

面向21世纪高等学校辅导教材

微积分题解 (下册)

同济大学·微积分·习题选解
试题选解

主编：周泰文 王东生

编者：王东生 王家宝 刘后邗
周泰文 俞政

华中科技大学出版社

面向 21 世纪高等学校辅导教材

微积分题解

(下册)

同济大学微积分习题选解

试 题 选 解

主 编 周泰文 王东生

编 者 (以姓氏笔画为序)

王东生 王家宝 刘后邗

周泰文 俞 政

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分题解(下册)/周泰文 王东生 主编

武汉:华中科技大学出版社, 2002年2月

ISBN 7-5609-2504-9

I. 微…

II. ①王… ②王… ③刘… ④周… ⑤俞…

III. 微积分-题解

IV. O172

微积分题解(下册)

周泰文 王东生 主编

责任编辑:李立鹏

封面设计:刘 卉

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

录 排:武汉市彩艺广告工作室

印 刷:汉川市地税局印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:14.875

字数:357 000

版次:2002年2月第1版 印次:2002年3月第2次印刷

印数:5 001--11 000

ISBN 7-5609-2504-9/O·233

定价:17.50元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

前 言

我们于1994年出版的《新编高等数学题解》上、下册,已发行了十多万套.该书于1996年被全国大学出版社协会评为“畅销书”并授予“荣誉奖”.2000年12月又被“中国书刊发行业协会”评为“全国优秀畅销书”.

在教育部面向21世纪教改计划和工科数学“九五”规划的指引下,我们保持上述辅导教材的特色,吸取了读者的意见和同类书的优点,又编写了本书,希望能配合本课程(“微积分”或“高等数学”)各种版本的教材,有益于广大读者.

同济大学编的《高等数学》曾荣获国家教委优秀教材一等奖.他们新编的《微积分》,贯彻了教改精神,保持了传统教材的优点,并将数学软件的使用引入本课程教学中,我们从中选题精解,意在借誉育才.

要学好本课程,必须深刻理解基本理论(概念、定理、体系);提高综合运用及数学建模能力.为前者,我们提炼出每章的“内容提要”,并精编了“是非题题解”;为后者,我们在“习题选解”中较详细地解答了各类典型题(我们认为,对教本中的习题只编选解对教学更为有利,既辅导学生模仿范例,又留给他们用武之地);在每节习题后均归纳出“解后小结”,用以引导学生掌握精要、提高能力;还精选了若干考研试题及考研水平的综合运用与数学建模的范例编入各章的“综合题题解”中.

本书由李立鹏、周泰文、王东生策划,数位老师通力合作编成.参加编写工作的有刘后刊(第一、二章习题选解及全书是非题题解)、周泰文(第三、五章习题选解及全书内容提要)、王东生(第六、七、八章习题选解及全书部分综合题题解)、俞政(第四、九章习题选解及全书部分综合题题解)、王家宝(附录,对数学软件作了使用说明,并用上来机解答了同济大学微积分教材各章总习题中指定用此软件解答的全部习题).全书由周泰文组稿、统稿、定稿.

在本书即将面世之际,我们要特别感谢中南大学肖果能教授,他详细审定了全部初稿;还要特别感谢华中科技大学出版社的领导、责编、审校、美编、制图、监印、发行等有关同志及中南大学铁道学院印刷厂和长沙湘敏复印部为本书付出的巨大辛劳.

由于水平有限,时间仓促,不妥之处切望同行、读者指正.

编 者

2001年2月28日于

中南大学铁道学院

目 录

第五章 向量代数与空间解析几何	(1)
一、内容提要	(1)
二、习题选解	(5)
习题 5-1 向量及其线性运算	(5)
习题 5-2 向量的乘法运算	(8)
习题 5-3 平面与直线	(12)
习题 5-4 曲面	(20)
习题 5-5 曲线	(24)
总习题五	(29)
三、是非题题解	(43)
四、综合题题解	(47)
第六章 多元函数微分学	(61)
一、内容提要	(61)
二、习题选解	(65)
习题 6-1 多元函数的基本概念	(65)
习题 6-2 偏导数	(67)
习题 6-3 全微分	(72)
习题 6-4 复合函数的求导法则	(75)
习题 6-5 隐函数的求导公式	(80)
习题 6-6 方向导数与梯度	(87)
习题 6-7 多元函数微分学的几何应用	(90)
习题 6-8 多元函数的极值	(96)
总习题六	(103)
三、是非题题解	(113)
四、综合题题解	(120)
第七章 重积分	(138)
一、内容提要	(138)

