欧维义 陈维钧 编

线性代数

（修订版）

吉林大学出版社

线 性 代 数

（修订版）

欧维义 陈维钧 编

责任编辑、责任校对：赵洪波 封面设计：孙 群

吉林大学出版社出版 吉林大学出版社发行
（长春市解放大路 125 号） 吉林大学印刷厂印刷

开本：850×1168 毫米 1/32 2000 年 9 月第 3 版
印张：13 2001 年 8 月第 2 次印刷
字数：313 千字 印数：23 951—28 950 册

ISBN7—5601—2427—5/O・266 定价：19.00 元

第三版　序

本套书于1986年正式出版，在1994年再版时对内容和习题做了部分修改和精简．近几年又不断收集了使用者对本书的意见和建议．在今年5月初，出版社特邀了多位使用本书的主讲教师座谈，进一步听取大家对再版的具体修改意见．由于时间很紧，这次再版也只能做些修改工作，旨在满足本校及兄弟院校教学之急需．

本套书修订后的内容安排：第一册讲一元微积分；第二册讲空间解析几何和多元微积分；第三册讲场论、无穷级数和常微分方程；第四册已独立成书，书名为线性代数．书中各节配有习题，一般分为A、B两类：A类为基本题，B类为中、高档题．

当今，教学改革正在深入发展，呼唤出版一些具有创新思路的新教材，以适应新世纪培养人才的要求．一本好教材如同一件宝物，可藏之名山，也能传之久远．本书几经修订出版诚望能抛砖引玉．

最后，要感谢在这次修订中提出宝贵意见并参加工作的胡成栋教授、尹景学教授、姜诗章教授、姜杰教授和袁洪君教授等．特别要感谢吉林大学出版社的副总编卢喜观先生对本书再版的关心和支持．

编　者

2000年8月于长春

第一版　序

线性代数在理科各专业课程中被广泛地应用，是理科学生从事专业学习和科学研究的重要基础．因此线性代数课程在理科各专业中有重要地位．为了使理科学生有比较广泛、比较深入的线性代数知识和得到较好的训练，遵循少而精和重视基本方法、基础理论的原则，我们对原高等数学第四册进行了较大删减和修定．修定后的教材更集中地体现了线性代数中“行列与方程组；矩阵在各种变换下的标准形太其应用；线性空间与内积空间”的内容，有利于学生由易到难、循序渐近地学好线性代数．

本书的教学时数约 54 学时．方阵的 Jordan 标准形一章，是供某些专业选用的．同原教材相比，修定后的教材虽有明显提高，但由于水平所限，错误和不妥之处在所难免，敬请读者不吝指出．

编　　者

1986 年 4 月于吉林大学

目　录

第一章　行列式

行列式的概念是线性代数中的基本概念之一，行列式的计算是线性代数中最基本的计算．行列式不仅是线性代数、数学各个领域的一个重要工具，而且也是其他自然科学、工程技术各个领域中的重要工具．

本章的主要内容是以 n 阶行列式的定义为基础，讨论 n 阶行列式的性质及其简便算法，并据此把求解二元、三元线性方程组的 Cramer(克莱姆)公式推广到 n 元线性方程组的情形．

本章的重点是熟练地掌握行列式的算法和正确地使用 Cramer 公式．

§1　n 阶行列式

1.1　数域

我们知道在涉及与数有关的问题中，常常需要明确规定所考虑的数的范围．比如，一个二次方程 $x^2+px+q=0$，有没有解就与未知量所允许的取值范围有关．又如，任意两个整数的商不一定是整数，这就是说，限制在整数的范围内，除法不是普遍可以做的，而在有理数范围内，只要除数不为零，除法总是可以做的．

在线性代数中，为了强调数的取值范围，需要引进数域的概念．

数域的定义　设 P 是一些数组成的集合，其中包括 0 和

1. 如果对于 P 中任意两个数(这两个数也可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍然是 P 中的数，则称 P 为一个**数域**.

如果数集 P 中任意两个数作某一运算的结果都仍在 P 中，我们就说数集 P 对这个运算是**封闭的**. 因此，数域的定义也可以说成，如果一个包含 0, 1 在内的数集 P 对于加法、减法、乘法与除法(除数不为 0)是封闭的，那么就称 P 为一个数域.

