高等学校工程专科教材

工程力学

（运动学与动力学）

赵芳印　庄立球　编

赵芳印　主编

高等教育出版社

高等学校工程专科教材

工 程 力 学

（运动学与动力学）

赵芳印　庄立球　编

赵芳印　主编

高等教育出版社

(京)112号

内容提要

高等学校工程专科非机、非土类各专业用的《工程力学》教材是根据国家教委颁发的“高等学校工程专科工程力学课程教学基本要求”编写的，全书分三册出版：静力学、运动学与动力学、材料力学，供不同专业的需要选用。本册为运动学与动力学部分。

本册内容有：点的运动，刚体的基本运动，点的合成运动，刚体的平面运动，质点动力学问题，刚体动力学问题，动能定理。

高等学校工程专科教材
工 程 力 学
(运动学与动力学)
赵芳印 庄立球 编
赵芳印 主编
*
高等教育出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
中国科学院印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 4 字数 100 000
1994 年 6 月第 1 版 1994 年 6 月第 1 次印刷
印数 0001—1 815
ISBN 7-04-004689-X/TU·61
定价 2.15 元

序

高等学校工程专科非机、非土类各专业用的《工程力学》教材是根据国家教委颁发的“高等学校工程专科工程力学课程教学基本要求”编写的。全书分三册出版：静力学、运动学与动力学、材料力学，供不同专业的需要选用。本册为运动学与动力学部分。

在编写过程中，遵循“以应用为目的，以必需够用为度；以掌握概念，强化应用为重点”的指导方针，妥善处理教材内容、学科体系和理论推导的关系；同时吸取了一些高等工程专科学校工程力学课教学的经验，力争做到内容精练、知识面广、结合工程实际、能较好地体现专科特色。为便于理解概念、加强训练，各章后附有思考题和习题，备不同专业教学中选用。

本册运动学部分由郑州机械专科学校赵芳印编写，动力学部分由集美航海学院庄立球编写，由赵芳印主编。本册由杜白简、陈大堃主审，扬州工学院力学教研室赵晴等同志参加了审稿会，他们对初稿提出了宝贵的意见；北京科技大学纪炳炎教授对本册进行了复审，提出很多中肯的意见，在此一并致以谢意。

