



面向 21 世纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

流 体 力 学

(第二版) 下 册

周光垌 严宗毅 许世雄 章克本 编著



高 等 教 育 出 版 社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向 21 世纪 课程教材
Textbook Series for 21st Century

流体力学

(第二版) 下册

周光炯 严宗毅 许世雄 章克本 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果,是面向 21 世纪课程教材和普通高等教育“九五”国家级重点教材。全书分上、下两册出版,本书为下册。内容包括:第七章,液体表面波;第八章,粘性不可压缩流体的层流运动;第九章,粘性不可压缩流体的湍流运动;第十章,气体动力学初步;第十一章,传质理论初步。每章后附有实验中的发现,共六篇。书末附有(A)至(K)共十一篇附录。

本书不仅可作为理工科力学、工程热物理、空气动力和地球物理等专业本科生流体力学基础课的教材,而且还可以作为土木、化工、水利、热能、机械和环保等有关专业研究生流体力学课的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

流体力学.下册/周光炯等编著.—2 版.—北京:
高等教育出版社,2000(2001 重印)

ISBN 7-04-007889-9

I. 流… II. 周… III. 流体力学 IV. 035

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 56378 号

流体力学(第二版)下册

周光炯 严宗毅 许世雄 章克本 编著

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

电 话 010-64054588

传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 国防工业出版社印刷厂

开 本 787×960 1/16

印 张 29

字 数 540 000

版 次 1993 年 1 月第 1 版

2000 年 6 月第 2 版

印 次 2001 年 6 月第 2 次印刷

定 价 24.30 元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等
质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

责任编辑	邵 勇
封面设计	张 楠
责任绘图	李维平
版式设计	史新薇
责任校对	俞声佳
责任印制	杨 明



面向 21 世纪课程教材



普通高等教育“九五”
国家教委重点教材

下 册 目 录

上册目录	1
第七章 液体表面波	1
7.1 基本方程组、边界条件及初始条件	2
(一) 基本方程	2
(二) 边界条件	3
(三) 初始条件	5
7.2 量级估计与线性近似	6
7.3 平面小振幅简谐进行波	8
7.4 驻波、波的反射	13
7.5 有限等深度液体中的波动	16
(一) 有限等深度液体中的进行波	16
(二) 有限等深度液体中的驻波	17
(三) 浅水情况	18
7.6 界面波	20
(一) 基本方程及边界条件	20
(二) 求解	21
(三) 讨论	23
7.7 群速度	24
7.8 波动的能量、波阻	27
(一) 波动的动能	27
(二) 波动的势能	28
(三) 能量的传递	28
(四) 波阻	30
7.9 初始扰动引起的波动	30
* 7.10 斯托克斯波简介	31
7.11 浅水长波	35
(一) 浅水波方程	36
(二) 线性长波解	37
(三) KdV 方程及孤立波	38

7.12 水波对竖桩的作用	41
(一) 莫里森公式	41
(二) 应用举例	43
小结	44
* 实验中的发现	45
(十一) 孤立波	45
习题	46
第八章 粘性不可压缩流体的层流运动	49
8.1 粘性不可压缩流动的基本方程组	49
8.2 相似律	55
8.3 粘性流动的一般性质	63
(一) 粘性流体运动的有旋性	63
(二) 粘性流体运动机械能的耗散性	65
(三) 粘性流体运动中涡旋的扩散性	66
8.4 粘性流体的流动图案	68
8.5 层流流动的精确解	73
(一) 两平行平板间的粘性流动	74
(二) 无限长直圆管中的粘性流动	78
* (三) 平板在自身平面内振动所引起的流动	84
8.6 低雷诺数流动	86
(一) 斯托克斯流动	87
(二) 斯托克斯阻力公式	88
(三) 斯托克斯近似的局限性和奥森近似	93
(四) 润滑理论	95
8.7 边界层的概念和它的厚度	98
(一) 位移厚度	99
(二) 动量厚度	100
(三) 温度与浓度边界层的名义厚度	101
8.8 平面层流速度与温度边界层方程组	102
8.9 动量与热量之间的雷诺类比	107
8.10 相似性解的概念和它的存在条件	109
8.11 沿半无穷加热恒温平板的层流速度与温度边界层	114
(一) 速度边界层	116
(二) 温度边界层	122
8.12 垂直半无穷加热恒温平板层流自由对流的速度与温度边界层	128
8.13 不存在相似性解的层流边界层	133
8.14 定常平面层流边界层的动量与能量积分关系式	135
(一) 动量积分关系式	136

