SHUXUE ZIXI YU FUDAO

数学
自习与辅导

解析几何

（平面）

陈振宣编

上海科学技术出版社

数学自习与辅导

解析几何

（平面）

陈振宣 编

上海科学技术出版社

数学自习与辅导

解析几何

（平　面）

陈振宣　编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　上海市印十三厂印刷

开本787×1092　1/32　印张8.5　字数187,000

1987年6月第1版　1987年6月第1次印刷

印数：1—80,000

统一书号：13119·1347　定价：1.15元

出版说明

《数学自习与辅导》是配合各类中学学生和自学青年进行文化课学习的课外读物。高中部分共六个分册。

本书的出版，旨在指导读者通过自习的方式，加深理解数学概念，熟练掌握基本解题思路和方法，进而使读者在把握知识重点、难点、关键和提高综合运用知识的能力等方面，都有所得益。

本书为平面解析几何。

由于时间仓促，疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

目　录

第一章　直　　线

一、有向线段、定比分点

这一节研究的是解析几何的基础——坐标法，即代数与几何之间的桥梁。坐标法所阐述的是点与数(组)之间相互转化的方法，平面直角坐标系是平面点集到有序数组的集合之间的一种映射。为了弄清它们之间的对应法则，首先要掌握有向线段的数量这一奠基性的概念。只有弄清有向线段的数量，才能把握住坐标法的概念，从而使几何量的解析式的推导成为水到渠成的自然结果。

【学习指导和例题】

1．有向线段的数量

有向线段 $\overline{AB}$ 的数量 AB 等于终点 B 的坐标 x_2 减去始点 A 的坐标 x_1 所得之差，即 $AB=x_2-x_1$，这是解析几何中第一个公式，一定要熟记。

2．平面直角坐标系

设 P 为平面上任意一点，它在 x、y 轴上的射影分别为 M、N，O 为原点，则点 P 的横坐标 x 定义为有向线段 $\overline{OM}$ 的数量 OM，点 P 的纵坐标 y 定义为有向线段 $\overline{ON}$ 的数量 ON，显然，这种从点到数组，反过来，从数组到点的对应法则，是一种把几何对象(点)和代数的对象(数组)联系起来的一种映

射。以此为基础，我们可进而使作为动点轨迹的曲线和代数方程联系起来，这样，关于平面曲线图形性质的研究就转化为有关点的坐标的代数问题的研究，平面解析几何就是从这一基本观点出发，用代数方法研究平面图形的一门科学。

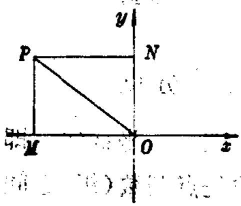

图 1.1

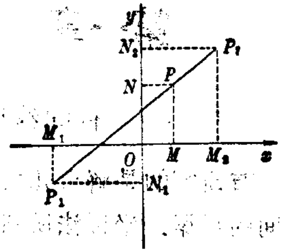

图 1.2

3. 定比分点公式

有向线段 $\overline{P_1P_2}$，被其上一点 P 分解成两条有向线段 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$，则 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 的数量之比 λ 叫做点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比，即

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}.$$

根据上述定义，可知当 P 位于线段 $\overline{P_1P_2}$ 的延长线上时，$-\infty<\lambda<-1$，即 $\lambda\in(-\infty,\ -1)$；当点 P 位于线段 $\overline{P_2P_1}$ 的延长线上时，$-1<\lambda<0$，即 $\lambda\in(-1,\ 0)$；当点 P 位于线段 $\overline{P_1P_2}$ 上时，$0<\lambda<+\infty$，即 $\lambda\in(0,\ \infty)$。显然，$\lambda\neq-1$。

在已知 P_1、P_2 两点坐标分别为 $(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$，推导有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的定比(λ)分点 P 的坐标公式里，主要关键是：(1) 已知 $(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$ 与 λ，如何求点 P 的坐标 $(x,\ y)$？这里有两个未知数 x 和 y，必需从已知条件 $\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$ 建立两个方程；(2) 设 P_1、P_2、P 在 x、y 轴上的射影分别为 M_1、M_2、M

及N_1、N_2、N，如图1.2所示。

$$\because \quad \frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{N_1N}{NN_2},$$

又 $M_1M=x-x_1$，$MM_2=x_2-x$，

$N_1N=y-y_1$，$NN_2=y_2-y$，

$$\therefore \quad \lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y}，$$从此可以分别解出x、y，