由于编者水平所限，书中的缺点和错误在所难免，恳请读者批评指止。

编　者

1993年3月

目　录

第一篇　运　动　学

引言…………………………………………………… 1

第一章　点的运动………………………………………… 2

§1-1　描述点运动的方法 ……………………………… 2

§1-2　点的速度和加速度的矢径表示法 ………………… 4

§1-3　点的速度和加速度的直角坐标表示法 …………… 5

§1-4　点的速度和加速度的自然表示法 ………………… 8

思考题…………………………………………………… 13

习题 ……………………………………………………… 14

第二章　刚体的基本运动………………………………… 17

§2-1　刚体的平动 ……………………………………… 17

§2-2　刚体的定轴转动 ………………………………… 19

§2-3　转动刚体上各点的速度和加速度 ………………… 22

§2-4　定轴轮系的传动比 ……………………………… 24

思考题…………………………………………………… 26

习题 ……………………………………………………… 27

第三章　点的合成运动…………………………………… 29

§3-1　点的合成运动的概念 …………………………… 29

§3-2　点的速度合成定理 ……………………………… 30

思考题…………………………………………………… 37

习题 ……………………………………………………… 37

第四章　刚体的平面运动………………………………… 41

§4-1　刚体平面运动的基本问题 ………………………… 41

§4-2　用基点法求平面图形上各点的速度 ……………… 43

§4-3　速度瞬心法 ……………………………………… 46

思考题……………………………………………………………………… 50
习题…………………………………………………………………………… 51

第二篇　动　力　学

引言………………………………………………………………………… 55
第五章　质点动力学问题………………………………………………… 55
§5-1　动力学基本定律…………………………………………………… 55
§5-2　质点运动微分方程………………………………………………… 56
§5-3　质点动静法………………………………………………………… 62
思考题……………………………………………………………………… 66
习题………………………………………………………………………… 67
第六章　刚体动力学问题………………………………………………… 71
§6-1　刚体平动时的动力学问题………………………………………… 71
§6-2　刚体绕定轴转动的微分方程……………………………………… 75
§6-3　转动惯量…………………………………………………………… 77
§6-4　刚体绕定轴转动微分方程的应用………………………………… 80
思考题……………………………………………………………………… 87
习题………………………………………………………………………… 87
第七章　动能定理………………………………………………………… 94
§7-1　功和功率…………………………………………………………… 94
§7-2　质点和刚体的动能………………………………………………… 100
§7-3　动能定理…………………………………………………………… 101
思考题……………………………………………………………………… 111
习题………………………………………………………………………… 111
附录　习题答案…………………………………………………………… 116

第一篇 运 动 学

引 言

运动学是从几何的角度研究物体的机械运动，即研究物体运动的几何性质(轨迹、运动方程、速度和加速度)，而不考虑影响物体运动的物理因素(如质量、力等)。运动学是学习动力学的基础。

运动学的研究对象是质点和刚体。质点是具有一定质量而不计尺寸大小的物体，当物体的大小和形状对所研究问题的作用可以忽略不计时，就把物体视为一个质点。例如研究人造地球卫星的运动轨迹时，由于它的运动范围比它本身的尺寸大很多，因此可把它抽象为一个质点；如果要研究卫星上不同点的速度，就需把它抽象为刚体。

研究物体位置的变化必须以另一个物体作为参考，这个被选作参考的物体称为参考体，固结于参考体上的坐标系称为参考系。工程中一般以与地球相固结的参考系为静参考系，同一物体对于不同的参考系，所描述的运动不相同，如地面上的建筑物相对于地球是静止的，但相对于太阳来说又是运动的。

在运动学中必须注意区分瞬时和时间间隔两个概念，瞬时是某个确定的时刻，时间间隔是指两个瞬时之间的一段时间。

第一章　点 的 运 动

§1-1　描述点运动的方法

在分析质点运动规律时，由于不考虑质点的质量，可把质点简化为点，即质点的运动看作点的运动。研究点的运动，就是确定动点在参考系中每一瞬时的位置，由此求出点运动的速度和加速度。工程中的很多运动问题可归结为平面曲线运动，下面予以介绍。

一、矢径法

在参考系上任选一固定点 O 为参考点。自 O 点向动点 M 引矢量 $\boldsymbol{r}$，称为 M 点相对 O 点的位置矢量，简称矢径。M 点在任一瞬时的位置，可由矢径 $\boldsymbol{r}$ 唯一地确定（图 1-1）。点在运动的过程中，矢径 $\boldsymbol{r}$ 的大小和方向都随时间连续改变，成为时间 t 的单值连续函数：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1-1}$$

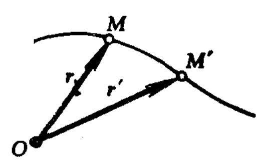

图　1-1

式(1-1)称为点的矢径形式的运动方程，它能给出任一瞬时动点的位置。动点 M 在运动的过程中，矢径 $\boldsymbol{r}$ 的末端相对参考系描绘出一条连续曲线，称为矢端曲线，即动点 M 的运动轨迹（图 1-1）。

二、直角坐标法

当动点的轨迹未知时，研究点的运动常用直角坐标法。在动点 M 运动平面内建立一直角坐标系 Oxy（图 1-2），则动点 M 在该平面内的位置，可由坐标 x、y 唯一地确定，坐标 x、y 是时间 t 的单值连续函数，即

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(t)\\ y&=f_2(t)\end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

