

同济大学力学辅导系列丛书...

# 结构力学

## 学习方法及解题指导

徐新济 李恒增 编著

JIE GOU LI XUE XUE XI FANG FA JI JIE TI ZHI DAO

同济大学出版社

同济大学力学辅导系列丛书

# 结构力学学习方法及解题指导

徐新济 李恒增 编著



同济大学出版社

## 内容提要

本书是同济大学力学辅导系列丛书之一。内容符合多学时结构力学课程的教学要求。

全书共分 11 章,内容包括:平面体系的几何组成分析、静定结构的内力计算、静定结构的位移计算、力法、位移法和剪力分配法、力矩分配法、影响线、矩阵位移法、结构的动力计算、结构的极限荷载和结构的稳定计算。

本书对结构力学内容作了提纲挈领、由浅入深的分析,选择典型例题来指导解题思路,各章附有习题及其答案、阶段测试题及其答案。

本书可供高等工科院校本科生和函授大学、成人院校、自学考试学生以及有关技术人员参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

结构力学学习方法及解题指导/徐新济,李恒增

编著. —上海:同济大学出版社,2002.10

ISBN 7-5608-2417-X

I. 结… II. ①徐… ②李… III. 结构力学—高等学校—教学参考资料 IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 021742 号

同济大学力学辅导系列丛书

## 结构力学学习方法及解题指导

徐新济 李恒增 编著

责任编辑 解明芳 责任校对 郁 峰 封面设计 精 英

出 版  
发 行

同济大学出版社

(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂印刷

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 27.75

字 数 555 000

印 数 1—5 200

版 次 2002 年 10 月第一版 2002 年 10 月第一次印刷

书 号 ISBN 7-5608-2417-X/O · 240

定 价 29.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换

## 前 言

本书是学习结构力学的辅助参考用书。编写本书的目的在于帮助读者掌握结构力学的基本内容和计算方法。

本书对结构力学的基本概念和基本原理作了较为透彻的阐述,并注意到初学者在学习过程中常会产生的问题来选择典型例题,对解题方法和在解题过程中需要注意的问题加以指导。书中附有习题和阶段测试题,并给出答案,供学习者练习。

本书由徐新济和李恒增编著。徐新济编写第一章至第五章、第八、十、十一章,李恒增编写第六、七、九章。

限于编者水平,书中难免有疏漏和错误,恳请读者批评指正。

编 者  
2001 年 8 月

## 目 录

|                 |      |
|-----------------|------|
| 第一章 平面体系的几何组成分析 | (1)  |
| 一、基本内容与学习指导     | (1)  |
| 二、例题分析          | (6)  |
| 三、习题            | (11) |
| 四、习题答案          | (13) |
| 第二章 静定结构的内力计算   | (14) |
| 第一节 静定梁和静定平面刚架  | (14) |
| 一、基本内容与学习指导     | (14) |
| 二、例题分析          | (20) |
| 三、习题            | (32) |
| 四、习题答案          | (35) |
| 第二节 三铰拱         | (38) |
| 一、基本内容与学习指导     | (38) |
| 二、例题分析          | (40) |
| 三、习题            | (46) |
| 四、习题答案          | (48) |
| 第三节 静定平面桁架与组合结构 | (48) |
| 一、基本内容与学习指导     | (48) |
| 二、例题分析          | (52) |
| 三、习题            | (66) |
| 四、习题答案          | (70) |
| 第三章 静定结构的位移计算   | (71) |
| 一、基本内容与学习指导     | (71) |
| 二、例题分析          | (77) |
| 三、习题            | (85) |
| 四、习题答案          | (88) |
| 第四章 力 法         | (89) |

