上海研究生教育丛书

代数基础

（模、范畴、同调代数与层）

陈志杰 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

代数基础: 模、范畴、同调代数与层 / 陈志杰编著
上海: 华东师范大学出版社, 2001
ISBN 7-5617-2638-4

I. 代 ... II. 陈 ... III. 高等代数-研究生-教材
IV. 015

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第033028号

代数基础

模、范畴、同调代数与层

编　　著　陈志杰
责任编辑　倪　明
封面设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部　电话　021-62865537
　　　　　　　　　传真　021-62860410
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编　200062
印 刷 者　华东师范大学印刷厂
开　　本　890×1240　32开
印　　张　7.25
字　　数　200千字
版　　次　2001年6月第一版
印　　次　2001年6月第一次
印　　数　1－3100
书　　号　ISBN 7-5617-2638-4/O·107
定　　价　12.00元
出 版 人　朱杰人

前　言

从 1986 年秋天开始，华东师范大学数学系开始为研究生开设代数、几何、分析等公共基础课程，以让他们对数学的各方面有更全面的了解．这就是我们开设“代数基础”这门课的初衷．

代数基础课的教学目的是让各个方向的研究生都能学习一些现代代数学的基本思想与方法，掌握一些他们在今后的研究工作中有可能用到的代数工具．因此内容的选择很重要．经过调研后，我们感到随着现代数学的研究问题不断从局部向整体拓展，同调代数的方法已经渗入到数学的许多分支，成为一个被广泛使用的代数工具．为了学习同调代数，需要模与范畴的基础知识，因此最终把代数基础的内容框定为模、范畴与同调代数．考虑到代数基础课的主要对象是非代数方向的研究生，他们已经具有的代数知识可能仅限于一学期的近世代数课所能学到的内容，经过几年荒废后已经所剩无几．因此我们在引进模的概念与基本性质时，既注意多举实例，又利用这个机会复习群与环的性质，尤其是同态基本定理．本书模论的核心内容是两个函子——Hom 函子与张量积函子，以及 4 类模——自由模、投射模、内射模与平坦模．在范畴论方面，我们要让学生学习数学抽象的方法，把模论里学到的具体的概念抽象成一般范畴里的概念——如自由对象、积、余积等．从而使学生领会到为什么群、环、模的积都有类似的构造方法以及性质．最后建立 Abel 范畴作为同调代数的基础．我想对大多数学生来讲，范畴理论只要知道一点就可以了．第三章同调代数是本书的核心，为了降低难度，我们只在模的范畴里讨论．为了让学生对同调代数的背景有一点直观的体验，我们特地从单形剖分的同调群引入，让学生认识到同调群实际上就是几何物体中所含有

的“孔”的度量, 而物体有没有“孔”当然是一个整体的性质. 也就是说, 同调代数的量往往能刻画研究对象的整体性质. 因此让学生计算一些具体图形的同调群是有好处的. 同调代数的主体内容——导出函子与长正合列颇为抽象乏味, 为了让学生具体体验这些概念, 最好的方法是以 Abel 群为例作些计算. 在学习 Ext 时, 最好能讲一下模的扩张问题, 因为这对理解 Ext 的含义十分重要. 由于课时所限, 代数的上同调只能放弃了. 最后在成书时, 我们加了第四章, 介绍层的概念. 层也是涉及局部—整体性质的重要概念, 国内出版的教材很少涉及, 我们放在这里可供有兴趣的学生学习, 因为一学期的课是讲不到这些内容的.

根据我们所设定的读者对象, 本书的内容以实用为主, 不追求理论的完备或一般化. 例如导出函子只对左正合或右正合的函子定义, 尽管它也可以对一般的函子定义. 希望任课的老师也要顾及听课对象的情况, 不要讲得太抽象、太深奥.

本书是在原有讲义的基础上整理修改而成的, 林磊和芮和兵副教授在教学过程中提出了许多修改意见, 尤其是林磊副教授担任了本书的审阅工作, 又发现了许多隐含的问题, 并且提供了他编写的习题解答作为本书附录的素材. 使用本书的教师如需要习题解答作为教学参考, 请直接与林磊副教授联系 (e-mail: llin@math.ecnu.edu.cn). 本书在编写、出版过程中得到了上海市研究生教育专项经费以及华东师范大学教材出版基金的资助, 在此表示衷心的感谢. 由于编者的水平所限, 错误之处在所难免, 恳请使用本书的教师与读者指正 (编者的 e-mail 地址为: zjchen@math.ecnu.edu.cn).

