内 容 简 介

本书叙述了与计算机科学有紧密联系并且相互之间又有联系的数理逻辑基础性内容，包括经典逻辑和非经典逻辑中的构造性逻辑和模态逻辑．本书在选材时考虑了逻辑系统的特征，并且适应计算机科学的要求．本书研究各种逻辑的背景、语言、语义、形式推演，以及可靠性和完备性等问题．本书大部分章节附有习题．

本书读者对象：高校计算机专业师生，科研人员．

图书在版编目（CIP）数据

面向计算机科学的数理逻辑/陆钟万著．-2版．-北京：科学出版社，2002.1

（中国科学院研究生教学丛书/白春礼主编）

ISBN 7-03-009657-6

Ⅰ．面… Ⅱ．陆… Ⅲ．数理逻辑 Ⅳ．O141

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 058338 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1998 年 1 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

2002 年 1 月第 二 版 印张：8 7/8

2002 年 1 月第四次印刷 字数：221 000

印数：6 001—9 000

定价：19.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

《中国科学院研究生教学丛书》序

在21世纪曙光初露，中国科技、教育面临重大改革和蓬勃发展之际，《中国科学院研究生教学丛书》——这套凝聚了中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血的研究生教材面世了．相信这套丛书的出版，会在一定程度上缓解研究生教材不足的困难，对提高研究生教育质量起着积极的推动作用．

21世纪将是科学技术日新月异，迅猛发展的新世纪，科学技术将成为经济发展的最重要的资源和不竭的动力，成为经济和社会发展的首要推动力量．世界各国之间综合国力的竞争，实质上是科技实力的竞争．而一个国家科技实力的决定因素是它所拥有的科技人才的数量和质量．我国要想在21世纪顺利地实施“科教兴国”和“可持续发展”战略，实现小平同志规划的第三步战略目标——把我国建设成中等发达国家，关键在于培养造就一支数量宏大、素质优良、结构合理，有能力参与国际竞争与合作的科技大军．这是摆在我国高等教育面前的一项十分繁重而光荣的战略任务．

中国科学院作为我国自然科学与高新技术的综合研究与发展中心，在建院之初就明确了出成果出人才并举的办院宗旨，长期坚持走科研与教育相结合的道路，发挥了高级科技专家多，科研条件好，科研水平高的优

势，结合科研工作，积极培养研究生；在出成果的同时，为国家培养了数以万计的研究生．当前，中国科学院正在按照江泽民同志关于中国科学院要努力建设好“三个基地”的指示，在建设具有国际先进水平的科学研究基地和促进高新技术产业发展基地的同时，加强研究生教育，努力建设好高级人才培养基地，在肩负起发展我国科学技术及促进高新技术产业发展重任的同时，为国家源源不断地培养输送大批高级科技人才．

质量是研究生教育的生命，全面提高研究生培养质量是当前我国研究生教育的首要任务．研究生教材建设是提高研究生培养质量的一项重要的基础性工作．由于各种原因，目前我国研究生教材的建设滞后于研究生教育的发展．为了改变这种情况，中国科学院组织了一批在科学前沿工作，同时又具有相当教学经验的科学家撰写研究生教材，并以专项资金资助优秀的研究生教材的出版．希望通过数年努力，出版一套面向21世纪科技发展，体现中国科学院特色的高水平的研究生教学丛书．本丛书内容力求具有科学性、系统性和基础性，同时也兼顾前沿性，使阅读者不仅能获得相关学科的比较系统的科学基础知识，也能被引导进入当代科学研究的前沿．这套研究生教学丛书，不仅适合于在校研究生学习使用，也可以作为高校教师和专业研究人员工作和学习的参考书．

“桃李不言，下自成蹊．”我相信，通过中国科学院一批科学家的辛勤耕耘，《中国科学院研究生教学丛书》将成为我国研究生教育园地的一丛鲜花，也将似润物春

雨，滋养莘莘学子的心田，把他们引向科学的殿堂，不仅为科学院，也为全国研究生教育的发展作出重要贡献.