---

|               |       |
|---------------|-------|
| 一、基本内容与学习指导   | (89)  |
| 二、例题分析        | (97)  |
| 三、习题          | (111) |
| 四、习题答案        | (113) |
| 第五章 位移法和剪力分配法 | (115) |
| 第一节 位移法       | (115) |
| 一、基本内容与学习指导   | (115) |
| 二、例题分析        | (119) |
| 三、习题          | (138) |
| 四、习题答案        | (140) |
| 第二节 剪力分配法     | (142) |
| 一、基本内容与学习指导   | (142) |
| 二、例题分析        | (144) |
| 三、习题          | (149) |
| 四、习题答案        | (150) |
| 第六章 力矩分配法     | (151) |
| 一、基本内容与学习指导   | (151) |
| 二、例题分析        | (157) |
| 三、习题          | (179) |
| 四、习题答案        | (181) |
| 第七章 影响线       | (183) |
| 一、基本内容与学习指导   | (183) |
| 二、例题分析        | (201) |
| 三、习题          | (225) |
| 四、习题答案        | (228) |
| 第八章 矩阵位移法     | (230) |
| 一、基本内容与学习指导   | (230) |
| 二、例题分析        | (239) |
| 三、习题          | (264) |
| 四、习题答案        | (265) |
| 第九章 结构的动力计算   | (267) |
| 一、基本内容与学习指导   | (267) |

---

|                    |       |
|--------------------|-------|
| 二、例题分析 .....       | (309) |
| 三、习题 .....         | (352) |
| 四、习题答案 .....       | (355) |
| 第十章 结构的极限荷载 .....  | (357) |
| 一、基本内容与学习指导 .....  | (357) |
| 二、例题分析 .....       | (364) |
| 三、习题 .....         | (376) |
| 四、习题答案 .....       | (377) |
| 第十一章 结构的稳定计算 ..... | (378) |
| 一、基本内容与学习指导 .....  | (378) |
| 二、例题分析 .....       | (387) |
| 三、习题 .....         | (405) |
| 四、习题答案 .....       | (407) |
| 阶段测试题一 .....       | (408) |
| 阶段测试题二 .....       | (414) |
| 阶段测试题三 .....       | (420) |
| 参考答案 .....         | (429) |
| 阶段测试题一 .....       | (429) |
| 阶段测试题二 .....       | (431) |
| 阶段测试题三 .....       | (432) |
| 参考文献 .....         | (435) |

# 第一章 平面体系的几何组成分析

## 一、基本内容与学习指导

### (一) 几何组成分析的假定

体系的机动性是指在任意荷载作用下,体系本身发生刚体运动的可能性。因此,体系的组成分析采用下述两条假定:

1. 不考虑材料的变形;
2. 不以某种特定荷载分析判断。

### (二) 名词解释

#### 1. 几何不变体系

不考虑材料的变形,在任意荷载作用下,几何形状和位置保持不变的体系称为几何不变体系。

体系的几何不变性通过两个条件得到保证:(1) 体系中各刚片之间具有足够的约束(联系);(2) 各约束(联系)的布置合理。

#### 2. 几何可变体系

不考虑材料的变形,在任意荷载作用下会发生机械运动,不能保持原有几何形状和位置的体系称为几何可变体系。

几何可变体系包括几何常变体系和几何瞬变体系。几何常变体系缺少约束或约束布置不恰当,没有确定的几何形状和空间位置,可发生持续大量的刚体位移。几何瞬变体系具有足够数量的约束,但是约束布置不恰当,在发生微小位移后,即成为几何不变体系,瞬变体系在很小荷载作用下,也会产生很大的内力。

#### 3. 刚片 自由度 约束

(1) 刚片 在平面体系中,不考虑材料变形的几何不变部分称为刚片。如一根梁、一根链杆、一个铰结三角形等(图 1-1)。

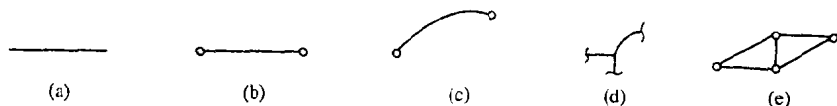


图 1-1

(2) 自由度 自由度是指物体或体系运动时可以独立变化的几何参数的数目。即确定物体或体系位置所需的独立坐标数。平面上的一个点有两个自由度,平面上



的一个刚片有三个自由度。

(3) 约束 用于限制体系运动的装置称为约束。减少一个自由度的装置称为一个约束。

### 1) 链杆和等效链杆

在几何组成分析中讨论的链杆为两端有铰的刚性直杆或曲杆。一根链杆相当于一个约束。只以两个铰与外界相联的刚片称为等效链杆(图 1-2)。等效链杆的作用与链杆相同。

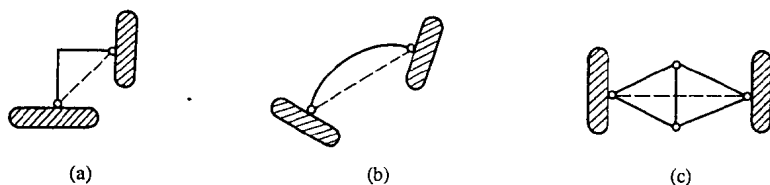


图 1-2

### 2) 单铰和复铰

联结两个刚片的铰称为单铰(图 1-3(a)), 一个单铰相当于两个约束。联结两个以上刚片的铰称为复铰, 联结  $n$  个刚片的复铰相当于  $n-1$  个单铰(图 1-3(b))。

