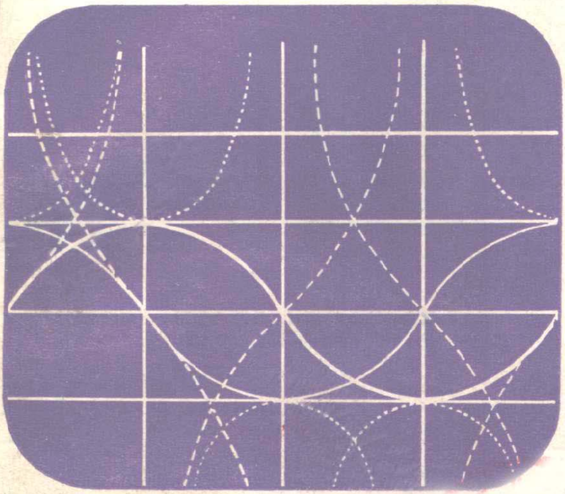

常庚哲

抽屉原则及其他

上海教育出版社

抽屉原则及其他

常 庚 哲

上海教育出版社

抽屉原则及其他

常 庚 哲

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　上海崇明印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 1.875　字数 38,000

1978 年 12 月第 1 版　1978 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—80,000 本

统一书号：7150·1967　定价：0.15 元

前　言

“把 $n+1$ 个或者更多的物体放到 n 个集合之中，那末，至少有一个集合里要放进两个或者更多的物体”，这就是抽屉原则的最简单的形式．抽屉原则又叫重迭原则，虽然它的正确性十分明显，很容易被不具备多少数学知识的人所接受，但是，加以灵活运用，可能得到一些意想不到的结果．各种形式的抽屉原则，在初等数学乃至高等数学中，经常地被采用着．

本书以抽屉原则为主题，着重介绍了它在初等数论中的一些应用．因此，书中不得不引进“初等数论”中的一些基本知识，例如：同余式，用有理数来逼近无理数，不定方程，数的几何等等，但并不对这些作进一步的讨论．作者其所以作出这种安排，是希望读者不单单知道什么是“抽屉原则”——这本来是不难做到的，还能接触到一些在中学数学教材中读不到的内容，以扩大他们的知识面，增强他们学习数学的兴趣．

1978 年 4 月，在全国部分省市中学生数学竞赛举行的前夕，作者曾以《抽屉原则》为题，在安徽省几个城市对中学生作过讲演．本书就是在当时讲稿的基础上扩充而成的．在编写本书第七节佩尔方程的时候，征得严士健同志的同意，吸收了他发表在《数学通报》1957 年第 7 期上的一篇文章的部分内容，特此志谢．冯克勤、单墫、杨劲根和李克正同志给作者提供了一些有趣的例题和习题，单墫同志还详细阅读了第七节的初稿，提出了若干有益的建议，作者对他们表示衷心的感谢！

由于作者水平的限制，错误和不妥之处，恐难避免，切望读者批评指正．

作　者

于 1978 年 7 月

目　录

一、第一堂算术课

新学年开始了.

开学的那一天,红星小学一年级一班第一堂就是算术课.任课的张老师,是一位很有经验、很有水平的老教师.她讲课深入浅出,活泼生动,凡是长期听张老师讲课的同学,总是不知不觉地对数学发生了浓厚的兴趣.

张老师走进课堂,全班同学起立,向这位辛勤的园丁致敬.环视那几十张陌生而可爱的小脸,张老师心里充满了无限的喜悦.她用简单而诚挚的语言向新同学表示祝贺和欢迎,接着说道:"我校今年招收了三百七十名一年级新生,他们都年满六岁但还不到七岁.我说呀,这么多的新同学中间,一定有两个人是同年、同月、同日出生的.小同学们,你们说对不对?"

对于这个新奇的结论,大家感到有趣而又惊讶.同学们低声地互相议论起来了.