路甬祥

第二版记言

读者和我讨论问题时，表示对书中的一些内容理解得不是很透彻，做习题有些困难．我很理解这种情形．我总想应当少讲，留给读者思考．现在觉得，有时也应适当地多讲，使他们在阅读中少走弯路．因此，这次修订给本书增加了相当多的说明，涉及概念和证明的思路，主要放在附注中．经典逻辑是基础，把经典逻辑的问题弄清楚了，对理解后面的非经典逻辑很有帮助，故增加的说明主要是关于经典逻辑的．

另外，由于可靠性和完备性（特别是完备性）是重要内容，在第四章中第一次讲到这些问题，分量相当重，所以我把这一章中的紧致性定理、Löwenheim-Skolem 定理和 Herbrand 定理组成新的第五章．独立性仍留在原处．

本书再版之际，中国科学院软件研究所约我将本书内容以我授课的形式进行录像，制作光盘，并由科学出版社出版，软件研究所发行．这将为广大读者解决平面阅读时可能会遇到困难的问题，使读者可以走进课堂，将听课和阅读相结合，达到互补的效果．

中国科学院软件研究所为传播知识所做的努力和为读者着想的精神令我深感钦佩，谨在此表达衷心的谢意．

陆钟万

2000 年 12 月

前　　言

数理逻辑是用数学方法研究逻辑问题，特别是研究数学中的逻辑问题的学科，它是数学的分支．数学中有证明和计算两类研究．证明和计算是互相沟通、密切相关的．因此数理逻辑与计算机科学之间存在本质联系，它的许多分支在计算机科学中有重要应用．计算机科学的发展对数理逻辑提出了要求，对数理逻辑的发展产生了很大影响，造成数理逻辑原有分支的发展，并且开辟了新的领域．

本书叙述数理逻辑中与计算机科学有紧密联系并且相互之间有联系的若干内容，包括经典逻辑和非经典逻辑．经典逻辑是基础．非经典逻辑大致可以分为两类．一类持有与经典逻辑不同的观点，这一类包括构造性逻辑和多值逻辑等．另一类是经典逻辑的扩充，其中包括模态逻辑和时态逻辑等．本书选择陈述非经典逻辑中的构造性逻辑和模态逻辑．

本书在选择材料时考虑逻辑系统的特征并且适应计算机科学的要求．对问题的陈述着重主要之点，而不涉及细节．对各种逻辑主要介绍其背景、语言、语义、形式推演，以及可靠性和完备性等问题．在陈述形式推演时主要采用直观反映非形式数学推理的自然推演系统．

虽然本书在选材上是面向计算机科学的，但并不包括数理逻辑在计算机科学中应用的内容．这一方面是由于这种内容相当多，写少了并不全面，写多了将会影响数理逻辑作为主要内容在本书中的位置；另一方面是由于我希望读者在读过本书之后能得到比较扎实的数理逻辑的训练，从而能处理数理逻辑在计算机科学中应用的问题．

本书的绪论说明数理逻辑的对象，在正文的八章中，第一章

介绍集论和归纳定义、归纳证明的基本概念. 集论部分陈述其初步内容，包括关于可数集的基本定理. 对归纳定义和归纳证明作了详细说明，因为数理逻辑中的许多概念是用归纳定义给出的. 第一章是阅读以后各章的预备知识，除这些内容之外，本书是自足的.

第二、三、四章陈述经典逻辑. 经典命题逻辑可以看作经典一阶逻辑的部分. 但由于经典命题逻辑有其自身的特征，故本书把它和经典一阶逻辑分别在第二章和第三章中陈述. 经典逻辑的可靠性和完备性问题在单独的第四章中作比较详细的论述. 特别是完备性问题，本书将经典命题逻辑以及经典一阶逻辑的不含相等和含相等的情形分开处理，以显示出各种情形在处理完备性问题上的差异. 在可靠性和完备性定理的基础上，第四章陈述了紧致性定理，Löwenheim-Skolem 定理和 Herbrand 定理. Herbrand 定理是自动定理证明的一个方向的基础. 第四章还讨论了形式推演系统中规则的独立性问题.

第五章介绍形式推演的公理推演系统，证明了它与自然推演系统的等价性.

第六章研究构造性逻辑，第七章和第八章研究模态逻辑，讨论了这些非经典逻辑与经典逻辑的关系.

在附录中介绍自然推演中形式证明的一种简单形式.

本书以计算机专业的研究生和本科生为主要对象，亦可供计算机科学工作者和有关专业的读者参考.

我愿意向许多人表示深深的感谢. 胡世华教授无私地教给我数理逻辑. 在本书的写作和修订过程中，王世强教授、唐稚松教授、许孔时教授、杨东屏教授，以及已故的吴允曾教授，提出了宝贵的意见和建议. 同类的书给我有益的启发. 我从 1978 年开始在中国科学技术大学研究生院（北京），从 1982 年开始在清华大学讲授数理逻辑课程，在教学实践中经常与助教和学生讨论问题，这对我考虑改进本书的写作很有帮助.