显然，全体有理数组成的集合、全体实数组成的集合、全体复数组成的集合都是数域. 这三个数域我们分别用字母 Q、R、K 来代表. 全体整数组成的集合不是数域，因为不是任意两个整数的商都是整数. 但是数域这一概念所包含的数系远不只有有理数域、实数域和复数域. 事实上，数域是无穷多的. 比如，当 α，β 为有理数时，容易验证，所有形如 $\alpha+\beta\sqrt{2}$的数构成的数集，就是一个数域. 照这样我们可以举出任意多个数域的例子,并且有理数域是其中最小的，即任一数域 P 都包含有理数域. 事实上，由定义 P 含有 1，根据 P 对加法的封闭性知，$1+1=2$，$2+1=3$，…，$n+1=n+1$，…全在 P 中，换句话说，P 包含全体自然数. 再由 P 对减法的封闭性知，$0-n=-n$ 也在P 中，因而 P 包含全体整数. 任何一个有理数都可以表成两个整数的商，由 P 对除法的封闭性，就知有理数包含在 P 中.

在本课程中讨论问题时，对数的运算常常只是四则运算，故可以认为在所讨论问题中，涉及的数总是属于某一数域.

1.2 二阶、三阶行列式的构成

在中学代数里，我们已经知道二阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.1}$$

三阶行列式

$$
D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} \\
&\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33} \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

都是一个数(如果没有特别说明，我们所说的数，通常指实数).

要知道怎样来推广行列式的概念，就应当去研究 D_1，D_2 的展开式(即(1.1)式、(1.2)式右端)中的数是怎样构成的.

往下我们把行列式中横写的叫做行(row)，竖写的叫列(column)；行列式中的每一个数叫做行列式的**元素**，用 a_{ij}来表示第 i 行第 j 列上的元素；行列式中从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为行列式的**次对角线**.

下面我们来看 D_2 的展开式(1.2)的结构.

均匀分布组 从(1.2)式右端的展开式可以看出，其中的每一项都是三个元素的乘积，这三个元素的行标不同，列标不同. 即这三个元素刚好是取自不同行、不同列的元素. 具有这种性质的三个元素，我们称它为 D_2 的一个均匀分布组，采用这种说法即知，D_2 的展开式(即(1.2)式的右端)中的每一项，都是 D_2 的一个均匀分布组的乘积.

均匀分布组的数目 根据均匀分布组的概念可知，D_2 的展开式中的任何一项都可以写成乘积

$$
a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}
$$

的形式，这里 i_1，i_2，i_3 表示各元素所在的列数.

显然 i_1 可取 1, 2, 3 中的任何一个，因此有三种取法. 取定 i_1 后，i_2 只有两种取法；取定 i_2 后，i_3 后有一种取法，于是行列式 D_2 的展开式中共有 $3\cdot2\cdot1 = 3! = 6$ 个均匀分布组的乘

积. 所以(1.2)式的右端包含 6 项.

每项的符号　在 D_2 的展开式中, 有的乘积前面是正号, 有的乘积前面是负号. 试问每项的符号应根据什么来确定? 在回答这个问题之前, 先叙述**奇偶排列**的概念.

在 n 个自然数 1, 2, …, n 的一个排列

$$i_1\ i_2 \cdots i_n$$

中的两个数, 如果排在前面的数大于排在后面的数, 则说它们是逆序的(也说它们是反序的).

现将一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序次数的总和(称为**反序数**)记成 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$, 如果 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 是奇数, 则称 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是**奇排列**; 如果 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 是偶数, 则称 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是**偶排列**.

比如, 在自然数 1, 2, 3, 4 的一个排列

$$4\quad 2\quad 3\quad 1$$

中, 1 和它前面的三个数都是逆序的, 2 和它前面的 4 是逆序的, 3 和它前面的 4 是逆序的, 于是

$$\tau(4\,2\,3\,1) = 3 + 1 + 1 = 5$$

所以 4 2 3 1 是一奇排列.