编者

2001 年 3 月

目　　录

第一章　模

§ 1–1　模的定义及基本性质

让我们先回忆一下实数域$\mathbb{R}$上向量空间V的概念. V 内向量的加法是一个代数运算, 它满足结合律和交换律, 使得V关于向量加法构成一个 Abel 群 (即交换群), 零向量就是这个群的单位元. 此外在实数与V的向量之间还定义了一个称为"纯量乘法"的运算, 即对于纯量 $\lambda \in \mathbb{R}$ 以及向量 $x \in V$ 可以确定一个向量 $\lambda x \in V$, 其几何意义就是 x 向量的缩放. 这个纯量乘法与向量加法以及实数域$\mathbb{R}$的加法和乘法之间是相容的, 也就是说对于 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 以及 $x, y \in V$ 有以下等式:

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y, \qquad (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x,$$

$$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x), \qquad 1x = x.$$

向量空间的概念很容易被推广到任意域F上. 如果再把域F放宽到任意的环R, 就有以下的R模的概念. 为简便起见, 我们以后涉及的环都是有单位元的环, 并且把环R的单位元记为1_R, 当不会引起混淆时, 简记为1. 凡是环同态总是把单位元映到单位元.

定义 1.1 设R是一个环, M是一个 Abel 群, 如果存在一个映射

$$\begin{array}{rcl} R \times M & \longrightarrow & M \\ (a, x) & \longmapsto & ax \end{array}$$

满足以下性质:

(1) $a(x+y) = ax + ay$,

(2) $(a+b)x = ax + bx$,

(3) $(ab)x = a(bx)$,

(4) $1x = x$,

其中 $x, y \in M$, $a, b, 1 \in R$, 则称 M 是一个 R **左模** (*left R-module*).

类似地, 我们可定义 R 右模.

定义 1.2 设 R 是一个环, M 是一个 Abel 群. 如果存在一个映射

$$\begin{array}{rcl} M \times R & \longrightarrow & M \\ (x, a) & \longmapsto & xa \end{array}$$

满足以下性质:

(1) $(x+y)a = xa + ya$,

(2) $x(a+b) = xa + xb$,

(3) $x(ab) = (xa)b$,

(4) $x1 = x$,

其中 $x, y \in M$, $a, b, 1 \in R$, 则称 M 是一个 R **右模** (*right R-module*).

显然关于 R 左模的性质略加改变后就能得到 R 右模的相应性质. 因此我们以后只考虑 R 左模, 并且简称为 R **模** (*R-module*). 如果 R 是交换环, 那么 R 左模和 R 右模完全是同一概念. 这是因为, 设 M 是 R 左模, 我们可定义以下的映射:

$$\begin{array}{rcl} M \times R & \longrightarrow & M \\ (x, a) & \longmapsto & xa = ax \end{array}$$

不难看出, 从定义 1.1 的 4 条性质能推出定义 1.2 的相应性质 (但当 R 不是交换环时, 定义 1.2 的性质 (3) 不一定成立). 因此 M 成为一个 R 右模. 反之亦对.

本书以后在不特别说明时总是**假设 R 是一个带有单位元 1 的交换环**, 并不再区分左模与右模.

下面我们看一些例子.

例 1.1 域 F 上的向量空间 V 就是一个 F 模. 反之, 任意一个 F 模都是域 F 上的向量空间.

例 1.2 任一 Abel 加群 M 是一个 $\mathbb{Z}$ 模 ($\mathbb{Z}$ 是整数环). 当 $x \in M$, m是正整数时, 我们定义

$$mx = \underbrace{x + \cdots + x}_{m\text{个}}.$$

当 $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$ 时, 定义 $mx = (-m)(-x)$. 再定义 $0x = 0$. 不难看出定义 1.1 的 4 条性质都被满足. 把 Abel 群看作 $\mathbb{Z}$ 模的好处是我们可把模论的许多结论应用到 Abel 群上. 事实上, 模的概念也可以看成是 Abel 群概念的推广.