二、习题选解	(143)
习题 7-1 重积分的概念与性质	(143)
习题 7-2(1) 利用直角坐标计算二重积分	(146)
习题 7-2(2) 利用极坐标计算二重积分	(153)
习题 7-2(3) 二重积分的换元法	(158)
习题 7-3 三重积分的计算	(163)
习题 7-4 重积分应用举例	(171)
总习题七	(178)
三、是非题解	(187)
四、综合题解	(190)
第八章 曲线积分与曲面积分	(213)
一、内容提要	(213)
二、习题选解	(220)
习题 8-1 数量值函数的曲线积分(第一类曲线积分)	(220)
习题 8-2 数量值函数的曲面积分(第一类曲面积分)	(225)
习题 8-3 向量值函数在定向曲线上的积分(第二类曲线积分)	(230)
习题 8-4 格林公式	(240)
习题 8-5 向量值函数在定向曲面上的积分(第二类曲面积分)	(247)
习题 8-6 高斯公式与散度	(252)
习题 8-7 斯托克斯公式与旋度	(257)
总习题八	(263)
三、是非题解	(271)
四、综合题解	(276)
第九章 无穷级数	(304)
一、内容提要	(304)
二、习题选解	(312)
习题 9-1 常数项级数的概念与基本性质	(312)
习题 9-2 正项级数及其审敛法	(316)

习题 9-3 绝对收敛与条件收敛	(325)
习题 9-4 幂级数	(329)
习题 9-5 函数的泰勒级数	(335)
习题 9-6 函数的幂级数展开式的应用	(343)
习题 9-7 傅里叶多项式	(348)
习题 9-8 傅里叶级数及其收敛性质	(352)
习题 9-9 一般周期函数的傅里叶级数	(360)
总习题九	(366)
三、是非题题解	(380)
四、综合题题解	(388)
附 录 利用数学软件 Mathematica 上机解题	(420)
模拟考试题	(434)
某重点大学高等数学(上)试题	(434)
简解或答案	(437)
某重点大学高等数学(下)试题	(440)
简解或答案	(443)
2001 年全国攻读硕士学位研究生入学考试试题	(446)
数学一试题中微积分部分	(446)
参考解答	(449)
数学二试题中微积分部分	(456)
参考解答	(459)
参考书目	(464)

第五章 向量代数与空间解析几何

一、内容提要

1. 向量代数

向量是既有大小,又有方向的量.模长为1的向量叫做单位向量或幺矢;
 i, j, k 是空间直角坐标系中与三轴同向的单位向量.

(1) 向量的概念

设向量 a 的起点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 终点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, a 在三坐标轴上的投影分别为 a_x, a_y, a_z , 则

$$\begin{aligned} a &= (a_x, a_y, a_z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \quad (\text{坐标表示式}) \\ &= (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k \quad (\text{分向量表示式}). \end{aligned}$$

$$a \text{ 的模(或范数)} \quad |a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

$$a \text{ 的方向角} \quad \alpha = (\hat{a}, i), \quad \beta = (\hat{a}, j), \quad \gamma = (\hat{a}, k).$$

$$\begin{aligned} a \text{ 的方向余弦} \quad \cos\alpha &= \frac{a_x}{|a|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|a|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|a|}, \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1. \end{aligned}$$

a 的方向数 满足 $\frac{m}{\cos\alpha} = \frac{n}{\cos\beta} = \frac{p}{\cos\gamma}$ 的 m, n, p 叫做 a 的方向数.

$$\begin{aligned} \text{和 } a \text{ 同向的单位向量 } e_a &= \frac{a}{|a|} = \frac{a_x}{|a|}i + \frac{a_y}{|a|}j + \frac{a_z}{|a|}k \\ &= (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \end{aligned}$$