上式称为动点的直角坐标形式的运动方程。从式(1-2)中消去时间 t，可得到动点的轨迹方程。

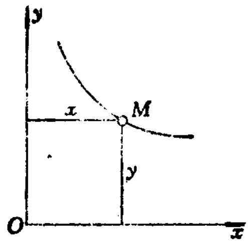

图 1-2

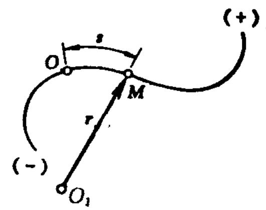

图 1-3

三、自然法

若动点 M 的运动轨迹已知(图1-3)，在轨迹上任选一点 O 作为弧长 s 的起点，并规定一个指向为 s 的正向，则 s 称为 M 点的弧坐标。于是，M 点在任一瞬时的位置可由弧坐标 $s=\overset{\frown}{OM}$ 唯一地确定。点 M 运动时，s 随时间连续改变成为时间的单值连续函数:

$$s=s(t) \tag{1-3}$$

式(1-3)称为点沿已知轨迹的运动方程。

例 1-1 曲柄连杆机构如图 1-4a 所示。曲柄 OA 绕定轴 O 以等角速度转动，$\varphi=\omega t$（ω 为常数）。曲柄的 A 端用铰链与连杆 AB 连接，连杆的 B 端通过铰链带动滑块沿水平槽运动。已知 $OA=AB=l$。试求 A 点、连杆中点 C 的运动方程。

解 (1) A 点 因 A 点的运动轨迹为圆，用自然法描述其运动很方便。以轨迹上的 A_0 点为参考原点取弧坐标 s，设逆时针转向为正，则 A 点沿轨迹的运动方程为

$$s=l\cdot\varphi=l\omega t$$

(2) C 点 C 点的运动轨迹未知，用直角坐标法较为方便。以 O 为原点建立直角坐标系 Oxy，如图 1-4b 所示。根据几何关系，得

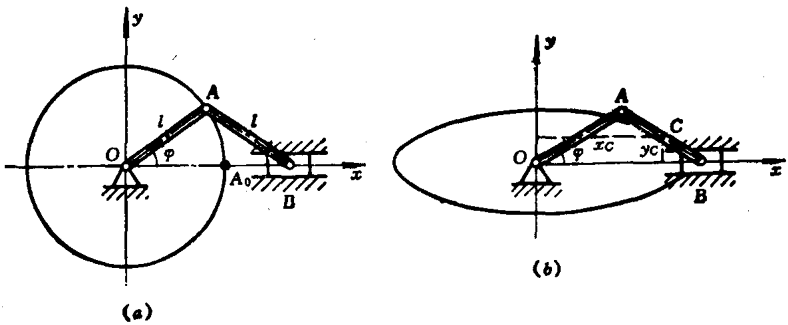

图 1-4

$$x_C = \frac{3}{2}\, l\cos\varphi = \frac{3}{2} l\cos\omega t$$

$$y_C = \frac{1}{2}\, l\sin\varphi = \frac{1}{2} l\sin\omega t$$

上式就是 C 点的运动方程。消去时间 t，得到 C 点的轨迹方程:

$$\left(\frac{x_C}{\frac{3l}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y_C}{\frac{l}{2}}\right)^2 = 1$$

这是以 $\frac{3l}{2}$ 为长半轴、$\frac{l}{2}$ 为短半轴的椭圆方程。

§1-2 点的速度和加速度的矢径表示法

一、点的速度

设由时刻 t 到 $t+\Delta t$，点从 M 运动到 M'，相应的矢径由 $\boldsymbol{r}$ 变到 $\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$（图 1-5)，那么 $\Delta\boldsymbol{r} = \overrightarrow{MM'}$ 就是时间间隔 Δt 内点的位移。在这时间间隔内点的平均速度是

$$\boldsymbol{v}^* = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，平均速度 $\boldsymbol{v}^*$ 的极限值称为点在瞬时 t 的速度，其