(二) 能量积分关系式	139
小结	140
* 实验中的发现	141
(十二) 流体的粘性剪应力	141
(十三) 雷诺数	143
习题	144
第九章 粘性不可压缩流体的湍流运动	152
9.1 层流运动的稳定性和它向湍流运动的过渡	152
9.2 湍流运动的雷诺方程组	157
9.3 混合长理论	161
* 9.4 湍流的统计理论和模式理论简介	166
(一) 湍流统计理论	166
(二) 湍流模式理论	168
(三) 湍流的高级数值模拟	171
(四) 湍流实验研究	172
9.5 光滑圆管中的湍流运动	172
9.6 粗糙圆管中的湍流运动	179
9.7 平面湍流速度与温度边界层方程组	186
9.8 平面湍流速度边界层的多层模型和它的时均速度分布	189
9.9 平面湍流速度边界层内一些重要湍流特性的实验结果	191
(一) 相对湍流度	191
(二) 雷诺应力	193
(三) 湍流(或涡)动量扩散率(或系数) ν'	193
(四) 间歇因子	194
(五) 拟序运动	195
9.10 沿半无穷加热恒温平板的湍流速度与温度边界层	197
(一) 速度边界层	198
(二) 温度边界层	202
9.11 平面湍流速度与温度边界层的连续壁律模型	204
9.12 沿半无穷平板的层流-湍流组合边界层	207
(一) 普朗特法	208
(二) 朱考斯卡斯法	209
9.13 层流边界层的稳定性和它向湍流边界层的过渡	210
9.14 边界层的分离	218
* 9.15 自由湍流和它的一些性质	223
* 9.16 平面湍射流	226
小结	230
* 实验中的发现	231
(十四) 湍剪切流的拟序结构	231

习题	232
第十章 气体动力学初步	236
10.1 无粘性可压缩流体运动方程组	236
10.2 小扰动在可压缩流体中的传播声速和马赫数	238
(一) 小扰动在可压缩流体中的传播和声速	238
(二) 马赫数	242
10.3 伯努利方程和气体动力学函数	243
(一) 无粘性可压缩流体定常等熵流动的伯努利方程	243
(二) 气体动力学函数(一维等熵关系式)	245
(三) 速度系数 λ	249
10.4 一维定常等熵管流	251
(一) 变截面管道内流动分析	252
(二) 管截面积和流动马赫数的关系	254
(三) 流量函数	255
10.5 正激波	257
(一) 激波现象	257
(二) 正激波基本方程组	259
(三) 静止正激波	259
* (四) 运动正激波	263
10.6 拉瓦尔喷管内的流动	268
小结	271
* 实验中的发现	272
(十五) 声障现象	272
(十六) 激波	273
习题	274
第十一章 传质理论初步	278
11.1 质量传递的基本概念和它的主要传递方式	278
11.2 混合物系统中的浓度、速度和单位面积的质量(或摩尔)流量	280
(一) 浓度	280
(二) 速度	281
(三) 单位面积的质量(或摩尔)流量	281
11.3 菲克第一定律与质量扩散率(或系数)	282
11.4 双组分混合物的连续性方程	283
11.5 扩散方程的应用	288
11.6 湍流扩散方程	295
* 11.7 污染物在大气中的扩散	296
11.8 层流与湍流的浓度边界层方程	298
11.9 热量与质量之间的雷诺类比	300

11.10 沿半无穷平板的层流浓度边界层·····	302
(一) 第一施米特数 $Sc = 1$ ·····	303
(二) 第一施米特数 $Sc \neq 1$ ·····	304
11.11 质量积分关系式·····	306
11.12 沿半无穷平板的湍流浓度边界层·····	307
小结 ·····	309
习题 ·····	310
回顾与展望 ·····	312
(一) 回顾 ·····	312
(二) 展望 ·····	321
结束语 ·····	327
附录 ·····	328
(A) 参考书、参考文献、照片和关于配套教学光盘的说明 ·····	328
(B) 符号表 ·····	344
(C) 国际单位(SI)制 ·····	352
(D) 某些常见流体的热物理性质 ·····	353
(E) 正交曲线坐标系中的流体力学运动方程组 ·····	364
(F) 矢量与张量分析初步 ·····	377
(G) 热力学基础知识 ·····	389
(H) 流体力学中的数值方法简介 ·····	393
(I) 中英文术语对照表 ·····	398
(J) 中英文人名对照表 ·····	419
(K) 习题答案 ·····	428

第七章 液体表面波

处于平衡状态的流体,当它的某部分受到某种扰动时,平衡便遭到破坏,在重力或其它恢复力的作用下,使扰动在流体中传播,形成一种波动现象.

