教材的初稿已在本地区若干学校试用过，本书是在广泛搜集意见的基础上修改而成。

在本书的编写中，我们始终紧扣《高等工业专科学校高等数学课程教学基本要求》，根据“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，不过分追求理论论证和复杂的运算，着重强调基本概念、基本方法及其应用。同时，力求切合大专学生的实际状况，总结编者们在教学第一线长期积累的教学经验，注重教学法，通俗简明，深入浅出，便于自学。并在某些内容的处理上体现一些特色。

全书分为上、下两册。上册内容为函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学和微分方程；下册内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数和近似计算。考虑到不同专业的需要，对于基本要求以外的内容，均注以“*”号，供有关专业选择。全书（不含*内容）教学时数约150学时。

本书由工科数学西南协作组重庆片区编写，谢树艺教授和赵中时教授担任主编，参加编写的有赵中时（第一、七章）、陈庆轩副教授（第二、十一章）、唐钰其副教授（第三、十二章）、文万淮副教授（第四、八章）、林国芬副教授（第五、九章）和谢和熙副教授（第六、十章）。

本书的编写得到了重庆大学、重庆交通学院、重庆邮电学院、解放军后勤工程学院和解放军重庆通信学院有关领导的关心和支持，在试用和修改过程中，重庆片区各兄弟院校的同行们提出了许多宝贵意见，谨此一并表示衷心的感谢！

由于编者水平所限，书中难免有不少疏漏和错误之处，诚望同行和广大读者不吝指正。

编　者

目　　录

第一章　函数与极限

客观世界的事物中存在着各种不同的量，这些量之间常常有着一定的内在联系，它反映了事物变化的规律。17 世纪创立起来的微积分学，正是研究变化着的量之间的重要关系——函数关系的科学。几个世纪以来，它一直是人们认识和改造客观世界的重要工具和理论基础。高等数学就是以微积分学为主体的一门课程。这门课程研究的主要对象是连续函数，研究中采用的基本方法是极限方法。本章作为高等数学的基础，将学习函数、极限、连续等基本概念及其性质和有关的基本运算方法。

第一节　函数概念

一、区间与邻域

在研究函数时，常用的一种数集，就是区间。

设 a、b 是两个不同的实数，且 $a<b$。将满足不等式 $a<x<b$ 的数 x 的集合称为**开区间**，记为 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}。$$

将满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的数 x 的集合称为**闭区间**，记为 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}。$$

类似地规定**半开区间**为

$$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$$

$$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}。$$

以上几种数集都叫做**有限区间**。类似地又规定以下几种为**无穷区间**

$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}$

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$

$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$

$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$

$(-\infty,+\infty)=\{x|x$ 为一切实数$\}$

(这里记号$+\infty$、$-\infty$不代表任何数,而是表示正无限与负无限的意思,分别读作正无穷大与负无穷大。)

上述诸数集统称为**区间**,各区间记号中的点 a、b 称为区间的**端点**(称 a 为**左端点**,b 为**右端点**),$b-a$ 称为区间的**长度**。(各种区间都可以在数轴上表示出来,图 1-1 表示了其中的五种。)

设 a、δ 都是实数,且 $\delta>0$。将满足不等式 $a-\delta<x<a+\delta$(即 $|x-a|<\delta$)的数 x 的集合称为**点 a 的 δ 邻域**,记为 $U(a,\delta)$,即

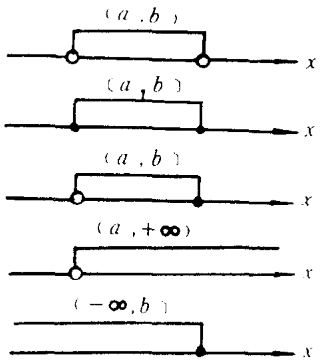

图 1-1

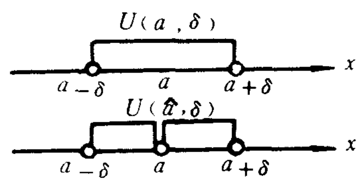

图 1-2

$U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$,称 a 为邻域的**中心**,δ 为邻域的**半径**,可见,$U(a,\delta)$是一个以 a 为中心,长为 2δ 的开区间。此外,将满足 $a-\delta<x<a+\delta$ 但 $x\neq a$(即 $0<|x-a|<\delta$)的数 x 的集合称为**点 a 的去心 δ 邻域**,记为 $U(\hat{a},\delta)$,即