方向沿轨迹在M点的切线，以 $\boldsymbol{v}$ 表示，则

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{v}^*=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-4}$$

即动点的速度等于点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 对时间 t 的一阶导数。在我国法定计量单位中，速度的单位是 m/s。

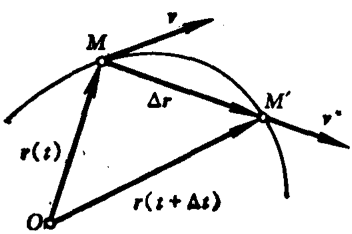

图 1-5

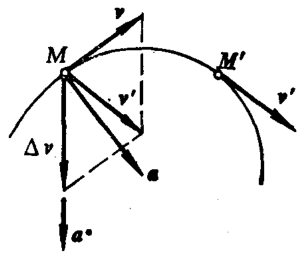

图 1-6

二、点的加速度

如图 1-6 所示，在时刻 t 和 $t+\Delta t$，点的速度由 $\boldsymbol{v}$ 变到 $\boldsymbol{v}'$，在时间间隔 Δt 内速度的变化为 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}$，则平均加速度为

$$\boldsymbol{a}^*=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

其大小等于 $\left|\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}\right|$，它的方向沿 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的方向。

当 $\Delta t\to 0$ 时，平均加速度 $\boldsymbol{a}^*$ 的极限值称为点在瞬时 t 的加速度，以 $\boldsymbol{a}$ 表示则有

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-5}$$

即动点的加速度等于点的速度对时间的一阶导数，或矢径对时间的二阶导数。在我国法定计量单位中，加速度的单位是 $\mathrm{m/s^2}$。

§1-3　点的速度和加速度的直角坐标表示法

如图 1-7 所示，已知动点M的速度为 $\boldsymbol{v}$，若直角坐标系沿二轴

的单位矢量分别为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$，则 $\boldsymbol{v}$ 可写成

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} \tag{a}$$

另一方面，矢径 $\boldsymbol{r}$ 的解析式可写成

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

将上式对时间求一阶导数，并注意到 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 是常矢量，于是有

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} \tag{b}$$

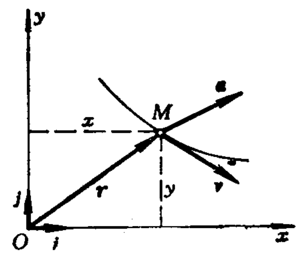

图 1-7

比较式(a)和(b)得

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{1-6}$$

即速度在各直角坐标轴上的投影等于动点的各相应坐标对时间的一阶导数。而速度的大小和方向余弦为

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i}) &= \frac{v_x}{v} \\ \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j}) &= \frac{v_y}{v} \end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

由于加速度等于速度对时间的一阶导数，不难得到

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\ a_y &= \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

即动点的加速度在直角坐标轴上的投影等于动点速度在相应坐标轴上的投影对时间的一阶导数，或等于动点相应坐标对时间的二阶导数。加速度的大小和方向余弦为

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}) &= \frac{a_x}{a} \end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j})=\frac{a_y}{a}\Bigg\}$$

例 1-2 求例 1-1 中 C 点的速度和加速度。

解 由例 1-1 已求得 C 点的运动方程为

$$x_C=\frac{3}{2}\ l\cos\omega t$$

$$y_C=\frac{1}{2}\ l\sin\omega t$$

据式(1-6),得

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t}=-\omega\times\frac{3}{2}\ l\sin\omega t$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}t}=\omega\times\frac{l}{2}\ \cos\omega t$$

故 C 点速度的大小为

$$\begin{aligned}v&=\sqrt{v_x^2+v_y^2}\\&=\sqrt{\omega^2l^2\times\frac{9}{4}\sin^2\omega t+\omega^2l^2\times\frac{1}{4}\cos^2\omega t}\\&=\frac{\omega l}{2}\sqrt{9\sin^2\omega t+\cos^2\omega t}\end{aligned}$$