(2) 向量的运算

设 $a = (a_x, a_y, a_z)$, $b = (b_x, b_y, b_z)$, $c = (c_x, c_y, c_z)$, 则

$$1^\circ a \pm b = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z),$$

$$2^\circ \text{数乘 } \lambda a \triangleq (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z) (\lambda \text{ 是实数}),$$

3° 数量积(点积、内积).

$$a \cdot b \triangleq |a| |b| \cos(\hat{a}, \hat{b}) = |a| \text{Prj}_a b = |b| \text{Prj}_b a = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

$$(1^\circ) (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arccos \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}; \quad (2^\circ) \mathbf{a}^2 \triangleq \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2;$$

$$(3^\circ) \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

4° 向量积(叉积、外积)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \Leftrightarrow \begin{cases} |\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \\ \mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \text{ 且 } \mathbf{c} \perp \mathbf{b}, \\ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ 成右手系.} \end{cases}$$

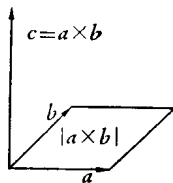


图5-1

$$(1^\circ) \text{ 反交换律 } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

(2°) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ 的几何意义是以 \mathbf{a}, \mathbf{b} 为两邻边的平行四边形的面积(如图 5-1);

$$(3^\circ) \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x);$$

$$(4^\circ) \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

$$5^\circ \text{ 混合积 } [\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}] \triangleq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix};$$

(1°) $|[\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}]|$ 的几何意义是以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为共点三棱的平行六面体的体积;

(2°) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面 $\Leftrightarrow [\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}] = 0$.

2. 平面与直线

(1) 平面的方程

1° 点法式 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ 表示通过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 并以 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 为法向量的平面.

2° 一般式 $Ax + By + Cz + D = 0$ (A, B, C 不全为 0) 表示以 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 为法向量的平面;

特例 (1°) $D = 0$ 时, 平面过原点;

$$(2^\circ) \begin{matrix} B = 0 \\ A = 0 \text{ 时, 平面平行于(或过)} \\ C = 0 \end{matrix} \begin{matrix} y \\ x \text{ 轴;} \\ z \end{matrix}$$

(3°) $B=0$ 且 $C=0$ yOz
 $A=0$ 且 $B=0$ 时, 平面与 xOy 面平行(或重合).
 $C=0$ 且 $A=0$ zOx

3° 截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 表示在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的截距分别为 a, b, c (a, b, c 均不为 0) 的平面.

(2) 直线的方程

1° 对称式 $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ 表示通过点 (x_0, y_0, z_0) 并以 $s = (m, n, p)$ 为方向向量的直线;

2° 参数式

$$x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt \quad (-\infty < t < +\infty);$$

3° 一般式 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$ $\frac{A_1}{A_2}, \frac{B_1}{B_2}, \frac{C_1}{C_2}$ 中至少有两个

不等, 其方向向量为 $s = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$.

(3) 距离公式

1° 两点距离 $|AB| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}$;

2° 点面距离 点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

3° 点线距离 $d = \frac{|MM_0 \times s|}{|s|}$ (图 5-2).

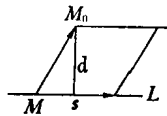


图5-2

3. 曲面的方程

(1) 旋转曲面的方程

将 yOz 面上的曲线 $f(y, z) = 0$, 绕 z (或 y) 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为

$$f(\pm \sqrt{y^2 + x^2}, z) = 0 \text{ 或 } f(y, \pm \sqrt{z^2 + x^2}) = 0.$$

仿此可得其它两坐标面上的曲线, 绕其一轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.

(2) 二次曲面的方程

1° 柱面 $(1^\circ) \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1; (2^\circ) y^2 = \pm 2px; (a, b, p > 0).$

这两个方程均缺 z , 在空间解析几何中, 它们都是母线平行于 z 轴的柱面方程, 其中:

(1°) 中左端, 若两项均正, 则为椭圆柱面, 特别当 $a = b$ 时为圆柱面; 若两异号, 则为双曲柱面; 若两项均负, 则无图.

(2°) 为抛物柱面.

2° 椭球面、双曲面 $\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c > 0).$

左端三项中 (1°) 若符号全正, 则为椭球面, 特别当 a, b, c 均相等时为球面. 仅二个相等时为旋转椭球面; (2°) 若仅有一个负号, 则为单叶双曲面; (3°) 若有两个负号, 则为双叶双曲面; (4°) 若符号全负则无图.