例 1.3 设 V 是域 F 上的向量空间, T 是 V 上的线性变换, 我们把 x 在 T 作用下的象 $T(x)$ 简写为 Tx, 则对任意的 $x, y \in V$ 以及 $a \in F$, 根据线性变换的定义有

$$T(x+y) = Tx + Ty,$$
$$T(ax) = aTx.$$

设 λ 是 F 上的不定元, $F[\lambda]$ 是多项式环. 对于 $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m$, 我们可如下定义一个映射

$$\begin{aligned} F[\lambda] \times V &\longrightarrow V \\ (f(\lambda), x) &\longmapsto f(\lambda)x \overset{\text{def}}{=} f(T)x = a_0x + a_1Tx + \cdots + a_mT^mx, \end{aligned}$$

不难验证定义 1.1 的 4 条性质都被满足, 因此 V 成为一个 $F[\lambda]$ 模, 这样我们也可从模论的角度导出有限维向量空间的单独一个线性变换的理论.

例 1.4 对任一个环 R, 我们可把 M 取成 R 的加群 $(R, +, 0)$. 这时定义 ax 为 R 的乘法, 则 R 自己成为一个 R 模. 又若 S 是 R 的子环, 则 R 也可看成是 S 模, 但 S 不一定是 R 模(为什么?). 特别地, R 上的多元多项式环 $R[x_1, \cdots, x_n]$ 和 R 上的**形式幂级数环** (*ring of formal power series*)

$$R[[x]] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + \cdots \mid a_i \in R, i \in \mathbb{N}\}$$

都是 R 模.

例 1.5 设 R 和 S 都是环, $\psi : R \longrightarrow S$ 是环同态, M 是一个 S 模. 则对 $a \in R$, $x \in M$, 定义 $ax = \psi(a)x$, 就可使 M 成为 R 模.

设 M 是 R 模, 则由定义立即可知, 对任意的 $a, a_i \in R$, $x, x_i \in M$,

有以下等式:

$$\begin{aligned} a0 &= 0, & 0x &= 0, \\ a(-x) &= -ax, & (-a)x &= -ax, \\ a\left(\sum x_i\right) &= \sum ax_i, & \left(\sum a_i\right)x &= \sum a_i x. \end{aligned} \tag{1.1}$$

注意, 这里的和式是有限项之和.

例 1.6 设 $M = \{0\}$ 是零 Abel 群, 则令 $a0 = 0$ 即可得到一个 R 模, 称为零模, 记为 0. 从性质 (1.1) 可知零模的模结构是唯一的.

定义 1.3 *设 M 是 R 模, N 是 M 的非空子集. 如果 N 是 M 的子群, 而且对所有的 $a \in R$, $x \in N$, 都有 $ax \in N$, 就称 N 是 M 的***子模** *(submodule).*

命题 1.1 *R 模 M 的非空子集 N 是 M 的子模的充要条件是:*

(1) 当 $y_1, y_2 \in N$ 时, $y_1 + y_2 \in N$;

(2) 当 $a \in R$, $y \in N$ 时, 有 $ay \in N$.

证明: 必要性是显然的, 只需证充分性. 由性质 (1.1) 可知 $0y = 0 \in N$, $-y = (-1)y \in N$, 所以 N 是子加群, 再由 (2) 可知 N 是子模. □

例 1.7 设 M 是 $\mathbb{Z}$ 模, 则 N 是 M 的子模的充要条件是 N 是 M 的子加群.

例 1.8 设 V 是域 F 上向量空间, 则 N 是 V 的子模当且仅当 N 是 V 的子空间.

例 1.9 设 V 是域 F 上的有限维向量空间, T 是 V 上的线性变换, 把 V 看作 $F[\lambda]$ 模, 则 V 的 $F[\lambda]$ 子模 W 就是 T 的不变子空间, 即满足 $TW \subseteq W$ 的子空间. (为什么?)

例 1.10 环 R 看作 R 模时, R 的子模就是它的理想. (为什么?)

例 1.11 若 $\{N_i \mid i \in I\}$ 是 M 中的一族子模, 则 $\bigcap_{i\in I} N_i$ 也是一个子模. (为什么?)