$U(\hat{a},\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$

(见图 1-2)。在不需要指明邻域半径的具体长度时,将以上两种邻

域简称为点 a 的**邻域**和点 a 的**去心邻域**，并分别记为 $U(a)$ 和 $U(\hat{a})$。

二、函数的定义

在观察某个自然现象或技术过程时，把在过程中保持同一数值的量称为**常量**，而把在过程中可以取不同数值的量称为**变量**。例如对封闭容器中的气体加热时，气体的体积在加热过程中是一个常量，而温度和气体的压强就都是变量。又如当气缸内的活塞运动时，气体的体积则是一个变量。(变量与常量是相对而言的，比如重力加速度 g 在通常情况下把它看作常量，但如果从太空的角度来观察，当物体离地心越远时，重力加速度就越小，这时就需把 g 看作变量。)习惯上，常用字母 a、b、c 等表示常量，用 x、y、t 等表示变量。

变量之间常常存在着某种确定的依赖关系。比如自由落体下落的路程 s 与时间 t 有 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的关系(g 为重力加速度)；在固定温度下，气缸内的气体压强 P 与体积 V 有 $P=\frac{C}{V}$ 的关系(C 为常量)等等。在同一问题中，变量之间的这种确定的依赖关系就称为函数关系。

定义 设有变量 x 和 y，如果变量 x 在某个数集 D 内任取一个数时，变量 y 按照某种确定的法则，总有确定的数值与它对应，那么就称**变量 y 是变量 x 的函数**，常记为 $y=f(x)$。称 x 为**自变量**，y 为因变量。称数集 D 是函数 $y=f(x)$ 的定义域。如果定义域是区间，也称之为函数的**定义区间**。对于定义域 D 中的所有 x，与它对应的 $f(x)$ 的集合称为函数的**值域**。此外，在讨论同一问题时，对于不同的函数关系，应该采用不同的字母来表示，比如 $g(x)$、$F(x)$、$\varphi(x)$ 等。

例如函数

$$f(x)=x^2+3x-2$$

它的对应法则是 $f(\quad)=(\quad)^2+3(\quad)-2$,因此有

$$f(-2)=(-2)^2+3(-2)-2=-4,$$
$$f(x^2)=(x^2)^2+3(x^2)-2=x^4+3x^2-2,$$
$$f(x+a)=(x+a)^2+3(x+a)-2$$

等等。

决定一个函数的要素在于自变量的取值范围(定义域)和变量的对应法则(函数关系),而不在于用什么字母来表示。所以,凡定义域相同、对应法则也相同的函数,就看作是同一个函数。比如 $y=2x+1$ 和 $v=2u+1$ 是同一个函数,又如 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 和 $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$,其定义域都是一切实数,由 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\sqrt{x^2+1}-x$ 知,对应法则实际上也是相同的,因此它们也是同一个函数。

一般说来,对于由解析表达式给出的函数,在没有赋与任何具体意义的情形下,它的定义域就是能使因变量有确定对应值的那些自变量的全体,这样的定义域叫做**自然定义域**。对于实际问题,自变量的取值范围常常要受到实际问题的限制,因此要根据实际意义来确定函数的定义域,这样的定义域叫做**实际定义域**。例如自由落体运动公式 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$,由于 t 代表运动的时间,因此这个函数的定义域应该是 $[0,T]$(T 为物体着地的时间)。

例 1 一块边长为 a 的正方形铁板,在它的四个角上各剪去一个相同的小正方形,做成一个无盖的铁盒(图 1-3)。如果剪去的小正方形边长为 x,那么铁盒的体积 V 与 x 之间有以下函数关系

$$V=(a-2x)^2x\ 。$$

根据实际意义知,其定义域是 $(0,\dfrac{a}{2})$。

例 2 断面是边长为 a 的倒置等边三角形,长为 l 的水槽(图 1-4),槽中水的体积 V 与水面高度 h 之间有以下函数关系

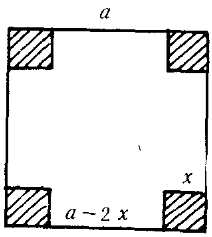

图 1-3

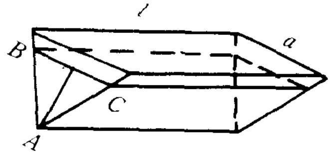

图 1-4

$$V=\triangle ABC\text{ 面积}\cdot l=\frac{1}{2}BC\cdot h\cdot l$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}h\cdot h\cdot l=\frac{1}{\sqrt{3}}h^2l\text{ 。}$$