例如,扰动静止水面使之产生一坑洼(图 7.1),由于坑洼处 A 点的压强与同一高度近傍流体 B、C 点的静压强有差异(坑洼处压强较小),产生压强梯度,使 B、C 处的水向坑洼 A 处运动,这一方面使 A 处水得到补充,坑洼缩小,同



图 7.1 扰动的传播

时由于惯性作用 A 处水面恢复到平衡位置后仍继续向上运动;另一方面,B、C 处的水流走后,将造成该处水的空缺,又由 B、C 处水面下降来填补.这样,原先 A 处的坑洼变为 A 处水面的升高和近傍 B、C 处水面的下降.这一过程的产生和继续发展,形成了扰动在水面的传播,即水波.显然,在这里,重力起到了恢复力的作用,这种水波称重力波.

波动现象极为多见,风吹过水面形成风浪,船行进于水面产生船波,海水的潮汐涨落是潮波,海底地震引起的海浪称为海啸,等等.此外,空气和水中的声波,水面的涟漪也都是些流体波动现象.

水波与人们关系非常密切.因风暴及地震产生的巨浪是造成灾害的重要来源.1883 年印度尼西亚巽他海峡喀拉喀托火山爆发,引起海啸,波高达 35 m,死亡 36 140 人.此海啸诱发的波波及到毛利求斯岛、开普敦、夏威夷、旧金山等地.1960 年智利发生 8.4 级地震,智利沿岸最大波高 20~25 m,死 909 人.此海啸经太平洋传至日本,波高仍达 5~6 m,并造成 120 人死亡.1970 年 11 月孟加拉湾沿岸地区一次飓风风暴潮,最大增水超过 6 m,导致 20 余万人死亡和 100 万人无家可归.

此外,海浪的破坏力大得惊人.据记载,巨浪曾把 1 370 吨重的混凝土块推动了十多米;万吨级油轮被推上岸.

根据作用于流体上的恢复力为弹性力、重力、表面张力或科氏力,将流体中的波分为声波、重力波、毛细波(表面张力波)、惯性波及罗斯比波.

海洋中有各类波动,表 7.1 是海洋中的各类波动特征.

液体表面波包括重力波及毛细波,它们在自然界最为常见,同时又最多变

化、内容最为丰富。本章主要介绍这种波动。

表 7.1 海洋中的各种波动

波动类型	物理机制	典型周期	存在区域
声波	可压缩性	$10^{-2} \sim 10^{-3} \text{ s}$	海洋内部
毛细波	表面张力	$< 10^{-1} \text{ s}$	气水交界面
风浪涌浪	重力	$1 \sim 25 \text{ s}$	同上
地震津波	重力	$10 \text{ min} \sim 2 \text{ h}$	同上
内波	重力和密度分层	$2 \text{ min} \sim 10 \text{ h}$	密度跃层
风暴潮	重力和地球自转	$1 \sim 10 \text{ h}$	海岸线水域
潮波	同上	$12 \sim 24 \text{ h}$	整个大洋层
行星波	重力、地球自转纬度 或海洋深度变化	100 天	同上

本章 7.1 节介绍液体波动基本方程组、初始条件及边界条件, 7.2 节介绍量级估计及线性近似, 使方程组简化。7.3 以后各节分别介绍各种线性波动和它们的特征, 其中包括表面小振幅的深水波、浅水波、界面波, 长波, 这些是学习其它波动理论的基础。7.10、7.11 节简要介绍两种非线性波: 斯托克斯波及孤立波。7.12 节介绍表面波动理论在工程问题中的一个应用。

7.1 基本方程组、边界条件及初始条件

在讨论液体波动时, 根据液体的物理性质、波动特征及它所处的环境, 对所考虑的问题, 作适当的简化, 以期获得较好的近似, 现作如下几点假定:

(1) 液体被认为是无粘性的。计算表明, 考虑粘性后波动振幅将乘以因子 $\exp(-2\nu k^2 t)$, 其中 ν 为分子运动粘性系数, k 为波数, t 为时间。依该式, 设取 $\nu = 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$, 波长 $\lambda = 2\pi/k = 1.8 \text{ cm}$ 的毛细波振幅衰减 $1/e$ 只需 4s , 而 $\lambda = 1\text{m}$ 的重力波需 3.5h 。这表明粘性对重力波的影响可以忽略。

(2) 液体是不可压缩的, 密度 ρ 被认为是常数。

(3) 质量力只有重力。

(4) 液体运动是无旋的。根据亥姆霍兹定理, 无粘性不可压缩流体在重力(有势力)作用下, 从静止开始的任何运动, 都将是无旋运动。

这样, 本章研究的只是无粘性不可压缩液体在重力作用下的无旋运动。

(一) 基本方程

设波动在某一具有自由表面的液体区域中产生, 取无波动时的静止液面为坐标系的 Oxy 平面, z 轴向上, 自由面升高为 $z = \zeta$, 液体深度为 $-d(x, y)$ 。

由于液体是不可压缩的,连续性方程为

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

同时,无旋流动存在速度势 φ , 且 $\boldsymbol{v} = \nabla \varphi$, 将此代入上式后,连续性方程变为拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (7.1.1)$$

再由假定(1)~(4),流动满足拉格朗日积分

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t). \quad (7.1.2)$$

这样,如果从式(7.1.1)解出速度势 φ , 并由 φ 得速度 $\boldsymbol{v}$, 将它们代入式(7.1.2), 即可确定压强 p , 问题便得到解决.

不失一般性, (7.1.2) 式中的积分常数 $f(t)$, 可取为零. 事实上, 作变换

$$\varphi_1 = \varphi - \int_0^t f(t) dt$$

即可将 f 纳入 φ_1 中, φ_1 仍满足拉普拉斯方程, 而(7.1.2)式之 f 已纳入左端第一项中, 因此可将(7.1.1)及(7.1.2)式写为

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad (7.1.3)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = 0. \quad (7.1.4)$$

后面研究液体表面波动时, 将主要从(7.1.3)和(7.1.4)出发(以后应用时 φ_1 将写为 φ). 数学上对拉普拉斯方程求解比较简单, 从而可以避开了求解原始的运动方程和连续性方程.

(二) 边界条件

波动液体的边界, 一般包括随时间而变化的自由表面和固定不动的底部(有时还有侧向边界). 对于固定不动的底部, 由拉普拉斯方程求解速度势只需一个运动学边界条件. 但在自由表面上, 其边界条件却不只是提一个运动学边界条件. 因为在问题未求解之前, 自由表面的位置未定, 因此还须提一个条件, 以同时确定自由面位置及速度势 φ . 这个边界条件就是动力学边界条件. 下面分别给出底部的运动学边界条件和自由表面的运动学和动力学边界条件.

1. 底部的运动学边界条件

在固定不动的底部边界上, 液体质点可沿边界面运动(无粘性假设). 设边界面为 $F(x, y, z) = 0$, 则由第 3.9 节 $DF/Dt = 0$, 边界条件为

$$u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (7.1.5)$$

(请注意, 这里的 v 是分量, 一般与 u 和 w 一起出现; (7.1.4) 中也有 v , 但与分

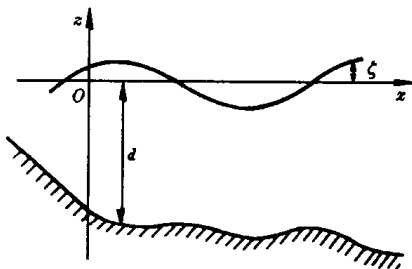


图 7.2 波动坐标系

量 v 的含义不同. 后面出现的 v 也有类似情况.) 现底部由 $z = -d(x, y)$ 给出, 即底部边界面为 $F = z + d(x, y) = 0$. 将此代入式(7.1.5), 在 $z = -d(x, y)$ 上得

$$u \Big|_{z=-d} \frac{\partial d}{\partial x} + v \Big|_{z=-d} \frac{\partial d}{\partial y} + w \Big|_{z=-d} = 0$$

或

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-d} = w \Big|_{z=-d} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{z=-d} \frac{\partial d}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{z=-d} \frac{\partial d}{\partial y}. \quad (7.1.6)$$

这是液体底部的运动学边界条件.