例 1.12 单独一个零元素构成的集合 $\{0\}$ 也是 M 的子模, 称为零子模, 简记为 0.

例 1.13 对于 R 模 M 的元素 x 可以定义 x 的**零化子** (*annihilator*) $\mathrm{Ann}_R(x)=\{a\in R\mid ax=0\}$, 它是 R 的一个理想. 如果 $\mathrm{Ann}_R(x)\neq 0$, 则称 x 是一个**扭元** (*torsion element*). 如果 R 是整环, 则 M 的所有扭元的集合 $T(M)$ 是 M 的一个子模, 称为 M 的**扭子模** (*torsion submodule*). 当 $M=T(M)$ 时, 称 M 是**扭模**. 例如有限 Abel 群看成 $\mathbb{Z}$ 模时都是扭模. 例 1.3 的 $F[\lambda]$ 模 V 也是扭模.

定义 1.4 如果非零 R 模 M 的子模只有 M 及 0, 则称 M 为**单模** (*simple module*). 单模又称**不可约模** (*irreducible module*).

设 $X\subseteq M$ 是 R 模 M 的一个子集, $S\subseteq R$ 是环 R 的一个子集, 则 M 中形如

$$s_1x_1+\cdots+s_nx_n=\sum_{i=1}^{n}s_ix_i,\qquad s_i\in S, x_i\in X, 1\leqslant i\leqslant n$$

的元素被称为 X **的 S 线性组合** (*S-linear combination of X*). 我们用 SX 记 X 的所有 S 线性组合所构成的集合.

命题 1.2 设 X 是 R 模 M 的一个非空子集, 则 RX 是 M 的一个子模, 称为**由 X 生成的子模** (*submodule generated by X*), 记为 (X).

证明: X 的 R 线性组合显然关于加法是封闭的, 因而满足命题 1.1 的条件 (1). 又对任意的 $a\in R$, 有

$$a(r_1x_1+\cdots+r_nx_n)=(ar_1)x_1+\cdots+(ar_n)x_n\in RX,$$

故命题 1.1 的条件 (2) 也被满足. □

根据模的定义, 如果 M 的子模 $N\supseteq X$, 则 N 必包含 X 的所有 R 线性组合, 即 $N\supseteq RX$. 因此有

$$RX\subseteq\bigcap_{\substack{X\subseteq N\\ N\text{ 是子模}}}N.$$

反之, 由命题 1.2 知道 RX 也是一个包含 X 的子模, 因此

$$\bigcap_{\substack{X\subseteq N\\ N\text{ 是子模}}}N\subseteq RX.$$

这样就有

$$(X) = RX = \bigcap_{\substack{X \subseteq N \\ N\text{ 是子模}}} N.$$

也就是说我们可以定义 (X) 为 M 中包含 X 的所有子模的交集. 实际上 (X) 就是包含 X 的最小子模.

定义 1.5 如果 $M = RX$, 则称 X 是 M 的**生成元集**, X 的元素称为 M 的**生成元** (*generator*). 如果 X 是一个有限集, 则称 M 是**有限生成的** (*finitely generated*). 如果 $M = (x)$, 则称 M 是**循环模** (*cyclic module*).

特别地, 当 $\{N_i \mid i \in I\}$ 是一族子模时, 我们有

$$\left(\bigcup_{i\in I} N_i\right) = \left\{y_{i_1} + \cdots + y_{i_k} \mid y_{i_j} \in N_{i_j}, k\text{ 为正整数}\right\}.$$

我们把这个子模记为 $\sum\limits_{i\in I} N_i$, 当 N_i 只有有限个时, 也把 $\sum N_i$ 写成 $N_1 + \cdots + N_m$.

设 K 是 R 模 M 的一个子模, 则 K 的陪集的集合

$$M/K = \{x + K \mid x \in M\}$$

关于自然定义的加法和模的乘法:

$$(x + K) + (y + K) = (x + y) + K, \qquad a(x + K) = ax + K$$

成为一个 R 模, 称为**商模** (*factor module*), 仍记为 M/K. 商模中的零元和负元分别为

$$K = 0 + K \quad \text{及} \quad -(x + K) = (-x) + K.$$

我们常常把 x 的陪集记为

$$\overline{x} = x + K.$$

请注意, 由 $\overline{x} = \overline{y}$ 不能得到 $x = y$, 而只能得出 $x - y \in K$.