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\ (\lambda\neq-1).$$

在使用这一公式时，P_1、P_2、P三点中已知任意两点的坐标，都可以求出第三点的坐标，这里给出两个方程，可以求出两个未知数，如课本p.9的例1，是已知(x_1, y_1)、(x_2, y_2)与x，可求λ与y。又如已知一线段P_1P_2被点P分成$\lambda=3:2$，且P_1，P的坐标分别为$(-3, 2)$、$(1, -2)$，欲求点P_2的坐标，可有如下两种解法。

解一： 设P_2的坐标为(x, y)，根据定比分点公式，可有

$$1=\frac{-3+\frac{3}{2}x}{1+\frac{3}{2}}, \qquad ①$$

$$-2=\frac{2+\frac{3}{2}y}{1+\frac{3}{2}}. \qquad ②$$

分别解出方程①，②得

$$x=\frac{11}{3},\ y=-\frac{14}{3},$$

即P_2的坐标为

$$\left(\frac{11}{3}, -\frac{14}{3}\right).$$

解二： 设同解一，

$$\because \quad \frac{P_1P}{PP_2}=\frac{3}{2}, \quad \therefore \frac{P_1P_2}{P_2P}=-\frac{5}{2},$$

代入定比分点公式，得

$$x=\frac{-3-\frac{5}{2}\times 1}{1-\frac{5}{2}}=\frac{11}{3}, \quad y=\frac{2-\frac{5}{2}(-2)}{1-\frac{5}{2}}=-\frac{14}{3},$$

解同解一。

从此可见掌握与运用定比分点公式的灵活性，如果把 λ 看作变量，这一公式还有一种明显的几何意义，在以后学习参数方程时，再来说明。

现在我们来看几个典型的例题。

例 1 设 P、A、B、C 为同一直线上的任意四点，求证：$PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB=0$。

分析：由于 PA、BC…… 等等都是有向线段的数量，为了使它们转化为相应诸点坐标的代数式，应建立恰当的直线坐标系，最好取点 P 为原点。

证：取点 P 为原点，以 A、B、C 所在直线为轴，建立直线坐标系。设 A、B、C 各点的坐标分别为 x_1、x_2、x_3，则 $PA=x_1$，$PB=x_2$，$PC=x_3$；$AB=x_2-x_1$，$BC=x_3-x_2$，$CA=x_1-x_3$。

$$\begin{aligned}\therefore\quad & PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB\\ &=x_1(x_3-x_2)+x_2(x_1-x_3)+x_3(x_2-x_1)\\ &=x_1x_3-x_1x_2+x_1x_2-x_2x_3+x_2x_3-x_1x_3=0.\end{aligned}$$

通过坐标系的建立，把几何问题转化为代数问题，通过代数运算，使问题顺利解决。

例 2 设 A_1、A_1'、A_2、A_3 为平面上任意四点，且 O 为 A_1A_1' 的中点，求证：

$$|A_1A_2|^2+|A_2A_3|^2+|A_3A_1'|^2\geqslant|OA_1|^2+|OA_2|^2+|OA_3|^2.$$

分析： 为了便于确定这四点的坐标，可取 O 为原点，直线 A_1A_1' 为 x 轴，在设定诸点坐标后，即可利用距离公式，转化为代数不等式证明问题。

证： 取 O 为原点，A_1A_1' 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系，设诸点坐标分别为 $A_1(x_1, 0)$、$A_2(x_2, y_2)$、$A_3(x_3, y_3)$、$A_1'(-x_1, 0)$，则

$$|A_1A_2|^2+|A_2A_3|^2+|A_3A_1'|^2-|OA_1|^2-|OA_2|^2-|OA_3|^2$$
$$=(x_1-x_2)^2+y_2^2+(x_2-x_3)^2$$
$$+(y_2-y_3)^2+(x_3+x_1)^2+y_3^2-x_1^2$$
$$-x_2^2-y_2^2-x_3^2-y_3^2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2$$
$$-2x_2x_3+x_3^2+2x_3x_1+y_2^2+y_3^2-2y_2y_3$$
$$=(x_1+x_3-x_2)^2+(y_2-y_3)^2\geqslant 0.$$