"张老师知道我们每一个人的生日了吗?"

"不会的.她今天同我们才头一次见面,连我们的名字恐怕都叫不上来."

"……"

"张老师一定查看过我们的报名登记表了!"

这一句话恰巧被张老师听见了,她笑着说:"我没有看过你们的登记表,而且,完全不必要看这些表,就可以得出这个

结论."

同学们更惊奇了!

张老师接着说:"同学们想想看,把十只苹果放到九个抽屉中去,无论怎么放,这九个抽屉中一定有一个抽屉里放了两只或两只以上的苹果.你们说对吗?"

"对!对!"同学们齐声回答.小朋友所具备的常识,就足以使他们明白:要是每个抽屉中最多只有一只苹果的话,那么九个抽屉至多才装着九个苹果.

"好!我们把一年中的三百六十五天(闰年三百六十六天)的每一天,看成一个抽屉,而把三百七十个新同学中的每一个人看成一只"苹果".按照"苹果"出生的日子,把他们放到对应的抽屉中去.由于"苹果"数目多于"抽屉"数目,就能知道:一定有一个"抽屉"中,至少放着两只"苹果".这就是说,至少有两个同学的生日相同.再根据同学们的年龄的差别不超过一岁,所以,这两个同学一定是同年、同月、同日出生的了."

小朋友们恍然大悟,会心地微笑了.

二、抽屉原则

运用第一节中采用过的推理方法,我们还可以证明如下的更加令人惊讶的结论.

根据常识,一个人的头发的根数不会超过二十万.因此,在一个拥有二十多万人口的城市中,一定有那么两个人,他们的头发的根数相同.

推理方法如下:我们设置二十万零一个"抽屉",并且对

每一个"抽屉"依次标上从 0, 1, 2, 3, … 直到 200000 之中的一个号码. 按各人头上头发的根数归入相应的一个"抽屉", 比如说, 如果张乐平同志画的三毛生活在这个城市, 那么他就被归为标有号码"3"的那个"抽屉"; 我们没有理由排除这个城市中有留着光头的人, 所以必须设置"0"号"抽屉". 由于人的数目多于"抽屉"的数目, 可以断定, 一定至少有两个人与同一"抽屉"相对应, 这两个人自然就有同样多根头发了.

容易看到, 这从本质上来说, 仍然是前节中"十只苹果"和"九个抽屉"的推理方法. 这种推理的正确性, "显然"到了连小学一年级的学生也能完全接受. 如果把这种推理推广到更加一般的形式, 其正确性也完全可以被不具备多少数学知识的人所认识.

怎样把这种推理推广到一般形式呢? 我们来注意以下两点:

1. 如果将"苹果"换成"皮球"、"铅笔"或"数", 同时将"抽屉"相应地换成"袋子"、"文具盒"或"数的集合", 那么仍旧可以得出相同的结论.

这就是说: 推理的正确性与具体的对象没有关系. 我们把一切可以同"苹果"互换的对象称之为"元素", 而把一切可以同"抽屉"互换的对象称之为"集合", 从而得知: 十个元素以任意的方式归入九个集合之中, 那么其中一定有一个集合中至少包含两个元素.

2. "苹果"和"抽屉"的具体数目是无关紧要的, 只要苹果(元素)的个数比抽屉(集合)的个数多, 那么推理照样成立.

于是, 我们就可以把"十只苹果"和"九个抽屉"的推理方法, 推广到下述一般形式:

原则一 把多于 n 个的元素按任一确定的方式分成 n 个

集合，那么一定有一个集合中含有两个或两个以上的元素.

原则一还有以下更加一般的形式：

原则二 把多于 $m\times n$ 个的元素按任一确定的方式分成 n 个集合，那么一定有一个集合中含有 $m+1$ 个或 $m+1$ 个以上的元素.

这是很明显的，因为若每个集合中所含元素的数目均不超过 m，那么这 n 个集合所含元素个数就不会超过 $m\times n$.