说明 1.1 模的概念至少可以追溯到 19 世纪 60 年代至 80 年代 R. Dedekind (Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831~1916, 中译名戴德金) 和 L. Kronecker (Leopold Kronecker, 1823~1891, 中译名克罗内克) 对代数数域与函数域的算术的研究工作中. 模的最早理论是作为环中理想的理

论而提出来的. 此后, 在E. Noether (Amalie Emmy Noether, 1882~1935, 中译名诺特) 和 W. Krull (Wolfgang Krull, 1899~1971, 中译名克鲁尔) 的工作中, 人们看到用模的语言来表述和证明许多结果比仅仅用理想的语言更为方便. 20 世纪 40 年代发展起来的同调代数, 更以模作为其主要研究对象.

练　习　1-1

1.1 设 N, K 是 R 模 M 的子模, 定义

$$(N:K) = \{ a \in R \,|\, aK \subseteq N \}.$$

证明: $(N:K)$ 是 R 的理想. 特别地,

$$\mathrm{Ann}(M) = (0:M) = \{ b \in R \,|\, bx = 0 \text{对所有的} x \in M \}$$

称为 M 的零化子. 如果 $C \subset \mathrm{Ann}(M)$ 也是 R 的理想, 证明: 定义 $(a+C)x = ax$ 可使 M 成为 R/C 模.

1.2 证明: 对于 R 模 M 的子模 N, K, 有

(1) $\mathrm{Ann}(N+K) = \mathrm{Ann}(N) \cap \mathrm{Ann}(K)$;

(2) $(N:K) = \mathrm{Ann}((K+N)/N)$.

1.3 设 $V = \mathbb{R}^n$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 维向量空间, T 是 V 的线性变换, 定义为

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \longmapsto Tx = (0, x_1, \cdots, x_{n-1}).$$

按照例 1.3 所述, 可以把 V 看成 $\mathbb{R}[\lambda]$ 模, 试计算

(1) λx;

(2) $(\lambda^2 + 2)x$;

(3) $(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \cdots + 1)x$.

又满足 $\lambda^2 x = 0$ 的 x 是怎样的?

1.4 对于练习 1.3 中的 $\mathbb{R}[\lambda]$ 模 V, 确定练习 1.1 中定义的 $\mathrm{Ann}(V)$.

1.5 对于练习 1.3 中的 $\mathbb{R}[\lambda]$ 模 V, 令 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, 证明 $V = \mathbb{R}[\lambda]e_1$, 从而 V 是一个循环模.

1.6 证明当 R 是整环时例 1.13 中定义的 $T(M)$ 确实是 M 的子模. 试举一例说明当 R 不是整环时 $T(M)$ 可能不是子模.

1.7 设 M 是非零有限 Abel 群, 问 M 能成为 $\mathbb{Q}$ 模吗? 这里 $\mathbb{Q}$ 是有理数域.

1.8 试证非零模 M 为单模当且仅当 M 是由它的任一非零元素生成的循环模.

1.9 当 $n > 1$ 时试判定练习 1.3 中的 $\mathbb{R}[\lambda]$ 模 V 是否单模, 并说明理由.

1.10 试举一例以说明有限生成 R 模不一定是有限生成 Abel 群.

§ 1–2 模的同态

定义 2.1 设 M 和 M' 都是 R 模. 若 $f: M \longrightarrow M'$ 是加群同态, 并且有

$$f(ax) = af(x), \qquad \forall a \in R, x \in M,$$

则称 f 是 R **模同态** (*R-module homomorphism*), 简称为 R **同态**或**同态**.

定义 2.2 如果 R 模同态 $f: M \longrightarrow M'$ 是单的, 也就是说从 $f(x) = f(y)$ 必能得出 $x = y$, 就称 f 是**单同态** (*monomorphism*). 如果 f 是满的, 也就是说对任意的 $y \in M'$ 必能找到 $x \in M$ 使得 $f(x) = y$, 就称 f 是**满同态** (*epimorphism*). 如果 f 既是单同态又是满同态, 就称 f 是 R 模**同构** (*isomorphism*), 称 R 模 M 和 M' 是**同构的** (*isomorphic*), 记为 $M \cong M'$.