其定义域为$\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right]$。

例 3 在电子技术中常遇到三角形脉冲波(图 1-5),它的一个波形可以表示成以下函数关系

$$y=\begin{cases}\frac{2b}{l}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\\ 2b-\frac{2b}{l}x, & \frac{l}{2}<x\leqslant l\text{。}\end{cases}$$

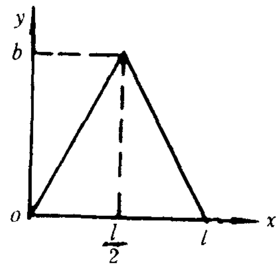

图 1-5

注意,它是一个定义在$[0,l]$上的函数,而不是两个函数。在定义域的不同范围,其对应法则分别有各自的解析表达式。这种用分段形式来表达的函数,通常称为**分段函数**。它也是实际问题中常遇见的一种函数形式。例如邮件的邮资与重量的关系、公共汽车的票价与路程的关系等都是分段函数。

对于自变量在定义域中的任一个值,如果对应的函数值是唯一的,这样的函数称为**单值函数**,如果对应的函数值多于一个,就称为**多值函数**。多值函数可以分成若干个单值分支来讨论,比如 y^2

$=x$ 可以分成两个单值分支 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=-\sqrt{x}$ 来讨论。因此，今后如果不加说明，那么所讨论的函数都是指单值函数。

三、反函数

对于函数 $y=f(x)$，如果对于值域中的每一个值 y，都有确定的对应值 x，这时将 y 认作自变量，x 认作因变量，就确定了一个新的函数 $x=\varphi(y)$，称它是 $y=f(x)$ 的**反函数**。$y=f(x)$ 的反函数也常记为 $x=f^{-1}(y)$，其定义域就是 $y=f(x)$ 的值域。例如 $y=2x+1$ 的反函数是 $x=\frac{y-1}{2}$。

容易看出，一个函数和它的反函数是互逆的，既可以说 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，也可以说 $y=f(x)$ 是 $x=\varphi(y)$ 的反函数。

习惯上常把自变量记为 x，因变量记为 y。所以 $y=f(x)$ 的反函数也可以记为 $y=f^{-1}(x)$（它与 $x=f^{-1}(y)$ 是同一个函数），这样便于比较它们的图形。比如上面的例子，$y=2x+1$ 的反函数 $x=\frac{y-1}{2}$ 也可以写成 $y=\frac{x-1}{2}$。

现在来观察一个函数与其反函数的图形之间的关系。由于习惯上把平面直角坐标系中的横坐标作为自变量，纵坐标作为因变量，因此在观察图形时应把 $y=f(x)$ 的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$。设 (a,b) 是 $y=f(x)$ 的图形上的一点，即 $b=f(a)$。由反函数的关系有 $a=f^{-1}(b)$，这就是说，(b,a) 是 $y=f^{-1}(x)$ 的图形上的一点，而点 (a,b) 和 (b,a) 是关于直线 $y=x$ 对称的（图 1-6），因此知道，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的。

四、复合函数

将函数 $u=\sqrt{x^2+1}$ 代入函数 $y=\sin u$ 中，可以得到一个新的函数

$$y=\sin\sqrt{x^2+1}$$

这个函数就叫做由 $y=\sin u$ 和 $u=\sqrt{x^2+1}$ 复合而成的复合函数。

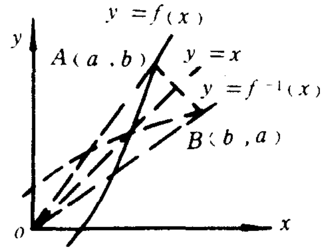

图 1 6

一般地，对于函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$，如果 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域有公共部分，那么就把函数 $y=f[\varphi(x)]$ 称为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**。称 u 为**中间变量**。通常把函数的这种复合过程叫做**复合运算**。

但要注意，并不是任何两个函数都可以复合。比如 $y=\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ 和 $u=-x^2$ 就不能复合，因为 $u=-x^2$ 的值域是 $u\leqslant 0$，而 $y=\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ 的定义域是 $u>0$，它们没有公共部分。