原则三 把无穷个元素按任一确定的方式分成有穷个集合，那么至少有一个集合中仍含无穷多个元素.

这也是很显然的，这是因为，如果每个集合中只含有穷多个元素，那么有穷个集合只能包含有穷个元素.

以上三个原则都称为**抽屉原则**. 看上去，它们都是非常简单的. 可是，正是这样一些很简单的原则，在初等数学乃至高等数学中，有着许多应用. 巧妙地运用这些原则，可以很顺利地解决一些看上去相当复杂、甚至觉得简直无从下手的数学题目.

三、一 些 例 子

在本节，我们运用抽屉原则，来证明初等数学中的一些题目.

[例 1] 在边长为 1 的正方形内任意放置五个点，求证：其中必有两点，这两点之间的距离不大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

证明 将这个正方形的两对对边上的中点连接起来，把它分成四个大小相等的小正方形(图 1). 在大正方形里任放

五个点，就相当于把五个点以任一确定的方式投放在这四个小正方形中．这里，我们把每一个小正方形看成一个“抽屉”，于是问题就归结为把五个元素(点)放入四个“抽屉”(小正方形)．根据前节的原则一，必有一个小正方形，其中包含两个或两个以上的点，对于其中的两点，它们间的距离不会超过小正方形对角线的长度(即大正方形对角线长度的一半)，即不大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

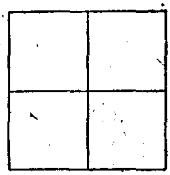

图 1

[例2]　空间中有六个点，其中任何三点都不共线，任何四点都不共面．在每两点之间连起直线段之后，将每一条这样的线段或涂上红色，或涂上蓝色．求证：不论如何涂色，一定存在一个三角形，它的三边有相同的颜色．

证明　从任一点出发，到其余五个点，共可联五条线段．由于这五条线段已被红、蓝两种颜色所涂染，如果把红线段分入一个“抽屉”，蓝线段分入另一个“抽屉”，于是问题就归结为五个元素(线段)，即多于2×2个元素，分到2个“抽屉”(蓝色或红色)，按照原则二，其中至少有三条线段被分入同一“抽屉”，即染有相同的颜色，例如说是红色(图2中的实线)．我们来考察这三条由同一点出发，具有相同颜色的线段，把这三条线段的另外三个端点两两联接起来，就构成了图2所示的虚线三角形．如果有一条虚线被涂成红色，那么它就与两条实线组成一个红边三角形；如果这三条虚线中一条红边也没有，那么它们本身就组成一个蓝边三角形了．

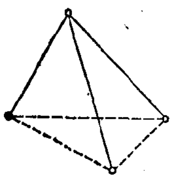

图 2

[例3]　在边长为1的正方形中，任意放入9个点，证

明：在以这些点为顶点的许许多多三角形中，必有一个三角形，它的面积不超过$\frac{1}{8}$.（1963年北京市数学竞赛试题）

证明 用三条平行于上下底边的直线，把正方形分成四个大小相等的长方形．九个点任意放入这四个长方形中，根据原则二，即多于2×4个点放入四个长方形中，则至少有$2+1$个点(即三个点)落在某一个长方形之内．现在，特别取出这个长方形来加以讨论(图3)．

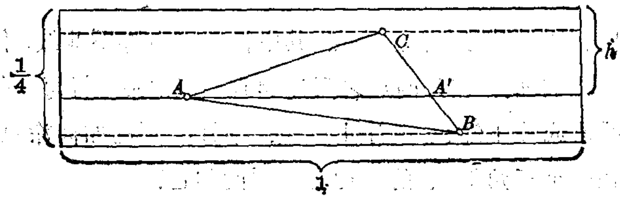

图 3

把落在这长方形中的三点记为A、B、C，通过这三点分别作平行于底边的直线．由图3显然可见

$$\triangle ABC\text{ 的面积}=\triangle AA'B\text{ 的面积}+\triangle AA'C\text{ 的面积}$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\times1\times h+\frac{1}{2}\times1\times\left(\frac{1}{4}-h\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8},$$