如果 K 是 M 的子模, 则加群同态

$$\begin{aligned} \nu: M &\longrightarrow M/K \\ x &\longmapsto \overline{x} = x + K \end{aligned}$$

也是 R 模同态, 称为 M 到它的商模 M/K 上的**自然同态** (*natural homomorphism*). 自然同态是一个满同态.

类似于群的同态, 我们也可定义 R 模同态 $f: M \longrightarrow M'$ 的核、象、余核和余象.

定义 2.3 R 模同态 $f: M \longrightarrow M'$ 的**核** (*kernel*) 及**象** (*image*) 为

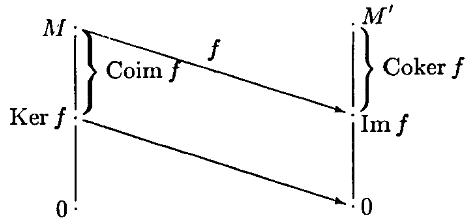
$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0) = \{x \in M \mid f(x) = 0\},$$

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) \in M' \mid x \in M\}.$$

R 模同态 f 的**余核** (*cokernel*) 及**余象** (*coimage*) 为

$$\operatorname{Coker} f = M'/\operatorname{Im} f, \qquad \operatorname{Coim} f = M/\operatorname{Ker} f.$$

不难验证 $\operatorname{Ker} f$ 是 M 的子模, $\operatorname{Im} f$ 是 M' 的子模.



把 M 的所有元素都映到零的同态 $0: x \longmapsto 0 \in M' \ \ \forall x \in M$ 称为**零同态** (*zero homomorphism*), 也记为 0. 这样, 符号 0 既代表零元素, 又代表零模和零同态, 一般是不会混淆的. 但对初学者来说则要注意区分. 由同态的定义, 零模到任何一个模的同态都是零同态, 而且是单同态. 任何一个模到零模的同态也都是零同态, 这时是满同态. 零模之间通过零同态互相同构, 因此我们认为零模是唯一的.

命题 2.1 设 $f: M \longrightarrow M'$ 是 R 模同态, 则下列条件是等价的:

(1) f 是单同态;

(2) $\operatorname{Ker} f = 0$;

(3) 对任意的 R 模 K 以及 R 模的同态 $g, h: K \longrightarrow M$, 从 $fg = fh$ 可以得出 $g = h$. (即 f 可被左消去.)

(4) 对任意的 R 模 K 以及 R 模的同态 $g: K \longrightarrow M$, 从 $fg = 0$ 可以得出 $g = 0$.

证明: (1)⇔(2) 以及 (1)⇒(3) 都是显然的. 注意到 $fg = 0 = f0$, 取 $h = 0$ 即可从 (3) 推出 (4).

(4)⇒(2): 取 $K = \operatorname{Ker} f$, 则嵌入同态 $i: K \longrightarrow M$ 满足 $fi = 0$, 由 (4) 可得 $i = 0$, 即 $K = \operatorname{Im} i = 0$. □

命题 2.2 设 $f: M \longrightarrow M'$ 是 R 模同态, 则下列条件是等价的:

(1) f 是满同态;

(2) $\operatorname{Im} f = M'$;

(3) 对任意的 R 模 K 以及 R 模的同态 $g, h: M' \longrightarrow K$, 从 $gf = hf$ 可以得出 $g = h$. (即 f 可被右消去.)

(4) 对任意的 R 模 K 以及 R 模的同态 $g: M' \longrightarrow K$, 从 $gf = 0$ 可以得出 $g = 0$.

证明: (1)⇔(2), (1)⇒(3) 以及 (3)⇒(4) 都是显然的.

(4)⇒(2): 取 $I = \operatorname{Im} f$, 则自然同态 $\nu : M' \longrightarrow M'/I = \operatorname{Coker} f$ 满足 $\nu f = 0$, 由 (4) 可得 $\nu = 0$. 由于自然同态是满同态, 因此 $M'/I = 0$, 即 $M' = I = \operatorname{Im} f$. □

命题 2.3 设 M 和 M' 都是 R 模, $f: M \longrightarrow M'$ 是 R 模同态. 则 f 是同构当且仅当存在映射 $g, h : M' \longrightarrow M$ 使得

$$fg = 1_{M'} \quad 以及 \quad hf = 1_M.$$

当上述等式成立时, 必有 $g = h$ 是 R 模同构.