中国科学院软件研究所支持我编写本书. 中国科学技术大学

研究生院（北京）和清华大学将本书作为教材．中国科学院研究生教材出版基金给本书以资助．科学出版社为本书的出版给予了大力支持．我谨向这些单位表示衷心感谢．

最后，我愿向爱妻丁衣表示谢忱．她为本书抄写部分文稿，并在写作过程中给我时间和鼓励．

因限于自己的水平，书中的缺点和错误是难免的，请读者批评指正．

陆钟万

中国科学院软件研究所

中国科学技术大学研究生院（北京）

1996 年 10 月

目　　录

绪　论

数理逻辑是用数学方法研究逻辑问题，特别是研究数学中的逻辑问题的学科.

逻辑推理是由前提推出结论.前提和结论都是命题.命题是真的或是假的，命题的真或假由命题的内容是否符合客观实际确定.有些逻辑学家愿意用“语句”这个词而不用“命题”.他们的理由可能是，在自然语言中语句是用于表达的单位，而命题是语句所肯定的.

当前提的真蕴涵结论的真时，称前提和结论之间有**可推导性关系**，即前提和结论之间的推理是正确的.称这种推理为**演绎推理**.**演绎逻辑**研究怎样的前提和结论之间有可推导性关系.

归纳逻辑与演绎逻辑不同.从真的前提出发，使用归纳推理，得到的结论只能要求它自身是协调的，或者它与前提是协调的（“协调性”见 4.2 节），但结论不一定是真的.在归纳推理中，前提的真并不蕴涵结论的真.

本书陈述的数理逻辑属于演绎逻辑的范围.

下面是几个例子.

$$1)\begin{cases}\text{所有 3 的倍数的数字之和是 3 的倍数.（前提）}\\ 10^{10}\text{的数字之和不是 3 的倍数.（前提）}\\ 10^{10}\text{不是 3 的倍数.（结论）}\end{cases}$$

其中的推理是正确的，并且其中的前提和结论都是真命题.这个推理的正确性好像与其中前提和结论的真有关系，实际上并非如此.

再看下面的：

$$2)\begin{cases}\text{所有中学生打网球.（前提）}\\ \text{王君不打网球.（前提）}\\ \text{王君不是中学生.（结论）}\end{cases}$$

其中的推理也是正确的,并且它的正确性与1)中推理正确性的依据是完全相同的.但是2)中的前提和结论都未必是真命题.

因此,推理的是否正确,与推理中前提和结论的真或假是没有关系的.可推导性只要求前提的真蕴涵结论的真,不要求前提和结论的真.数理逻辑不研究前提和结论的真或假,而是研究前提的真是否蕴涵结论的真.

那么,可推导性关系是由什么决定的呢?

命题有内容,它决定命题的真或假.此外,命题还有逻辑形式,简称为形式.决定前提和结论之间的可推导性关系的是它们的逻辑形式.

上式1)和2)中的前提和结论分别有以下的逻辑形式:

$$3)\begin{cases} S\text{ 中的所有元有 }R\text{ 性质.(前提)} \\ a\text{ 没有 }R\text{ 性质.(前提)} \\ a\text{ 不是 }S\text{ 中的元.(结论)} \end{cases}$$

显然,任何三个命题,如果它们分别具有3)中的逻辑形式,那么由其中的前两个命题能推导出第三个命题.(不论 S 是怎样的集,R 是怎样的性质,a 是怎样的元.)

由此可见,数理逻辑研究推理时涉及对前提和结论的分析,这时所注意的是它们的由内容抽象出的逻辑形式.

陈述命题要使用语言.当在自然语言中陈述命题并且分析它们的逻辑形式时,有时会产生误会.例如下面的4)和5):

$$4)\begin{cases} \text{X 认识 Y.(前提)} \\ \text{Y 是足球队长.(前提)} \\ \text{X 认识足球队长.(结论)} \end{cases}$$

$$5)\begin{cases} \text{X 认识 A 班某学生.(前提)} \\ \text{A 班某学生是足球队长.(前提)} \\ \text{X 认识足球队长.(结论)} \end{cases}$$

其中的相应命题在语言上都是相似的.但是,4)中的推理是正确的,而5)中的推理是不正确的.这是由于,4)中的两个Y是同一个人,5)中的两个A班某学生未必是同一个人.因此,自然语言中语

言上的相似并不保证逻辑形式上的相同. 为了使 5) 中的推理正确,需要增加一个前提:两个 A 班某学生是同一个人.

根据上述理由,在数理逻辑中要构造一种符号语言来代替自然语言. 这种人工构造的符号语言称为**形式语言**. 在形式语言中使用符号构成公式. 公式用来表示命题. 形式语言中的公式能够精确地表示命题的逻辑形式. 需要说明,并不是不能把自然语言中命题的逻辑形式弄精确,而是使用公式表示命题能够更方便地做到这一点.