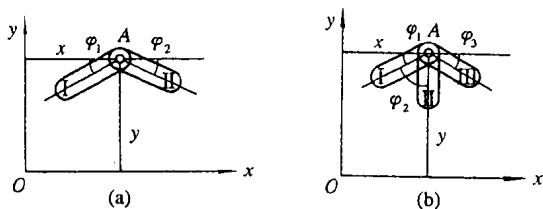


图 1-3

图 1-3(a): 在两个刚片中加入一个单铰后, 自由度减至 4。

图 1-3(b): 在三个刚片中加入一个复铰后, 自由度减至 5。

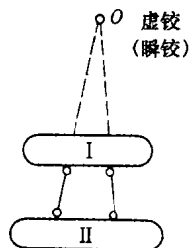


图 1-4

### 3) 虚铰

虚铰也称为瞬铰, 它是联结两个刚片的两链杆延长线的交点, 与单铰具有相同的约束作用(图 1-4)。

### 4) 单刚结点和复刚结点(图 1-5)

联结两个刚片的刚性结点称为单刚结点(图 1-5(a)), 它的约束作用是使两个刚片之间不发生相对的移动和转动, 一个单刚结点相当于三个约束。

联结两个以上刚片的刚性结点称为复刚结点(图 1-5(b))。

联结  $n$  个刚片的复刚结点相当于  $n-1$  个单刚结点。

#### 4. 必要约束和多余约束

根据约束是否减少体系的实际自由度, 可将它区分为必要约束和多余约束。



图 1-5

##### (1) 必要约束

影响体系实际自由度数目的增减的约束称为必要约束。必要约束具有布置合理的特点, 用以组成几何不变体系的最少约束都是必要约束。

##### (2) 多余约束

不改变体系实际自由度的约束称为多余约束。图 1-6(a) 所示刚架为几何不变体系, 三根支杆减少三个自由度。拆去其中任一支杆后, 自由度数目增加 1, 体系成为几何可变, 因此, 支杆①, ②, ③均为必要约束。

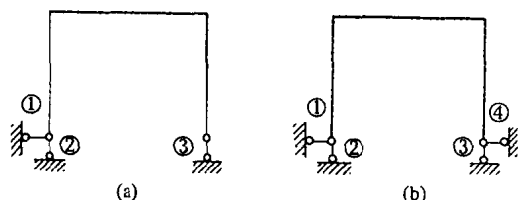


图 1-6

图 1-6(b) 所示刚架为几何不变体系, 四根支杆减少三个自由度, 因此其中只有三根支杆是必要约束。拆去任何一根水平支杆后, 刚架仍为几何不变, 自由度数目无增减, 因此水平支杆①或④为多余约束。拆去任何一根竖向支杆后, 刚架产生刚性

位移, 增加了一个自由度。所以, 竖向支杆②或③为必要约束。

#### 5. 计算自由度

用计算方法求得的体系自由度, 称为计算自由度  $W$ 。计算自由度  $W$  不一定能够反映体系的实际自由度。这是因为计算自由度公式是通过假设每个约束都使体系减少一个自由度而导出的。所以, 只有当体系上无多余约束时, 计算自由度与实际自由度才一致。计算自由度可按以下两种方法求得。

##### (1) 刚片法

刚片法是以刚片作为组成体系的基本构件来进行计算的, 用于平面刚片体系。其计算公式为

$$W = 3m - 3r - 2h - s \quad (1-1)$$

式中  $m$ ——刚片数;

$r$ ——单刚结点数;

$h$ ——单铰数;

$s$ ——支杆数。

##### (2) 铰结点法

铰结点法取铰结点作为体系的基本构件进行计算,用于平面铰结链杆体系。其计算公式为

$$W = 2j - b - s \quad (1-2)$$

式中  $j$ ——结点数;

$b$ ——杆件数;