其方向余弦为

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i})=\frac{v_x}{v}=\frac{-3\sin\omega t}{\sqrt{9\sin^2\omega t+\cos^2\omega t}}$$

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j})=\frac{v_y}{v}=\frac{\cos\omega t}{\sqrt{9\sin^2\omega t+\cos^2\omega t}}$$

根据式(1-8),

$$a_x=-\omega^2\times\frac{3}{2}\ l\cos\omega t$$

$$a_y=-\omega^2\times\frac{l}{2}\ \sin\omega t$$

故点C加速度的大小为

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ &= \sqrt{\omega^4 \times \frac{9}{4} l^2\cos^2\omega t + \omega^4 \times \frac{l^2}{4} \sin^2\omega t} \\ &= \frac{l\omega^2}{2}\sqrt{9\cos^2\omega t + \sin^2\omega t} \end{aligned}$$

其方向余弦为

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}) = \frac{-3\cos\omega t}{\sqrt{9\cos^2\omega t + \sin^2\omega t}}$$

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}) = \frac{-\sin\omega t}{\sqrt{9\cos^2\omega t + \sin^2\omega t}}$$

§1-4　点的速度和加速度的自然表示法

一、自然轴系

动点M作平面曲线运动的轨迹如图1-8所示，在轨迹上任一点M作切线$M\tau$，单位矢量为$\boldsymbol{\tau}$，指向与弧坐标正向一致，过M点作切线的垂线Mn，单位矢量为$\boldsymbol{n}$，指向曲线内凹的一侧。由轨迹上一点的切线和法线所构成的轴系，称为自然轴系。自然轴系不是固定的坐标系，它随动点在轨迹上的位置而变化，其单位矢量$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{n}$是变矢量。

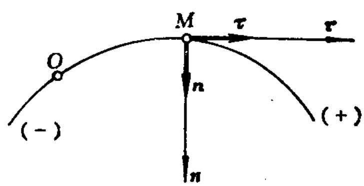

图　1-8

二、速度的自然表示法

设动点沿轨迹的运动方程为$s = f(t)$（图1-9），由式(1-4)得

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

当弧长$\Delta s \to 0$时，则有

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right| = 1$$

另外，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ 的方向沿M点的切线，且与弧坐标的正向一致，所以，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ 是沿M点切线的单位矢量，$\boldsymbol{\tau}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$，$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v$ 是一个代数量，于是得

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{\tau}=v\boldsymbol{\tau} \quad (1\text{-}10)$$

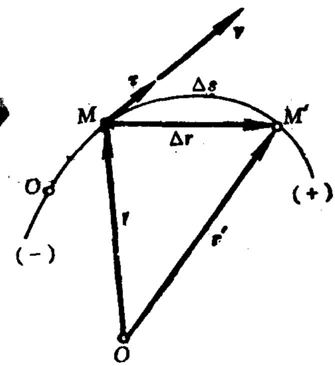

图 1-9

上式表明，动点速度的大小等于弧坐标对时间的一阶导数的绝对值，速度的方向沿轨迹的切线，$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ 为正值时，指向与 $\boldsymbol{\tau}$ 相同，$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ 为负值时，指向与 $\boldsymbol{\tau}$ 相反。

三、加速度的自然表示法

将式(1-10)代入式(1-5)即得

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\boldsymbol{\tau})=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} \qquad (1\text{-}11)$$

下面对上式右端的两个分量进行分析：

1. 切向加速度

式(1-11)中矢量 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}$反映速度大小的变化，它是加速度 $\boldsymbol{a}$ 沿轨迹切线方向的分矢量，故称切向加速度，以 $\boldsymbol{a}_\tau$ 表示，即

$$\boldsymbol{a}_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} \qquad (1\text{-}12)$$