3° 锥面 $\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (a, b, c > 0);$

左端三项中, (1°) 若符号不全同, 则为锥面; (2°) 若符号全相同, 则为原点.

4° 抛物面 $\pm \frac{x^2}{2p^2} \pm \frac{y^2}{2p} = z \quad (p, q > 0);$

左端两项中, (1°) 若符号相同, 则为椭圆抛物面, 特别当 $p = q$ 时为旋转抛物面; (2°) 若符号不同, 则为双曲抛物面.

4. 空间曲线的方程

(1) 参数式 $x = x(t), y = y(t), z = z(t).$

给定 $t = t_1$ 时, 就得到曲线上的一个点 (x_1, y_1, z_1) ; 随着 t 的变动, 便可得到曲线上的全部点.

(2) 一般式(或面交式)

$$\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (*)$$

空间曲线在 xOy 坐标面上的投影 从方程组 (*) 消去 z , 得到包含曲线 Γ 的投影柱面 $H(x, y) = 0$; 将此方程与 $z = 0$ 联立, 则曲线

$$\begin{cases} H(x, y) = 0, \\ z = 0; \end{cases}$$

包含线 Γ 在 xOy 面上的投影. 仿此, 可得到包含曲线 Γ 在其余两个坐标面上的投影的曲线方程.

二、习题选解

习题 5-1 向量及其线性运算

5. 1. 1(2) 已知点 $A(2, 1, 4), B(4, 3, 10)$,

(2) 写出以线段 AB 为直径的球面方程.

解 球心坐标 $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{4+10}{2} \right) = (3, 2, 7)$.

$$\begin{aligned} \text{球半径 } r &= \frac{1}{2} |AB| = \frac{1}{2} \sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2 + (10-4)^2} \\ &= \sqrt{11}. \end{aligned}$$

故所求的球面方程为 $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-7)^2 = 11$.

5. 1. 2 设长方体各棱与坐标轴平行, 已知长方体的两个顶点的坐标, 试写出余下六个顶点的坐标:

(2) $(4, 3, 0), (1, 6, -4)$,

解 如图 5-2, 中

$(1, 3, 0), (1, 6, 0), (4, 6, 0),$

$(1, 3, -4), (4, 3, -4),$

$(4, 6, -4)$ 即为所求.

5. 1. 3 证明: 三点 $A(1, 0, -1), B(3, 4, 5), C(0, -2, -4)$ 共线.

证 因为 $\overrightarrow{AB} = (2, 4, 6)$,

$$\overrightarrow{AC} = (-1, -2, -3),$$

所以 $\overrightarrow{AB} = (-2)\overrightarrow{AC}$. 由于 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 反向且共有 A 点, 故 A, B, C 共线.

5. 1. 5 已知点 $A(3, -1, 2), B(1, 2, -4), C(-1, 1, 2)$, 试求点 D , 使得以 A, B, C, D 为顶点的四边形为平行四边形.

解 因为平行四边形两对角线互相平分, 所以 AC 的中点 M 亦为 BD 的中点. 而 M 的坐标:

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{2+2}{2} \right) = (1, 0, 2).$$

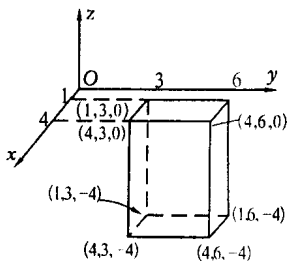


图5-3

设 D 的坐标为 (x, y, z) , 在 BD 上, 可利用 B, M 的坐标求 D 的坐标. 由中点坐标公式得

$$\frac{1+x}{2} = 1, \quad \frac{2+y}{2} = 0, \quad \frac{-4+z}{2} = 2.$$

于是易得 $x = 1, y = -2, z = 8$, 故 D 的坐标为 $(1, -2, 8)$.

5.1.7 用向量法证明: 三解形两边中点的连线平行于第三边, 且长度等于第三边的长度的一半.

证 如图 5-4, D, E 分别为 AB, AC 的中点, 则有

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

故 $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$ 且 $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC}|$.