$s$ ——支杆数。

计算自由度  $W$ 、体系的机动性、实际自由度  $\bar{W}$  三者之间的对应关系见表 1-1。

表 1-1 体系的计算自由度和机动性

| 计算自由度 | 约束情况                    | 体系性质        | 实际自由度       |
|-------|-------------------------|-------------|-------------|
| $W=0$ | 具有足够的必要约束,无多余约束         | 几何不变(静定结构)  | $\bar{W}=0$ |
|       | 缺少足够的必要约束,有多余约束         | 几何可变        | $\bar{W}>0$ |
| $W<0$ | ① 具有足够的必要约束<br>② 具有多余约束 | 几何不变(超静定结构) | $\bar{W}=0$ |
|       | ① 缺少足够的必要约束<br>② 具有多余约束 | 几何可变        | $\bar{W}>0$ |
| $W>0$ | 缺少足够的必要约束               | 几何可变        | $\bar{W}>0$ |

### (三) 几何不变体系的组成规则

#### 1. 三刚片规则

三个刚片之间用不在同一直线上的三个铰(实铰或虚铰)两两相联,组成无多余约束的几何不变体系。

#### 2. 两刚片规则

两个刚片之间用不交于一点也不相互平行的三根链杆相联或用一个铰和不通过该铰的链杆相联,组成无多余约束的几何不变体系。

#### 3. 两元片规则

一个刚片与一个点用两根不在同一直线上的链杆相联,组成无多余约束的几何不变体系。

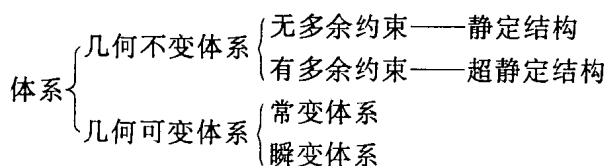
两元片规则还可简述为:在一个刚片上增加一个二元片,仍为几何不变体系。二元片是指用两根不在一条直线上的链杆联结一个新结点的构造。

在几何不变体系的三条组成规则中,提出了三个限制条件:(1)联结三个刚片的

三个铰不在一条直线上；(2) 联结两个刚片的三根链杆不交于一点也不相互平行；(3) 组成两元片的两链杆不在一条直线上，即两链杆间的夹角  $\alpha \neq 180^\circ$ 。如果体系的几何组成不能满足这些限制条件，则为几何可变体系。

#### (四) 平面体系的分类及其特征

##### 1. 分类



##### 2. 特征

###### (1) 无多余约束的几何不变体系

- 1) 按基本组成规则形成；
- 2) 三个刚片之间用两铰和一对平行链杆相联，两铰连线与平行链杆不平行；
- 3) 三个刚片之间用一个铰和两对互不平行的链杆相联；
- 4) 用静力平衡条件可求得全部反力和内力的确定值。

###### (2) 有多余约束的几何不变体系

除了必要约束之外，还有多余约束。用静力平衡条件不能求得全部反力和内力的确定值。

###### (3) 几何常变体系

缺少约束或约束布置不合理：

- 1) 刚片之间的约束数少于按三个基本规则要求的数目；
- 2) 两个刚片之间用三根相互平行且等长的链杆相联；
- 3) 两个刚片之间用全交于一个实铰的三根链杆相联；
- 4) 三个刚片之间用两个铰和与该两铰连线平行且等长的一对链杆相联；
- 5) 三个刚片之间用一个铰和两对平行且等长的链杆相联；
- 6) 三个刚片之间用三对平行且等长的链杆相联；
- 7) 几何可变体系一般无静力学解答，在个别力作用下，能保持平衡。

###### (4) 瞬变体系

约束布置不合理。

- 1) 两个刚片之间用三根相互平行但不等长的链杆相联；
- 2) 两个刚片之间用交于一虚铰的三根链杆相联；
- 3) 三个刚片之间用位于同一直线上的三个铰两两相联；
- 4) 三个刚片之间用两个铰和一对不等长的平行链杆相联，且该两铰连线与这对平行链杆相互平行；

5) 三个刚片之间用一个铰和两对平行但不等长的平行链杆相联;

6) 三个刚片用三对平行且不等长的链杆相联;