这样就得到了需要证明的结论．

[例4] 一个正方形被分成了$15\times15=225$个大小相同的小方格(图4)．在每一个小方格中，任意填写1，2，3，…，55，56中的一个数．求证：一定能够找到四个小方格，它们的中心构成一个平行四边形的四个顶点，并且这平行四边形各条对角线两端的两个小方格中的数字之和相等．

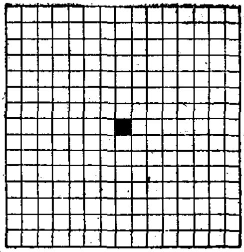

图 4

证明　由于 15 是一个奇数，所以一定有一个小方格处在大正方形的中心位置，我们把它称为"中心小方格"，在图 4 中用黑色标出．把关于中心小方格为中心对称的每两个小方格配成一对，这样，便把除去中心小方格之外的 224 个小方格配成了 112 对．在任一对这种小方格中，令 x 表示其中一个小方格中所放的数，x^* 表示其对称的另一小方格中所放的数，由假设可知

$$1\leqslant x\leqslant 56,\quad 1\leqslant x^*\leqslant 56.$$

所以

$$2\leqslant x+x^*\leqslant 112.$$

这就是说，任何一对小方格中两数之和不外乎

$$2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 110,\ 111,\ 112$$

这 111 种可能．但是，我们共有 112 对小方格．根据原则一，必有至少两对小方格，使得各对中两数之和为同一数字．每对小方格的中心的联线，假如它们不重合的话，必在中心小方格的中心处互相平分，所以这时四个小方格的中心是一个平行四边形的四个顶点．

把联线互相重合的情形，看作是一个蜕化了的平行四边形，可以认为，在这种情况下，结论仍然是正确的．

[例 5] 从自然数集

$$\{1, 2, 3, 4, \cdots, 99, 100\}$$

中，随意选出 51 个数来，求证：其中一定有两个数，它们中的某一个是另外一个的整倍数．

证明 首先注意，一个正整数要么本身是一个奇数，要么是一个偶数．若是一个偶数时，则经过反复地提取因数“2”，最后总能表示为：奇数 $\times 2^l$(其中 $l=1, 2, 3, \cdots$)的形式．并且，这个奇数决不会超过原数的一半．例如

$$16=8\times 2=4\times 2^2=2\times 2^3=1\times 2^4,$$

$$24=12\times 2=6\times 2^2=3\times 2^3,$$

如果容许 $l=0$，那么奇数也被包括在上述一般形式之中．

现在，把 1 到 100 的全部整数，分成下面的 50 个集合：

$$\mathfrak{M}_1=\{1, 1\times 2, 1\times 2^2, 1\times 2^3, 1\times 2^4, 1\times 2^5, 1\times 2^6\},$$

$$\mathfrak{M}_2=\{3, 3\times 2, 3\times 2^2, 3\times 2^3, 3\times 2^4, 3\times 2^5\},$$

$$\mathfrak{M}_3=\{5, 5\times 2, 5\times 2^2, 5\times 2^3, 5\times 2^4\},$$

$$\mathfrak{M}_4=\{7, 7\times 2, 7\times 2^2, 7\times 2^3\},$$

……

$$\mathfrak{M}_{25}=\{49, 49\times 2\},$$

$$\mathfrak{M}_{26}=\{51\},$$

……

$$\mathfrak{M}_{50}=\{99\}.$$

很明显，1, 2, …, 100 这一百个整数没有遗漏地被放入了这五十个集合，并且，同一个数字决不会出现在两个不同的集合中(读者可自行证明这一结论)．因此，不论用何种方式从中取出 51 个数时，必然有至少两个数是出自同一集合的，而同一集合中的两数，大数必定是小数的整倍数．