像在自然语言中的情形一样,形式语言也有语义和语法. **语义**涉及符号和符号表达式的涵义(当给符号以某种解释时). **语法**涉及符号表达式的形式结构,不考虑任何对形式语言的解释. 形式语言的语义和语法既有联系,又要区分.

讨论问题是在某个语言中进行的. 但是现在的情形是,所讨论的对象本身就是语言. 因此要涉及两个不同层次的语言. 被讨论的语言称为**对象语言**,它就是前面所说的形式语言. 讨论对象语言时所用的语言称为**元语言**. 本书所使用的元语言是自然语言汉语.

从传统来说,数学不把它的推理方法和语言作为研究的对象. 例如,集论研究集,集的关系和函数,但并不研究它所使用的推理. 数理逻辑试图用数学的方法研究这些方面,首先是把数学的语言和推理方法弄精确. 于是数理逻辑成为数学的新的分支.

通常把近代数理逻辑的思想溯源到 Leibniz(1646~1716). Leibniz 力图建立一种精确的、普遍适用的科学语言,并且寻求一种推理的演算,以便能够用计算来解决辩论和意见不一致的问题. Leibniz 的这些想法在 Frege[1879]中得以完成,因此把数理逻辑的历史回溯到从这一年开始.

上述精确的普遍适用的科学语言是将在以后各章中构造的形式语言,推理演算是后面将要发展的形式推演系统.

第一章 预备知识

本书的内容是自足的.预备知识包括集以及归纳定义和归纳证明的基本概念,使用标准的陈述和记号.熟悉这些内容的读者可以略去,或者当需要时参考.

1.1 集

本节简要陈述集的基本概念以及关于可数集的基本定理,没有给出证明.需要时请读者参考集论的书.

集(也称为**集合**)由某些对象汇集而成.称这些对象为集的元.我们用

$$a \in S$$

表示 a 是集 S 的元,用

$$a \notin S$$

表示 a 不是 S 的元.

为了方便,我们用

$$a_1,\cdots,a_n \in S$$

表示 $a_1 \in S,\cdots,a_n \in S$;用

$$a_1,\cdots,a_n \notin S$$

表示 $a_1 \notin S,\cdots,a_n \notin S$.

集由所含的元确定.称集 S 和 T 为**相等的**,记作

$$S = T$$

当且仅当它们含相同的元,就是说,对于所有 x,$x \in S$,当且仅当 $x \in T$.

$S \neq T$ 表示 S 和 T 是不相等的,就是说,存在 x,使得 $x \in S$,

当且仅当 $x \notin T$.

集所含元的全体称为它的**外延**,故集由其外延确定,集的**内涵**是它的元所共有的性质.例如,非负偶数集的外延是

$$\{0,2,4,\cdots\},$$

它的内涵是"被 2 整除的自然数".集 $\{a,b,c\}$ 的外延是 a,b 和 c,它的内涵是"是 a 或 b 或 c".

称 S 为 T 的**子集**,记作

$$S \subseteq T$$

当且仅当对于所有 x, $x \in S$ 蕴涵 $x \in T$.所有集是它自己的子集.$S=T$ 当且仅当 $S \subseteq T$,并且 $T \subseteq S$.

称 S 为 T 的**真子集**,当且仅当 $S \subseteq T$,并且 $S \neq T$.

一个含有 $a_1,\cdots,a_n$ 为元的集记作

$$\{a_1,\cdots,a_n\}.$$

显然,我们有

$$\{a\} = \{a,a\},$$
$$\{a,b\} = \{b,a\} = \{a,b,b\} = \{a,b,b,a\},$$
$$\{a,b,c\} = \{c,b,a\} = \{b,c,b,a\}.$$

因此,构成集的成分与集中元的次序和重复是没有关系的.

空集 $\varnothing$ 是一个特殊的集,其中没有元.$\varnothing$ 是任何集 S 的子集.这个命题的真是不需要证明就能够肯定的,因为当证明 $\varnothing \subseteq S$(即证明对于所有 $\varnothing$ 中的元 x, $x \in S$ 成立)时,什么事情也不需要做.或者换言之,$\varnothing \subseteq S$ 不成立就是说,存在 x 使得 $x \in \varnothing$,并且 $x \notin S$,这是不可能的.

我们用

$$\{x \mid —x—\}$$

表示由所有使得 $—x—$(它是一个讲到 x 的命题)成立的对象 x 构成的集.例如,令

$$S = \{x \mid x < 100,\text{并且 } x \text{ 是素数}\},$$
$$T = \{x \mid x = 0 \text{ 或 } x = 1 \text{ 或 } x = 2\},$$