实际分析表明: 在均匀分布组 $a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3}$ 的行标按自然顺序排列的前提下, 若列标构成的排列是奇排列, 则分布组的乘积前面是负号; 若列标构成的排列的偶排列, 则分布组的乘积前面是正号. 即 D_2 中的每个均匀分布组, 在 D_2 的展开式中给出项

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3)} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3}$$

若用记号 $\sum\limits_{i_1 i_2 i_3}$ 表示对 1, 2, 3 的所有排列求和, 则依据上面的讨论知, (1.2)式可以改写成

$$D_2 = \sum_{i_1 i_2 i_3} (-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3)} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} \tag{1.3}$$

实际分析还可知道, 若把 D_2 的每一个均匀分布组的乘积

$a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$，按列标的自然顺序改写成

$$a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3} = a_{q_1 1}a_{q_2 2}a_{q_3 3}$$

则有

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3)}a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3} = (-1)^{\tau(q_1 q_2 q_3)}a_{q_1 1}a_{q_2 2}a_{q_3 3}$$

因此，(1.2)式又可以写成

$$D_2 = \sum_{q_1 q_2 q_3}(-1)^{\tau(q_1 q_2 q_3)}a_{q_1 1}a_{q_2 2}a_{q_3 3} \tag{1.4}$$

每个均匀分布组乘积的符号，也可以这样来确定：逐次互换两行或两列，如果经过偶次互换恰好使该均匀分布组的元素移到新行列式的主对角线上，则该均匀分布组所决定的乘积项取正号；如果经过奇次互换，恰好使均匀分布组的元素移到新行列式的主对角线上，则该均匀分布组所确定的乘积项取负号．

比如，要看均匀分布组 $a_{21}a_{32}a_{13}$所确定的项的符号．由

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

可以看出，第一列和第二列交换之后，再交换(经过第一次交换后的)新行列式的第一列和第三列，原来的 D_2 就变成

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

这时均匀分布组 $a_{21}a_{32}a_{13}$的每个元素都位于新行列式的主对角线上．这里我们只进行了两次列交换，即经过偶次行列互换，恰好把 $a_{21}a_{32}a_{13}$移到主对角线上，故它确定的项取正号，即乘积 $a_{21}a_{32}a_{13}$就是(1.2)式右端中的一项．

当然要使这种确定符号的方法有意义，必须证明：把每一均匀分布组 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$移至新行列式的主对角线所需行列互换

次数的奇偶性与互换的具体方法无关. 关于这一结论的证明, 可参看武汉大学数学系数学专业编《线性代数》(修订本)(人民教育出版社(1983 年)). 在理论上还可以证明, 采用上述两种方法确定的每项的符号是一致的.

到此, 我们就完全弄清楚了三阶行列式的结构. 容易验证, 二阶行列式也是这样构成的, 以此为模型我们来定义 n 阶行列式.

1.3 n 阶行列式

定义 1.1 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$作成的 n 行 n 列的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 它表示数

$$\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \tag{1.5}$$

其中 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$是 n 阶行列式的均匀分布组的乘积(因此 $i_1i_2\cdots i_n$ 是自然数 1, 2, …, n 的一个排列), $\sum$ 是对 1, 2, …, n 的所有排列 $i_1\ i_2\cdots i_n$ 求和. 因此, 项数总和为 $n!$. (1.5)式的右端称为该行列式的展开式.

在使用定义 1.1 时，还应当注意：

1. 从§1.1 的讨论知，由均匀分数组 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 所确定的项的符号，也可以依据把 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 的每个元素移到新行列式的主对角线上所需行列互换次数的奇偶性来确定.

2. 可以证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$$

例 1.1 证明对角形行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} a_1 a_2 \cdots a_n$$

在行列式中，上角(下角)的“0”表示该上角(下角)的所有元素都是 0.

证 若记

$$a_{1n} = a_1,\ a_{2,n-1} = a_2,\ \cdots,\ a_{n1} = a_n$$

则行列式 D_1 的所有均匀分布组中，乘积不为零的只有

$$a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\cdots a_{n1} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

此处排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 即 $n(n-1)(n-2)\cdots 321$ 的反序数

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

所以

$$\begin{aligned} D_1 &= (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 1)} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} \\ &= (-1)^{n(n-1)/2} a_1 a_2 \cdots a_n \end{aligned}$$

例 1.2 证明三角形行列式