7) 反力和内力为无限大或为不定值。

#### (五) 几何组成分析要点

##### 1. 掌握组成分析的一般作法

(1) 直接按组成分析的三条规则分析体系,得出结论。

(2) 先求出计算自由度  $W$ ,若  $W > 0$ ,则体系为几何可变。此时, $W > 0$  是几何可变体系的充要条件。若  $W \leq 0$ ,应再按规则作分析。此时, $W \leq 0$  是几何不变体系的必要条件。

##### 2. 恰当地选择基本刚片

几何组成分析的关键问题在于恰当地选择基本刚片。基本刚片的选取应与刚片之间的联结方式相结合,当一种分析途径不能得到结果时,需重新选择刚片。

##### 3. 掌握组成分析的简化原则

对于杆件数目较多、或不能直接按几何组成基本规则分析的体系,应遵循以下几条原则作组成分析:

##### (1) 尽量暴露出分析的重点

由于增加或拆除二元片对体系的机动性质没有影响,因此,对易于观察出的几何不变部分可通过增加二元片扩大为组合刚片,或拆除二元片,简化体系的组成。

##### (2) 区分上部体系与基础之间的联结情况

当体系与基础之间以三根支杆相联,且三根支杆不交于一点也不相互平行,可先拆去这些支杆,只需分析上部体系的机动性即知整个体系的性质。

##### (3) 等效变换

对于不能直接利用规则进行分析的体系,可先作等效变换,即把体系中某个内部无多余约束的几何不变部分用另一个无多余约束的几何不变部分替换,并按原状况保持与其余部分的联系,然后再作分析。

#### (六) 注意点

1. 几何不变体系的简单组成规则可用于分析常见的体系。当体系不能用基本组成规则分析时,可采用其他分析方法如零载法等。

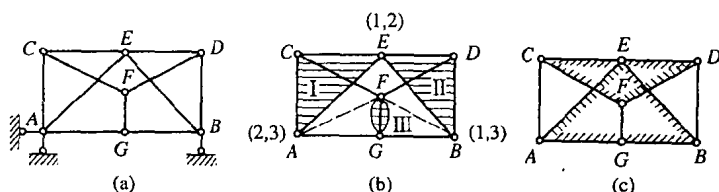
2. 作几何组成分析时,体系中的每一部分或每一约束都不可遗漏或重复使用。

3. 对于同一个体系,可以按不同的途径分析,但结论是相同的。

## 二、例题分析

**例 1-1** 试对例图 1-1(a)所示体系作几何组成分析。

**解** 1. 拆去支座链杆,分析上部体系(图(b))。



例图 1-1

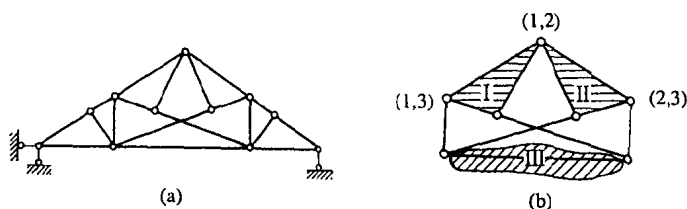
2. 取铰结三角形  $ACE, BDE$ , 杆件  $GF$  为刚片 I, II, III。三个刚片由不在一条直线上的三个铰两两相联, 符合三刚片规则。

3. 结论: 体系几何不变, 无多余约束。

讨论

如果按图(c)所示选取三角形  $CFDE$  和  $AGBE$  作为基本刚片, 则将得出错误的结论。 $CFDE$  和  $AGBE$  是铰结四边形, 为几何可变, 不能选作刚片。