式中 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=a_\tau$，是一个代数量，当 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}>0$ 时，切向加

速度与 $\boldsymbol{\tau}$ 的指向一致;反之,则朝负向。

2. 法向加速度

式(1-11)中矢量 $v\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$ 反映速度方向的变化，它是加速度 $\boldsymbol{a}$ 沿轨迹法线方向的一个分量，故称法向加速度,以 $\boldsymbol{a}_n$ 表示。为了研究 $\boldsymbol{a}_n$ 的大小和方向,由图(1-10)可知

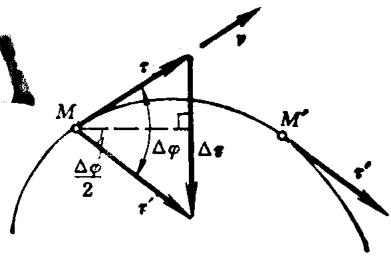

图 1-10

$$\Delta\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}$$

当夹角 $\Delta\varphi$ 很小时，由几何关系可知 $\Delta\boldsymbol{\tau}$ 的大小为

$$|\Delta\boldsymbol{\tau}|=2|\boldsymbol{\tau}|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\approx|\boldsymbol{\tau}|\Delta\varphi=\Delta\varphi$$

引入弧坐标的改变量 Δs 可得

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\cdot\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|$$

由高等数学可知，$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ 是轨迹曲线在 M 点的曲率或曲率半径的倒数，恒为正值即

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{1}{\rho}$$

因此得到

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{|v|}{\rho}$$

$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$ 的方向与 $\Delta\boldsymbol{\tau}$ 的极限方向相同，由几何关系可知 $\Delta\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 的夹角为 $\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)$，当 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta\varphi\to 0$，则 $\Delta\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 的

夹角趋于 $\frac{\pi}{2}$。由此可知，$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$ 与 $\boldsymbol{\tau}$ 垂直，即沿曲线在M点的法线，并指向曲率中心。于是式(1-11)中等号右边第二个矢量可写成

$$\boldsymbol{a}_n = v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} \tag{1-13}$$

式中 $\frac{v^2}{\rho} = a_n$，将式(1-12)和式(1-13)代入式(1-11)，得到

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n = a_\tau\boldsymbol{\tau} + a_n\boldsymbol{n} \tag{1-14}$$

$\boldsymbol{a}$ 称为全加速度，它等于切向加速度和法向加速度的矢量和（图1-11），其大小和方向由下式确定：

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{|a_\tau|}{a_n} \end{aligned}\right\} \tag{1-15}$$

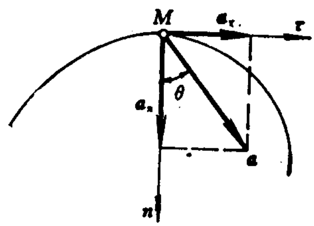

图 1-11

应当注意，切向加速度的正负号只说明了切向加速度的方向，而不能说明动点作加速、还是减速运动。只有切向加速度 a_τ 和速度 v 的正负一致时，动点才作加速运动；反之则动点作减速运动。

当动点作匀加速曲线运动，即 a_τ 为常量，且 $t=0$ 时，速度为 v_0，弧坐标为 s_0，由积分可得

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + a_\tau t \\ s &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2 \\ v^2 - v_0^2 &= 2a_\tau(s - s_0) \end{aligned}\right\} \tag{1-16}$$

例 1-3 半径为 r 的圆轮可绕水平轴O转动，轮缘绕一绳索，绳的下端悬挂一重物 A，如图 1-12 所示。设重物按 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 的规律下落，其中 g 为常量。求轮缘上一点M的速度与加速度。

解 M点的轨迹是一半径为 r 的圆周。设重物在位置 A_0 时 M的位置在 M_0，以 M_0 为原点，则弧坐标