在讨论下一个例子之前，我们介绍几个数学中的基本概

念. 按照一定顺序排列起来的数串

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \cdots, \tag{1}$$

称为一个**数列**. 如果其中包含无穷多项，称之为**无穷数列**;若只含有穷项，则称为**有穷数列**. 无穷数列和有穷数列统称为"数列". 每个 a_i 称为数列的一项，自然数 i 叫做这一项的**足标**，它指示着这一项在数列中所处的位置. 例如

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots \qquad (\text{其中 } a_n=n);$$

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots \qquad (\text{其中 } a_n=(-1)^{n-1});$$

$$1,\ \sqrt{2},\ \frac{1}{2},\ -1,\ 0,\ 2,$$

都是数列，其中头两个是无穷数列，最后一个是有穷数列(因为它只含六项).

如果数列(1)适合

$$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant\cdots,$$

称(1)为一个**上升数列**，如果上述不等式中每一个"$\leqslant$"都成立着不等号"$<$"，则称(1)为**严格上升数列**. 类似地，如果数列(1)适合

$$a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant a_{n+1}\geqslant\cdots,$$

就说(1)是一个**下降数列**，如果上述不等式的每一个"$\geqslant$"都成立着不等号"$>$"，则称(1)为**严格下降数列**. 上升数列和下降数列统称**单调数列**. 例如，前面的三个数列的头一个是单调数列，并且是严格上升数列；而后两个数列都不是单调数列.

从数列(1)中取出一部分项来，但不改变它们在原数列(1)中的先后顺序，这样就得到了一个新的数列，它叫做数列(1)的一个**子数列**. (1)的任一个子数列可以这样来表示：

$$a_{i_1},\ a_{i_2},\ a_{i_3},\ \cdots,\ a_{i_n},\ a_{i_{n+1}},\ \cdots,$$

其中的足标必须适合

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_n < i_{n+1} < \cdots,$$

这就是说，子数列中项的先后顺序必须保持它们在原数列中的先后顺序．注意以下两种极端情况：数列 (1) 本身一定是 (1) 的子数列；任意抽出 (1) 的某一项所组成的数列必是 (1) 的子数列．很显然，这两种极端情况完全符合子数列的定义．

有了上述这些准备之后，就可以继续我们的讨论了．

[例 6] 任意给定由 n^2+1 个项所组成的实数列，求证：从中一定可以挑出由 $n+1$ 个项所组成的单调子数列．

为了具体地了解这个结论说的是什么内容，在证明之前，我们来看几个特殊的情况．当 $n=1$ 时，$n^2+1=2$，$n+1=2$，这就是说：任意给定两个项组成的实数列，从中一定可以取出由两个项组成的单调子数列．这是不证自明的，因为任何两个实数所组成的数列一定是单调数列．当 $n=2$ 时，$n^2+1=5$，$n+1=3$，这就是说：任意给定由五个项组成的数列，从中一定可以取出有三个数组成的单调子数列．即使在这种 n 相当小的情形，结论的正确性已经不是显而易见的了．

证明 把原数列记为

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{n^2},\ a_{n^2+1}.$$

将以 a_i 作为首项的，项数最多的下降数列的项数记为 N_i．由于单单是一个 a_i 就可组成一个下降子数列，所以 $N_i \geqslant 1$．这就是说，$N_1,\ N_2,\ \cdots,\ N_{n^2+1}$ 是 n^2+1 个正整数．如果其中某一个大于或等于 $n+1$，那么结论就已经成立了，因为我们这时即可找出一个含有 $n+1$ 项的下降子数列．所以，只须讨论另外一种情况，即：

$$1 \leqslant N_i \leqslant n \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n^2+1)$$