显然, 在底为等深即 $d(x, y) = \text{常数}$ 的情况下, 有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-d} = 0. \quad (7.1.7)$$

2. 自由面上的运动学边界条件

设自由面为 $z = \zeta(x, y, t)$, 则 $F(x, y, z, t) = z - \zeta$, 由第 3.9 节运动学边界条件 $DF/Dt = 0$, 有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \\ &= - \frac{\partial \zeta}{\partial t} - u \Big|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v \Big|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \Big|_{z=\zeta} = 0 \end{aligned}$$

或

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} = w \Big|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \Big|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \Big|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (7.1.8)$$

这是自由面上的运动学边界条件.

3. 自由面上的动力学边界条件

动力学边界条件是指边界上压强的条件. 如不考虑表面张力, 则自由表面两侧的压强必须相等. 设作用于自由面上的外界大气压为 $p_a(x, y, t)$, 液体的压强为 p , 则

$$p|_{z=\zeta} = p_a, \quad (7.1.9)$$

将之代入式(7.1.4), 应有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} + \frac{v^2}{2} \Big|_{z=\zeta} + \frac{p_a}{\rho} + g\zeta = 0. \quad (7.1.10)$$

这是无表面张力时的自由表面的动力学边界条件.

如果考虑表面张力, 则自由面两侧压强不相等, 差一个附加压强(式(1.1.17)), 即有

$$p = p_a + \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (7.1.11)$$

其中 σ 为表面张力系数. 现设波动为一维, $R_2 = \infty$, $\frac{1}{R_1} = -\zeta''/(1+\zeta'^2)^{3/2}$. 由于以后要讨论的是 $\zeta' = \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ 为小量的情况, 故(7.1.11)式取形式

$$p = p_a - \sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \quad (7.1.12)$$

将此式代入(7.1.4)式, 得

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=\zeta} + \left. \frac{v^2}{2} \right|_{z=\zeta} + \frac{p_a}{\rho} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + g\zeta = 0. \quad (7.1.13)$$

这是有表面张力时的自由表面的动力学边界条件.

(三) 初始条件

液体表面波动是由初始扰动引起的, 例如, 开始时在静止水面上插入一块木块, 然后将木块突然抽出. 或者开始时将一木棒拍打水面, 这两种情形都将使水面产生波动. 这两种情形都是一种初始扰动引起的. 对前一种, 是初始有一液面位移

$$\zeta(x, y, t)|_{t=0} = f_1(x, y).$$

将此式代入式(7.1.10), 且注意到初始时刻有 $v=0$, 就有

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{\substack{z=\zeta \\ t=0}} + \left. \frac{p_a}{\rho} \right|_{t=0} &= -g\zeta \Big|_{t=0} \\ &= -gf_1(x, y) = f(x, y). \end{aligned} \quad (7.1.14)$$

这是自由面有初始位移时的初始条件.

对后一种, 是初始时刻液面突然受到一个压强冲量, 于是液体将受作用而产生初速度. 设冲量的作用在 $[0, \tau]$ 时间内发生, 这样, 由欧拉方程

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F}_b - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

对 t 积分, τ 时刻的液体速度可由下式给出:

$$\mathbf{v} = \int_0^\tau \mathbf{F}_b dt - \frac{1}{\rho} \nabla \int_0^\tau p dt - \int_0^\tau (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} dt$$

其中 $\int_0^\tau p dt = \pi$ (为一函数, 不要与圆周率混淆) 称压强冲量, 为一有限量; 而当 F 及 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ 为一有限量时, 积分后就为一小量 (τ 为小量), 故可略去, 于是

$$\mathbf{v} = \nabla \left(-\frac{1}{\rho} \int_0^\tau p dt \right) = \nabla \left(-\frac{\pi}{\rho} \right). \quad (7.1.15)$$

这表明, 自由面上的液体质点在受到冲量后将得到一个初始速度, 该速度有势, 即运动是无旋的, 其速度势

$$\varphi \Big|_{\substack{t=0 \\ z=\zeta}} = -\frac{\pi(x, y, \zeta)}{\rho} = g(x, y, \zeta). \quad (7.1.16)$$