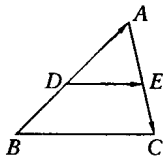


图5-4

5.1.8 已知两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$ 和 $M_2(3, 0, 2)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(3-4)^2 + (0-\sqrt{2})^2 + (2-1)^2} = 2.$

设 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向角分别为

$$\alpha = (\overrightarrow{M_1M_2}, i), \beta = (\overrightarrow{M_1M_2}, j), \gamma = (\overrightarrow{M_1M_2}, k),$$
 因为

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3-4, 0-\sqrt{2}, 2-1) = (-1, -\sqrt{2}, 1),$$

所以 $\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \cos\beta = \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\gamma = \frac{1}{2},$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi, \quad \beta = \frac{3}{4}\pi, \quad \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

5.1.9 设 $a = 3i + 5j + 8k, b = 2i - 4j - 7k, c = 5i + j - 4k$, 求向量 $l = 4a + 3b - c$ 在 x 轴上的投影以及在 y 轴上的分向量.

解 $l = 4(3i + 5j + 8k) + 3(2i - 4j - 7k) - (5i + j - 4k)$
 $= 13i + 7j + 15k,$

故 l 在 x 轴上的投影 $\text{Prj}_x l = 13; l$ 在 y 轴上的分向量为 $7j$.

5.1.10 设 $a = i + j + k, b = i - 2j + k, c = -2i + j + 2k$, 试用单

位向量 e_a, e_b, e_c 表示向量 i, j, k .

$$\begin{aligned} \text{解 } e_a &= \frac{a}{|a|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k, \\ e_b &= \frac{b}{|b|} = \frac{(1, -2, 1)}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}i - \frac{2}{\sqrt{6}}j + \frac{1}{\sqrt{6}}k, \\ e_c &= \frac{c}{|c|} = \frac{(-2, 1, 2)}{3} = -\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k. \end{aligned}$$

在以上三式中, 将 i, j, k 看成三个未知量, 将 e_a, e_b, e_c 看成常量, 解线性方程组, 即得

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} e_a & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ e_b & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ e_c & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \\ i &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3}e_a & 1 & 1 \\ \sqrt{6}e_b & -2 & 1 \\ 3e_c & 1 & 2 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{3}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{12}e_a + \frac{\sqrt{6}}{12}e_b - \frac{3}{4}e_c. \end{aligned}$$

仿上, 利用三阶行列式, 可求得 j, k 的表达式.

解 后 小 结

1. 建立空间直角坐标系,按点的坐标在坐标系中确定点的位置以及描绘空间几何形体的图形是多元微积分的一个重要基础.5.1.2(2)是最简单的情形,读者必须逐渐培养这种空间定位、作图的能力;

2. 在空间直角坐标系中,许多公式(如两点距离、中点坐标、球面方程…等等)都是平面上相应公式的推广,掌握了这个规律就不难理解和记住许多公式;

3. 向量是研究空间几何形体的相互位置关系及多元微积分的一个必要工具.

(1) 由起、终两点的坐标,就确定了向量的一切,如模、方向角、方向余弦、单位向量(有与它同向、反向两种情形)、在坐标轴上的投影及分向量等等(如5.1.8、5.1.9、5.1.10).

(2) 用向量方法来证明几何命题将带来很多方便,如5.1.7中的证明,就比平面几何中的证法简明,读者要注意培养运用这种方法的能力.

习题 5-2 向量的乘法运算

5.2.1 设 $a = 3i - j - 2k, b = i + 2j - k$, 求

(2) $a \times b$.

$$\text{解 } a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5i + j + 7k.$$

(4) $\text{Pr}_{j,b}a$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \text{Pr}_{j,b}a &= |a| \cos(\hat{a}, b) = |a| \frac{a \cdot b}{|a||b|} \\ &= \frac{3 \times 1 + (-1) \times 2 + (-2) \times (-1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

5.2.2 设 $a = 2i - 3j + k, b = i - j + 3k, c = i - 2j$, 求

(2) $(a \times b) \times c$.