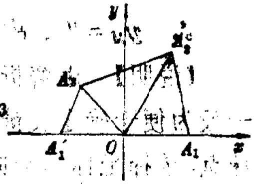

图 1.3

$$\therefore\quad |A_1A_2|^2+|A_2A_3|^2+|A_3A_1'|^2$$
$$\geqslant |OA_1|^2+|OA_2|^2+|OA_3|^2.$$

当且仅当 $x_1+x_3=x_2$，$y_2=y_3$ 时，A_1A_3 的中点与 OA_2 的中点重合，即 $OA_1A_2A_3$ 是平行四边形时，等号成立。

例 3 $\triangle ABC$ 中，AT 为 $\angle A$ 的内角平分线，D、E 分别在 AB、AC 上，且 $|BD|=|CE|$，BC、DE 的中点分别为 M、N，求证：$MN \parallel AT$。

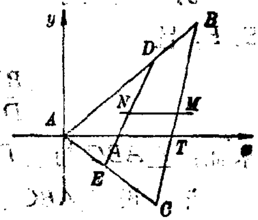

图 1.4

分析： 为了便于确定 A、B、C、D、E、M、N 的坐标，注意到 B、C、D、E 分别在 AB、AC 上，故可取 A 为原点。又由于 $\angle A$ 的内，外角平分线互相垂直，可取它们分别为坐标轴，以 $\angle BAC=2\theta$，$|AB|=2m$，$|AC|=2n$，$|BD|=|CE|=2l$ 为参数，即可确定诸点的坐标，若得 $y_M=y_N$，则可证题断。

证： 取 A 为原点，AT 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，

如图1-4。设 $\angle BAC=2\theta$，$|AB|=2m$，$|AC|=2n$，$|BD|=|CE|=2l$，则 B、C、D、E 的坐标分别为 $B(2m\cos\theta,\ 2m\sin\theta)$、$C(2n\cos\theta,\ -2n\sin\theta)$、$D(2(m-l)\cos\theta,\ 2(m-l)\sin\theta)$、$E(2(n-l)\cos\theta,\ -2(n-l)\sin\theta)$。$M$、$N$ 两点的纵坐标分别为

$$y_M=\frac{1}{2}(y_B+y_C)=(m-n)\sin\theta,$$

$$y_N=\frac{1}{2}(y_D+y_E)=(m-n)\sin\theta,$$

$\therefore\quad y_M=y_N$，故 $MN\parallel AT$。

【说明】 用解析法解几何问题，首先要选择适当坐标系，一般为便于确定关键点的坐标，常利用图形中的垂直关系，特殊点，选择坐标轴与原点，再选若干参数，使有关点坐标便于计算，选参数时，不局限于线段的长度，有时角度，线段长度并用，利用三角知识，可使计算量减少，选用参数的个数不宜过多，能使问题的图形确定即可。

例 4 设 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上分别有三点 D、E、F，且

$$\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}=\lambda,$$

求证：$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的重心重合。

证：设 $\triangle ABC$ 三顶点的坐标分别为 $A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$、$C(x_3,\ y_3)$，

$$\because\ \frac{BD}{DC}=\lambda,\qquad \therefore\ x_D=\frac{x_2+\lambda x_3}{1+\lambda},\ y_D=\frac{y_2+\lambda y_3}{1+\lambda},$$

同理 $\because\ \dfrac{CE}{EA}=\dfrac{AF}{FB}=\lambda,\quad \therefore\ x_E=\dfrac{x_3+\lambda x_1}{1+\lambda},$

$$y_E=\frac{y_3+\lambda y_1}{1+\lambda},\ x_F=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y_F=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

根据课本 p.9 的例 2，可知 $\triangle DEF$ 的重心坐标为

$$\frac{1}{3}(x_D+x_E+x_F)=\frac{1}{3}\left(\frac{x_2+\lambda x_3+x_3+\lambda x_1+x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\right)$$

$$=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),$$

$$\frac{1}{3}(y_D+y_E+y_F)=\frac{1}{3}\left(\frac{y_2+\lambda y_3+y_3+\lambda y_1+y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$$

$$=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3).$$

∴ $\triangle ABC$ 的重心与 $\triangle DEF$ 的重心重合。

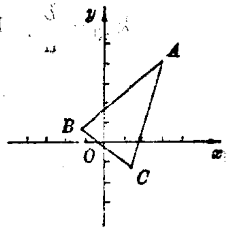

图 1.5

例 5 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 A 的坐标是 $(3, 4)$，而顶点 B 在第二象限，又重心 G 的坐标为 $(1, 1)$。