例 1-2 试对例图 1-2(a)所示体系作几何组成分析。



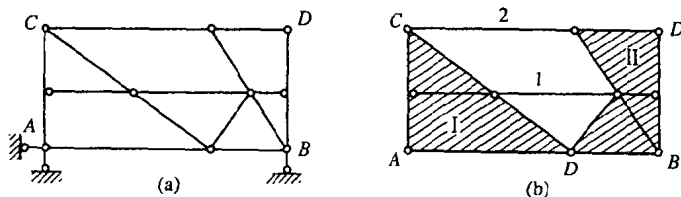
例图 1-2

解 1. 拆去支座链杆, 分析上部体系。

2. 在上部体系中拆去二元片, 选取刚片 I, II, III 如图(b)所示。三个刚片之间的联结符合三刚片规则。

3. 结论: 体系几何不变, 无多余约束。

例 1-3 试对例图 1-3(a)所示体系作几何组成分析。



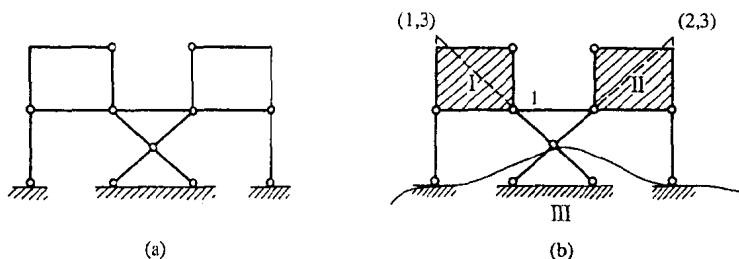
例图 1-3

解 1. 拆去支座链杆, 分析上部体系。

2. 按两刚片规则分析:取杆件  $AC$  和  $BD$  为基本刚片,在基本刚片上增加二元片后形成组合刚片 I 和 II (图(b)), I 和 II 之间由铰  $D$  和不通过该铰的链杆 1 和链杆 2 相联。

3. 结论:体系几何不变,有一个多余约束(链杆 1 或链杆 2)。

**例 1-4** 试对例图 1-4(a)所示体系作几何组成分析。



例图 1-4

**解** 1. 求计算自由度分析

由式(1-1)得  $W = 3m - 3r - 2h - s = 3 \times 13 - 2 \times 19 = 1$

$W > 0$ , 表明体系缺少必要约束, 为几何可变体系。

2. 按组成规则分析

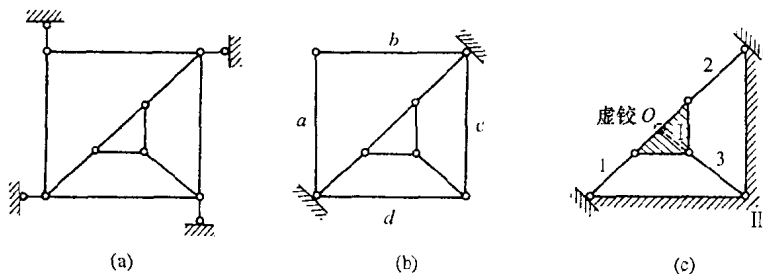
选取刚片 I, II, III 如图(b)所示(支座链杆数多于三根时, 基础必须选为刚片)。刚片 I 和 III 由虚铰(1,3)相联; 刚片 II 和 III 由虚铰(2,3)相联; 刚片 I 和 II 之间仅由链杆 1 相联, 缺少一个约束。刚片 I, II, III 之间的联结不符合三刚片规则。

3. 结论: 体系几何可变。

**讨论**

本例说明  $W > 0$  是体系几何可变的充要条件。

**例 1-5** 试对例图 1-5(a)所示体系作几何组成分析。



例图 1-5

**解** 1. 求计算自由度

由式(1-2)得  $W = 2j - b - s = 2 \times 7 - 10 - 4 = 0$

$W = 0$ , 表明体系具备几何不变的必要条件。

2. 对支座作等效变换, 用固定铰支座代替原支杆的作用(图(b))。

3. 拆除二元片  $a \sim b$ , 先取刚片 I, 由基础增加二元片  $c \sim d$  得刚片 II。刚片 I 和 II 由交于虚铰 O 的三杆 1, 2, 3 相联, 不符合两刚片规则。