我们还常常遇到由多于两个函数复合而成的复合函数。比如由 $y=\sqrt{u}$，$u=\sin v$，$v=\dfrac{x^2}{2}$ 复合而成的复合函数是

$$y=\sqrt{\sin\frac{x^2}{2}};$$

又如由 $r=\dfrac{1}{u}$，$u=v^2$，$v=\operatorname{tg}\omega$，$\omega=2\theta$ 复合而成的复合函数是

$$r=(\operatorname{tg}^2 2\theta)^{-1}。$$

反过来，许多函数常常可以根据需要，按复合关系，把它分解成为几个较简单的函数。比如函数

$$y=\operatorname{tg}^2(\sin x+1)$$

可以分解成 $y=u^2$，$u=\operatorname{tg}v$，$v=\omega+1$，$\omega=\sin x$。又如函数

$$y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$$

可以分解成 $y=\arcsin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1-\omega$，$\omega=x^2$ 等等。

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域

(1) $y=\log_a(1-2\cos x)$;

(2) $y=\arcsin(\log_a\frac{x}{10})(a>1)$;

(3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}+\arccos\frac{2x-1}{7}$。

2. 设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$,求 $f[f(x)]$并确定其定义域。

3. 设 $f(x)=x^2+1$,求 $f(0)$、$f(\frac{1}{a})(a\neq0)$、$f(x+h)-f(x)$。

4. 设 $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{x^2+1}$,求 $f(x)$。

5. 设

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0\\ x+1, & x\leqslant 0\end{cases}$$

求 $f(-\frac{\pi}{2})$,$f(\frac{\pi}{2})$,$f(0)$。

6. 写出下列函数的复合函数

(1) $y=\cos u$, $u=\frac{v}{2}$, $v=\arcsin x$;

(2) $y=a^u$, $u=-\sqrt{v}$, $v=2-\omega$, $\omega=\sin t$;

(3) $y=\log_a u$, $u=\sin v$, $v=\sqrt{1-\omega}$, $\omega=x^2$。

7. 某工厂位于点 A 处(图 1-7),它距铁路线 BC 的垂直距离为 20 公里,BC 长 100 公里,为了使工厂的货物运到 C 处,欲在 BC 上选一处 D,修筑一条公路 AD。已知铁路与公路每公里运费之比为 3∶5,试建立总运费 y 与 D 到 B 的距离 x 之间的函数关系。

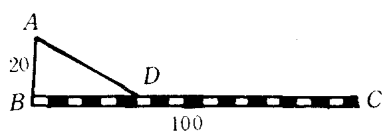

图 1-7

8. 欲建造一个容积为 V 的无盖圆柱形蓄水池,底部单位面积造价为 a 元,侧面单位面积造价为 b 元。试建立总造价 M 与水池半径 R 之间的函数关系。

9. 把一个半径为 R 的圆形铁片，自圆心处剪去一个扇形后，余下部分做成一个漏斗(图 1-8)。试建立漏斗体积与余下部分的中心角 α 之间的函数关系。

10. 用直线 $x+y=t$(t 是参数，$0\leqslant t\leqslant 2$)去截割以点 $A(1,0)$、$B(1,1)$、$C(0,1)$和 $O(0,0)$为顶点的正方形，求截割后原点所在部分的面积 S 与参数 t 之间的函数关系(图 1-9)。(提示：表示成分段函数。)

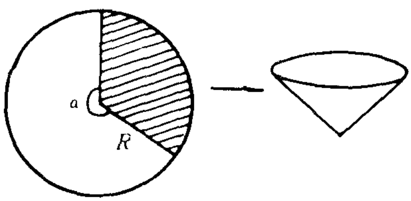

图 1-8

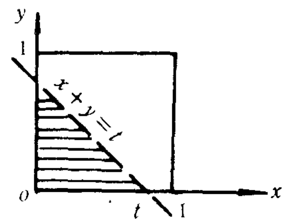

图 1-9

第二节　函数的性质

一、函数的基本性质

为了研究函数，必须熟悉函数可能具有的性质。在这些性质中，最基本的性质是函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性。

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义。如果存在一个正数 M，使得对于 I 上的一切 x，函数值 $f(x)$都满足不等式$|f(x)|\leqslant M$，就称 $f(x)$在区间 I 上**有界**。M 称为 $f(x)$在 I 上的**界**。如果这样的正数 M 不存在，也就是无论 M 为什么正数，在 I 上都至少有一点 x，满足$|f(x)|>M$，就称 $f(x)$在 I 上**无界**。

因为$|f(x)|\leqslant M$ 等价于不等式$-M\leqslant f(x)\leqslant M$，这表明函数 $f(x)$在 I 上有界的意思是，$y=f(x)$在区间 I 上的图形始终不越出由平行直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 所夹的带形域(图 1-10)。

例如 $f(x)=\sin x$，它在$(-\infty,+\infty)$内部满足$|\sin x|\leqslant 1$，因此