(1) 设顶点 B 的坐标为 (a, b)，试用 a、b 表示顶点 C 的坐标；

(2) 若垂心 O 在原点，求 a、b 之值。

分析： 点 C 随着点 A、B、G 而确定，把 (a, b) 看作已知点，利用重心坐标和顶点坐标的关系，可以确定点 C 的坐标。又，根据垂心的定义可知 $AO\perp BC$，$OB\perp CA$，从而可列出含 a、b 的两个方程，解方程组可以求出 a、b。

解： (1) 设点 C 的坐标为 (x, y)，则

$$\frac{x+a+3}{3}=1, \frac{y+b+4}{3}=1,$$

∴ $x=-a,\ y=-b-1,$

故点 C 的坐标为 $(-a, -b-1)$。

(2) ∵ $O(0, 0)$ 为垂心，∴ $AO\perp BC$。

∵ 直线 AO，BC 的斜率分别为

$$k_{AO}=\frac{4}{3},\ k_{BC}=\frac{b-(-b-1)}{a-(-a)}=\frac{2b+1}{2a},$$

$$\therefore\quad \frac{4(2b+1)}{3(2a)}=-1,$$

即

$$3a+4b=-2 \qquad ①$$

又 $BO\perp CA$，直线 BO，CA 的斜率分别为

$$k_{BO}=\frac{b}{a},\quad k_{CA}=\frac{4-(-b-1)}{3-(-a)}=\frac{5+b}{3+a},$$

$$\therefore\quad \frac{b(5+b)}{a(3+a)}=-1,$$

即

$$a^2+b^2+3a+5b=0 \qquad ②$$

解①，②构成的方程组，得

$$a=\frac{6}{5},\ b=-\frac{7}{5},\ 或\ a=-\frac{6}{5},\ b=\frac{2}{5}.$$

由于点 B 在第二象限，

$$\therefore\quad a=-\frac{6}{5},\ b=\frac{2}{5}.$$

在解析几何里常常通过建立方程，探求未知数，这种方法称为待定系数法，是解析几何最常用的方法，分点公式的推导就是范例之一。通过例 5 可以体会这种方法的一般思路。

基本练习题 1

1. 已知数轴上三点的坐标分别为 $A(-3)$、$B(5)$、$C(x)$，且 $|AC|=|BC|$，试求 x 的值。
2. 设 A、B、C 是直线上任意三点，求证：$AB+BC=AC$。
3. 设 A、B、C、D 是同一直线上的四个点，且

$$\frac{CA}{CB}=-\frac{DA}{DB}=\lambda$$

$(\lambda \neq \pm 1)$，又点O为AB的中点，求证：$OA^2 = OC \cdot OD$。

4. 设M、A、B、C为同一直线上四点，求证：

$$\frac{AM^2}{AB \cdot AC} + \frac{BM^2}{BC \cdot BA} + \frac{CM^2}{CA \cdot CB} = 1.$$

5. 求和x轴的距离与和y轴距离之比是3:4，且与两点$A(1,2)$、$B(-3,4)$等距离的点P的坐标。

6. 在正方形$ABCD$中，过一个顶点D作对角线CA的平行线DE，若$|CE| = |AC|$，且CE交边DA于点F，如图1.6。

(1) 试求点E的坐标；

(2) 证明：$|AE| = |AF|$。

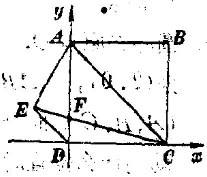

图 1.6

7. 设D为$\triangle ABC$边BC上一点，而$BD = 2DC$，求证：

$$|AB|^2 + 2|AC|^2 = 3|AD|^2 + 6|CD|^2.$$

8. 平行四边形$ABCD$中，$|BC| = 2|AB|$，若将AB向两方延长使$|AE| = |AB| = |BF|$，求证：$CE \perp DF$。

9. 已知平行四边形$ABCD$的三个顶点坐标分别为$A(0,0)$、$B(2,1)$、$C(5,6)$，求第四顶点D的坐标，并求对角线之长。

10. 试求两点$A(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$、$B(a\cos\beta, a\sin\beta)$之间的距离。

11. 如图1.7中，正方形$ABCD$，过点D的任意一直线交BC于E，交AB的延长线交于点F，求证：$|DE| + |DF| \geqslant 2|BD|$。