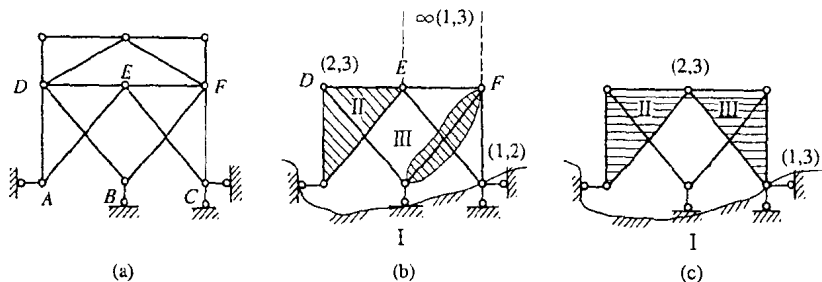
4. 结论: 体系为瞬变。

### 讨论

本例体系的约束数目足够, 具备了形成几何不变体系的必要条件。但是, 由于约束布置不合理, 不满足两刚片规则中的限制条件, 故整个体系为几何可变(瞬变)。

本例说明  $W = 0$  不是几何不变体系的充分条件。

例 1-6 试对例图 1-6(a)所示体系作几何组成分析。



例图 1-6

解 1. 对图(a)所示体系依次拆除二元片如图(b)所示。

2. 选取刚片 I, II, III, 三个刚片由虚铰(1,2), (2,3), (1,3)两两相联。其中, 虚铰(1,3)为无穷远, 虚铰(1,2)和虚铰(2,3)的连线与形成无穷远虚铰(1,3)的两平行链杆间夹角  $\alpha \neq 0$ 。

3. 结论: 体系几何不变, 无多余约束。

### 讨论

分析本例的常见错误是按图(c)所示选取刚片, 显然, 在刚片 I 和 II 之间缺少约束, 而链杆 DB 和 BF 以及 B 支杆未被使用。

例 1-7 试对例图 1-7(a)所示体系作几何组成分析。

解 1. 求计算自由度

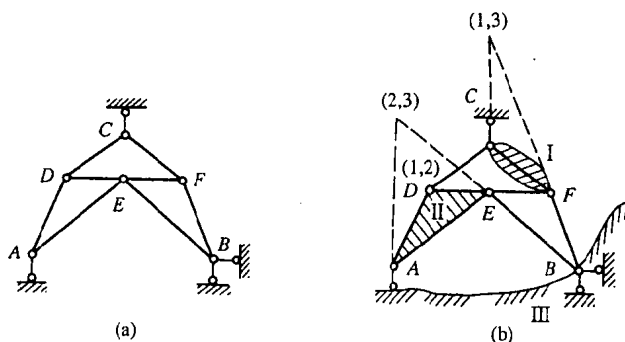
由式(1-2)得  $W = 2j - b - s = 2 \times 6 - 8 - 4 = 0$

$W = 0$  表明体系具备了几何不变的必要条件。

2. 找刚片和相应联系

取杆件 CF 为刚片 I, 铰结三角形 ADE 为刚片 II, 基础为刚片 III。三个刚片由



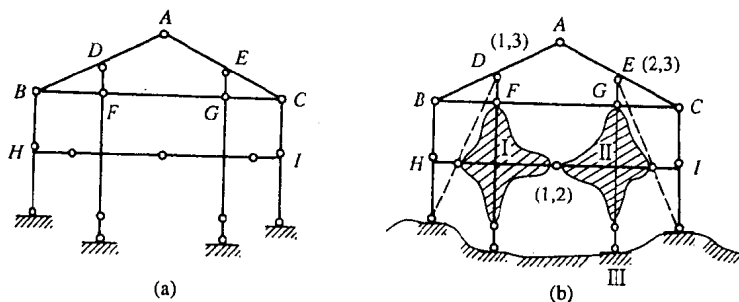


例图 1-7

不在一条直线上的三个虚铰(1,2),(1,3),(2,3)两两相联,满足三刚片规则。

3. 结论:体系几何不变,无多余约束。

例 1-8 试对例图 1-8(a)所示体系作几何组成分析。



例图 1-8

解 1. 求计算自由度

由式(1-1)得  $W = 3m - 2r - 2h - s = 3 \times 13 - 2 \times 18 - 6 = -3$

$W = -3$ ,表明体系具有三个多余约束。

2. 找刚片和相应联系

选取刚片 I, II, III 如图(b)所示。虚铰(1,3), (2,3), 实铰(1,2)两两联结三个刚片,满足三刚片规则,合成为新的刚片。在新刚片上依次增加二元片  $BH \sim BF$ ,  $CG \sim CI$ ,  $DB \sim DF$ ,  $EG \sim EC$ ,得扩大刚片。

3. 结论:体系几何不变,具有三个多余约束(杆件  $FG$  和铰  $A$ )。

例 1-9 试判断例图 1-9(a),(b)所示体系的几何组成。按增减约束的方法将原体系改变为无多余约束的几何不变体系。

解 1. 分析图 1-9(a):体系与基础之间由两竖向支杆相连,缺少形成几何不变体系的最少约束数,为几何可变体系。体系内部  $C$  铰可发生竖向刚体位移;刚片  $EDG$  和