$$\text{解 } a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -8i - 5j + k,$$

$$(a \times b) \times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -8 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2i + j + 21k.$$

$$(4) (a \cdot b)c - (a \cdot c)b.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (a \cdot b)c &= [2 \times 1 + (-3) \times (-1) + 1 \times 3](i - 2j) \\ &= 8i - 16j. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a \cdot c)b &= [2 \times 1 + (-3) \times (-2) + 1 \times 0](i - j + 3k) \\ &= 8i - 8j + 24k. \end{aligned}$$

$$\text{原式} = (8i - 16j) - (8i - 8j + 24k) = -8j - 24k.$$

5.2.3 设向量 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$, 证明:

$$(1) a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2);$$

$$(2) a \times b = b \times c = c \times a.$$

证(1) 由 $a + b + c = 0$ 得 $a = -(b + c)$.

$$\text{从而有 } a^2 = b^2 + 2b \cdot c + c^2, \quad b \cdot c = -\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2), \quad \textcircled{1}$$

$$\text{同理可得 } a \cdot b = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2); \quad \textcircled{2}$$

$$c \cdot a = -\frac{1}{2}(c^2 + a^2 - b^2). \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \text{ 得 } a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a &= -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2), \\ &= -\frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2). \end{aligned}$$

证(2) 因为 $a = -(b + c)$, 所以

$$a \times b = -(b + c) \times b = -b \times b - c \times b = b \times c.$$

仿上可证得 $b \times c = c \times a$,

故有 $a \times b = b \times c = c \times a$.

5.2.5 设 $a = 3i + 5j - 2k, b = 2i + j + 9k$. 试求 λ 的值, 使得

(1) $\lambda a + b$ 与 z 轴垂直;

(2) $\lambda a + b$ 与 a 垂直, 并证明此时 $|\lambda a + b|$ 取最小值.

解(1) $\lambda a + b = (3\lambda + 2)i + (5\lambda + 1)j + (-2\lambda + 9)k$,

$$(\lambda a + b) \perp k \Leftrightarrow (3\lambda + 2, 5\lambda + 1, -2\lambda + 9) \cdot (0, 0, 1) = 0.$$

于是得 $-2\lambda + 9 = 0$, $\lambda = \frac{9}{2}$.

$$(3) (\lambda a + b) \perp a \Leftrightarrow (3\lambda + 2, 5\lambda + 1, -2\lambda + 9) \cdot (3, 5, -2) = 0,$$

于是得 $(9\lambda + 6) + (25\lambda + 5) + (4\lambda - 18) = 0$,

$$38\lambda - 7 = 0, \quad \lambda = \frac{7}{38}.$$

欲证 $\lambda = \frac{7}{38}$ 时,

$f(\lambda) = |\lambda a + b| = \sqrt{(3\lambda + 2)^2 + (5\lambda + 1)^2 + (-2\lambda + 9)^2}$ 最小,
注意到函数

$$g(\lambda) = (3\lambda + 2)^2 + (5\lambda + 1)^2 + (-2\lambda + 9)^2 = 38\lambda^2 - 14\lambda + 86$$

与 $f(\lambda)$ 有相同的最值点,因而只需对 $g(\lambda)$ 进行计算.

令 $g'(\lambda) = 76\lambda - 14 = 0$, 求得 $\lambda = \frac{7}{38}$, 而 $g''(\lambda) = 76 > 0$, 所

以当 $\lambda = \frac{7}{38}$ 时, $g(\lambda)$ 因而 $f(\lambda) = |\lambda a + b|$ 取最小值.

5.2.6 证明如下的平行四边形法则

$$2(|a|^2 + |b|^2) = |a + b|^2 + |a - b|^2,$$

说明这一法则的几何意义.

证 右边 $= (a + b) \cdot (a + b) + (a - b) \cdot (a - b)$
 $= a^2 + 2a \cdot b + b^2 + a^2 - 2a \cdot b + b^2$
 $=$ 左边.

5.2.7 用向量法证明:

(2) 三角形的三条高交于一点.

证 如图 5-4, 设 $\triangle ABC$ 中 AB, AC 上的高 CF, BE 交于 H 点, 以下证明 $AH \perp BC$. 只需证 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

由于 $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, 所以

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} \\ &\quad + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}) \cdot \overrightarrow{BA} + 0 \end{aligned}$$

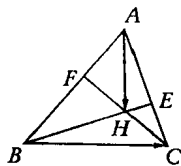


图 5-5