证明: 充分性是显然的. 逆映射的唯一性也可如下导出:

$$g = 1_M g = (hf)g = h(fg) = h1_{M'} = h.$$

反之, 如果 f 是同构, 则必存在逆映射 $g : M' \longrightarrow M$ 使得 $fg = 1_{M'}$ 以及 $gf = 1_M$. 最后我们只需验证 g 是 R 模同态, 即验证 g 是 R 线性的. 由以下等式

$$f(ag(x) + bg(y)) = af(g(x)) + bf(g(y)) = ax + by = f(g(ax + by)),$$

以及 f 是单射, 就可得到 $g(ax + by) = ag(x) + bg(y)$, 即 g 是 R 模同态. □

设 M 和 M' 是两个 R 模, 我们把从 M 到 M' 的所有 R 模同态的集合记为 $\operatorname{Hom}_R(M, M')$, 当只涉及到一个 R 时, 也可简写为 $\operatorname{Hom}(M, M')$. 回忆向量空间 V 上的所有线性变换的集合上可以定义加法、数乘与乘法, 对于 $f, g \in \operatorname{Hom}_R(M, M')$, 我们可定义一个映射

$$\begin{aligned} f + g :\ & M \longrightarrow M' \\ & x \longmapsto f(x) + g(x) \end{aligned}$$

显然 $f + g$ 是 R 模同态 (为什么?). 从而 $f + g \in \operatorname{Hom}_R(M, M')$. 请读者验证 $\operatorname{Hom}_R(M, M')$ 关于这样定义的加法成为一个 Abel 群, 其零元素就

是零同态. 此外, 可以验证映射

$$\begin{array}{ccc} R \times \mathrm{Hom}_R(M, M') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M, M') \\ (a, f) & \longmapsto & (af : x \longmapsto af(x)) \end{array}$$

满足定义 1.1 的四个性质, 从而在 $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ 上定义了一个 R 模结构. 以后我们总是把它看成这样定义的 R 模.

当 $M = M'$ 时, 我们可在集合 $\mathrm{Hom}_R(M, M)$ 内定义一个乘法, 它为映射的复合, 即 $(fg)(x) = f(g(x))$. 请读者验证 $\mathrm{Hom}_R(M, M)$ 关于上面定义的加法和乘法构成一个环. 当 M 是单模时, 这还是一个除环 (见练习 2.3).

如果同态 $f : M \longrightarrow M'$ 是两个同态的复合:

$$f = gh,$$

则称 f 通过 g 或 h 分解. 以下的定理说明同态 f 可以唯一地通过一个满同态被分解, 只要这个满同态的核被包含在 f 的核中.

定理 2.4 设 $f : M \longrightarrow M'$ 和 $g : M \longrightarrow N$ 都是 R 模同态, 其中 g 是满同态并且 $\mathrm{Ker}\, g \subseteq \mathrm{Ker}\, f$, 则存在唯一的同态 $h : N \longrightarrow M'$ 使得

$$f = hg.$$

此外, $\mathrm{Ker}\, h = g(\mathrm{Ker}\, f)$, $\mathrm{Im}\, h = \mathrm{Im}\, f$. 所以 h 是单的当且仅当 $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker}\, f$, h 是满的当且仅当 f 是满的.

我们可以把定理 2.4 表示成以下的交换图:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & M' \\ & N \arrow[u, dashed, "\exists h"'] \end{tikzcd}$$

证明: 由于 g 是满的, 对任意的元素 $n \in N$ 必存在 $m \in M$ 使得 $g(m) = n$. 如果又有 $m_1 \in M$ 使得 $g(m_1) = n$, 则 $g(m - m_1) = 0$, 从而 $m - m_1 \in \mathrm{Ker}\, g \subseteq \mathrm{Ker}\, f$, 即 $f(m - m_1) = 0$, $f(m) = f(m_1)$. 因此只要