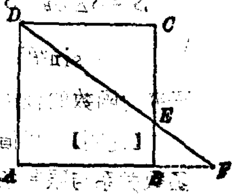

图 1.7

12. 已知三角形三顶点坐标分别为$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$，三边长为$|BC| = a$，$|AC| = b$，$|AB| = c$，求此三角形内心的坐标。

13. 设A、B两点坐标分别为$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，以Ox为始边，AB为终边的角为α。点A、B在x、y轴上的射影分别为M_1、M_2及N_1、N_2，求证：$M_1M_2 = x_2 - x_1 = |AB|\cos\alpha$，$N_1N_2 = y_2 - y_1 = |AB|\sin\alpha$。

14. 以三定点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$ 为顶点的三角形 ABC 内部有一动点 $P_0(x_0, y_0)$，作以 BP 与 CP 为两边的平行四边形 $BPCD$，CP 与 AP 为两边的平行四边形 $CPAE$，AP 与 BP 为两边的平行四边形 $APBF$，若 G 为 $\triangle DEF$ 的重心.（1）求 G 的坐标；（2）证明 GP 经过与 P 位置无关的一个定点，并求此定点的坐标。

15. 圆心在原点 O，半径等于 1 的上半圆上有一动点 B，定点 A 的坐标为 $(2, 0)$，$\triangle ABC$ 是正三角形（A、B、C 顺时针序），当 B 点运动到什么位置时，四边形 $OACB$ 的面积最大？

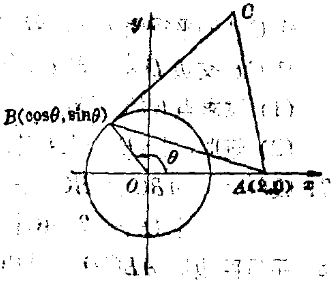

图 1.8

提示：四边形 $OACB$ 的面积 S 随点 B 的位置变化而变化，故可取 $\angle AOB=\theta$ 为自变量建立 S 与 θ 的函数关系：

$$S = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\times 2\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{4}\left[(\cos\theta-2)^2 + \sin^2\theta\right] \quad \theta\in[0, \pi),$$

研究此函数的极值，即可获解。

【说明】 极值问题，一般根据题意，选取适当的自变量，建立函数关系与限制条件（这称之为建立数学模型），然后研讨此函数的极值，即可获解。

二、直线的方程

课本中直线方程是从一次函数的图象引进的，它是曲线与方程这一重大概念的先导，又是研究直线与直线的位置关系和两直线的夹角，点线距离等几何量的工具，必须熟练地掌握直线的各种方程：点斜式，斜截式，截距式，两点式，一般式。

不仅要会熟练地代公式，还应从公式的推导过程中掌握根据两个条件确定一条直线的各种方法，这是本单元的重点。本单元还有两节选学内容：二元一次等式表示的区域和直线型经验公式，介绍了直线方程的实际应用。

【学习指导和例题】

1．关于函数的图象

课本是从一次函数的图象引入直线方程的，所以应该先弄清函数图象的定义，这在代数中是没有明确定义的，那么究竟什么叫函数的图象呢？在直角坐标系里函数 $y=f(x)$ 的图象定义如下：

定义：满足函数关系 $y=f(x)$ 的实数对 (x, y) 的全体，在直角坐标系里对应的点集：$\{(x, y): y=f(x)\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图象 F。

按此定义，可知凡满足函数关系 $y=f(x)$ 的实数对 (x, y) 在直角坐标平面内对应点都在函数图象 F 上；反过来，函数图象 F 上任意一点的坐标，都满足函数关系。如果把函数关系看作二元方程 $y-f(x)=0$，上述定义即方程 $y-f(x)=0$ 的曲线的定义，弄清这一点对下一章学习曲线方程的概念是完全必要的，也是真正理解直线的方程所不可少的。

在课本p.17～18点斜式的推导过程中有如下一段话：“可以验证，直线 l 上的每个点的坐标都是这个方程的解；反过来，以这个方程的解为坐标的点都在直线 l 上，所以这个方程就是过点 P_1，斜率为 k 的直线 l 的方程。”

为什么，证明点斜式要经过上述两方面的验证呢？又是怎样验证的呢？

要证明经过点 P_1，斜率为 k 的直线 l 方程是 $y-y_1=$