的情况．当 n^2+1 个自然数 N_i 只呈现 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 这 n 种可能时，由原则二可知，它们之中至少有 $n+1$ 个数相等，设为

$$N_{i_1}=N_{i_2}=\cdots=N_{i_{n+1}},\tag{2}$$

其中足标适合

$$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{n+1}\leqslant n^2+1,$$

现在我们来证明：子数列

$$a_{i_1},\ a_{i_2},\ \cdots,\ a_{i_{n+1}}$$

是严格上升数列．可以用反证法．假若

$$a_{i_1}\geqslant a_{i_2},$$

那么，以 a_{i_1} 为头的，具有最大项数的下降子数列，起码要比以 a_{i_2} 为头的，具有最大项数的下降子数列多一个项．也就是说，应当有

$$N_{i_1}\geqslant N_{i_2}+1.$$

这与等式(2)矛盾．所以，只能是 $a_{i_1}<a_{i_2}$．同理可证

$$a_{i_1}<a_{i_2}<a_{i_3}<\cdots<a_{i_{n+1}}.$$

这就是说：在原数列不包含由 $n+1$ 个项所组成的下降子数列的情况下，我们证明了原数列一定含有由 $n+1$ 个项所组成的严格上升子数列．所需的结论就完全证明了．

[例 7]　一个国际社团的成员来自六个国家，共有 1978 人，用 1, 2, …, 1977, 1978 来编号．试证明：该社团至少有一个成员的编号与他的两个同胞的编号之和相等，或是其一个同胞的编号的两倍．（1978 年第二十届国际中学生数学竞赛试题）

证明　本题与下列问题完全相当："把 1, 2, 3, …, 1977, 1978 按任意方式分成六组，则必有一组有这样的性质：其中至少有一个数，或是等于同一组中其他两数之和，或是等于另一数的两倍．"

用反证法来证明这一结论．假设任一组数都不具备上述性质，那么由此可推知，每一组中的数都具备下列性质：

同一组数中任何两数之差必不在这个组中. (*)

这是因为, 若 a, b 和 $b-a$ 这三数在同一组中, 那么由等式

$$a+(b-a)=b$$

可知, 这一组数已经具备欲证的性质了.

由 $\frac{1978}{6}>329$, 故根据原则二, 可以肯定有一个数组 A, 其中至少含 330 个数. 现从 A 中任意取出 330 个数来, 记其中最大的那一个数为 m_1. 把 m_1 减去其余的 329 个数, 得到的 329 个数既是正整数又小于 1978, 而且, 由性质(*)可知, 它们必不在组 A 中, 即应属于其余五个数组. 又由 $\frac{329}{5}>65$, 再根据原则二, 可以肯定有一个数组 B, 其中至少含上述 329 个中的 66 个数. 再从 B 中任取上述 329 个数中的 66 个来, 记其中最大的那一个为 m_2. 把 m_2 减去其余 65 个数, 得出新的 65 个数, 由性质(*), 它们必不属于 B; 现在指出, 这 65 个数也不会属于 A, 假若其中有某一个数 (m_2-b) 属于 A, 因 m_2 与 b 可以写为:

$$m_2=m_1-a_1; \qquad (a_1 \text{ 属于 } A)$$

$$b=m_1-a_2, \qquad (a_2 \text{ 属于 } A)$$

这将导致

$$a_2-a_1=(m_1-a_1)-(m_1-a_2)=m_2-b$$

属于 A, 这就同 A 具备性质(*)的假设相违背. 这就是说, 这 65 个数必属于其余四个数组. 由 $\frac{65}{4}>16$, 根据原则二又可断言, 必有一个数组 C 至少含有上述 65 个数中的 17 个数, 仍从 C 中任取上述 65 个数中的 17 个, 记其最大者为 m_3. 把 m_3 减去其余 16 个数字, 而得出新的 16 个数; 仿照前面的推理可以证明, 它们既不属于 C, 也不会属于 B 与 A, 而只能