这是自由面有初始速度时的初始条件。

当然,对初始位移和初始速度同时存在的情况,只要同时列出(7.1.14)和(7.1.16)两个条件就可以了。

归纳基本方程(7.1.3)、(7.1.4)、边界条件(7.1.6)、(7.1.8)、(7.1.10)和初始条件(7.1.14)、(7.1.16),得到无表面张力时重力波问题的数学提法为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = 0: \quad [-d(x, y) \leq z \leq \zeta(x, y, t)], \\ z = -d: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-d} = -\frac{\partial d}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{z=-d} - \frac{\partial d}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{z=-d}, \\ z = \zeta: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{z=\zeta} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{z=\zeta}, \\ \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} + \frac{v^2}{2} \Big|_{z=\zeta} + \frac{p_a}{\rho} + g\zeta = 0, \\ t = 0: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{\substack{t=0 \\ z=\zeta}} = f(x, y), \\ \quad \varphi \Big|_{\substack{t=0 \\ z=\zeta}} = g(x, y, \zeta), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = 0: \quad [-d(x, y) \leq z \leq \zeta(x, y, t)]. \end{array} \right. \quad (7.1.17)$$

7.2 量级估计与线性近似

要严格求解上节所提出的带有边界条件和初始条件的问题(7.1.17)是困难的。即使把问题进一步简化为二维、平底(等深度)、无表面张力等,还有两个难以克服的困难,一是自由面上的边界条件(7.1.8)、(7.1.10)是非线性的;二是自由面边界本身是待求的,即求解域本身就是未知的,因此必须根据波动的特征作进一步的简化。

一种简化是当波动的振幅相对于波长为小量,由此可使自由面边界条件线性化,获得小振幅波解;另一种简化是当液体深度相对于波长为小量,由此可使问题变为可解的非线性情形或线性情形,获得浅水长波解。本书主要介绍与小振幅波有关的问题,后一问题也将在 7.11 中提到。

以下用量级估计的方法分析问题(7.1.17)中各项的量级,使问题线性化。

设波幅 A 为自由面升高 ζ 的特征量,波长 λ 为波动水平方向的长度特征量,液体深度 D 为垂向长度特征量,波动周期 T 为时间的特征量,这样,速度

u, v, w 的特征量为 A/T , 速度势 φ 的特征量为 $A\lambda/T$, 再设压强的特征量为 P . 于是, 可将各物理量写为特征量与无量纲量的乘积:

$$\begin{aligned}\zeta &= A\zeta', \\ x, y, z &= \lambda(x', y', z'), \\ t &= Tt', \\ u, v, w &= \frac{A}{T}(u', v', w'), \\ \varphi &= \frac{A\lambda}{T}\varphi', \\ p &= Pp', \\ d &= Dd'.\end{aligned}\tag{7.2.1}$$

其中带上标“'”的量为无量纲量. 将上述各量代入问题(7.1.17)的第一、三、四、七各式后得

$$\left\{\begin{aligned}\frac{A}{T\lambda} \nabla^2 \varphi' &= 0, \quad -Dd' \leq \lambda z' \leq A\zeta', \\ \frac{A}{T} w' &= \frac{A}{T} \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + \frac{A^2}{T\lambda} \left(u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} \right), \quad \lambda z' = A\zeta', \\ \frac{A\lambda}{T^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} + \frac{A^2}{T^2} \frac{v'^2}{2} + \frac{Pp'_a}{\rho} + Ag\zeta' &= 0, \quad \lambda z' = A\zeta', \\ \frac{A\lambda}{T^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} + \frac{A^2}{T^2} \frac{v'^2}{2} + \frac{Pp'}{\rho} + \lambda g z' &= 0, \quad -Dd' \leq \lambda z' \leq A\zeta'.$$

或

$$\left\{\begin{aligned}\nabla^2 \varphi' &= 0, \quad -\frac{D}{\lambda} d' \leq z' \leq \frac{A}{\lambda} \zeta', \\ w' &= \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + \frac{A}{\lambda} \left(u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} \right), \quad z' = \frac{A}{\lambda} \zeta', \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} + \frac{A}{\lambda} \frac{v'^2}{2} + \frac{PT^2}{A\lambda\rho} p'_a + \frac{gT^2}{\lambda} \zeta' &= 0, \quad z' = \frac{A}{\lambda} \zeta', \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} + \frac{A}{\lambda} \frac{v'^2}{2} + \frac{PT^2}{A\lambda\rho} p' + \frac{T^2}{A} g z' &= 0, \quad -\frac{D}{\lambda} d' \leq z' \leq \frac{A}{\lambda} \zeta'.$$

若在上式中取小振幅假设

$$\frac{A}{\lambda} \ll 1.\tag{7.2.3}$$