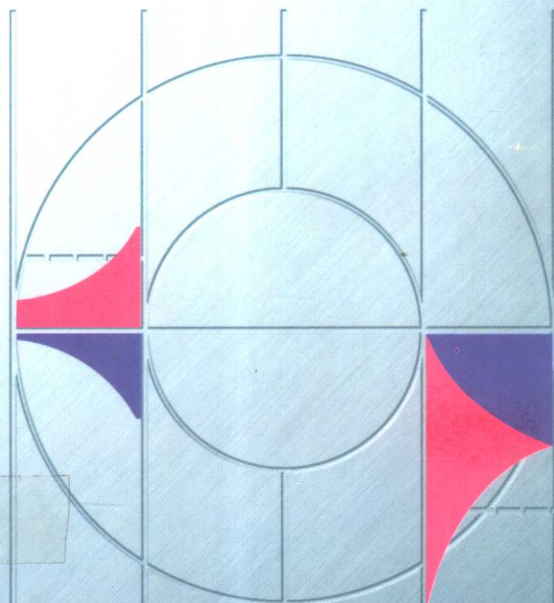


高等学校教学参考书

弹性力学与塑性力学 解题指导 及习题集

清华大学 徐秉业 黄 炎 刘信声 孙学伟 编



高等教育出版社

高等学校教学参考书

弹性力学与塑性力学 解题指导及习题集

清华大学 徐秉业 黄炎 编
刘信声 孙学伟

高等教育出版社

(京) 112号

本书是各种教育形式的大学本科、专科学生和研究生学习弹性力学和塑性力学的辅助教材。全书分两篇共二十一章,前十六章为弹性力学部分,后五章为塑性力学部分。每章在理论概述之后分类给出例题和习题,全书例题共约 102 道,习题共约 620 道。习题均给出答案,较难习题还给予提示。

对本书中习题,未经本社同意任
何单位不得以任何形式出版解答。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学与塑性力学解题指导及习题集/徐秉业等编.
北京:高等教育出版社,1985.10(1999重印)
高等学校教学参考书
ISBN 7-04-000454-2

I. 弹… II. 徐… III. ①弹性力学-高等学校-习题②塑性力学-高等学校-习题 IV. 034-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 01420 号

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号 邮政编码 100009
电 话 010-64054588 传 真 010-64014048
网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 高等教育出版社印刷厂

开 本 850×1168 1/32 版 次 1985 年 10 月第 1 版
印 张 20.125 印 次 1999 年 6 月第 4 次印刷
字 数 480 000 定 价 20.20 元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等
质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

前 言

弹性力学与塑性力学属于技术基础学科范围，它和许多工程技术问题都有着十分密切的联系。由于应用这门学科知识能够比较真实地反映出物体在承受外部作用时其内部应力和应变的分布规律，为设计结构和机械构件提供可靠的依据，故受到了各工程专业的重视。

在本书每章的理论概述中，简要地介绍了有关的基本理论，并列出了解题时所必须的公式。为了使读者能够由浅入深、由易到难地逐步掌握处理问题的方法，在每章都有一定数量的例题。各章中还给出了供选择作为练习用的习题。作者期望通过不同类型习题的训练，有助于使学生掌握基本内容，并培养和提高分析问题和解决问题的能力。

本书由徐乘业等合编，具体分工如下：刘信声编第一、二、三、四、五、七章；孙学伟编第六、十三、十四、十五、十六章；黄炎编第八、十、十一、十二章；徐乘业编第九、十七、十八、十九、二十、二十一章。

本书由重庆大学杨绪灿、刘相臣等同志和福州大学陈森同志初审，徐芝纶同志复审，他们对书稿提出了十分宝贵的意见。作者谨对诸位审稿同志以及关心和支持本书编写工作的同志表示衷心感谢。

由于作者水平所限，错误和不妥之处仍恐难免，诚恳地欢迎读者批评指正。

作 者

一九八四年二月于清华大学

目 录

第一篇 弹性力学部分

第一章 应力分析	1
§ 1-1 理论概述.....	1
§ 1-2 一点的应力状态.....	6
§ 1-3 静力边界条件.....	17
§ 1-4 平衡方程.....	21
第二章 应变分析	27
§ 2-1 理论概述.....	27
§ 2-2 变形协调条件.....	32
§ 2-3 几何方程.....	36
§ 2-4 一点的应变状态.....	43
第三章 应力与应变的关系	50
§ 3-1 理论概述.....	50
§ 3-2 各向异性弹性体的广义虎克定律.....	54
§ 3-3 各向同性弹性体的广义虎克定律.....	59
§ 3-4 各向同性弹性体虎克定律的应用.....	63
第四章 求解弹性力学问题的基本方法	65
§ 4-1 理论概述.....	65
§ 4-2 按位移求解问题.....	71
§ 4-3 按应力求解问题.....	74
§ 4-4 应力函数、用应力函数求解轴对称问题.....	77
第五章 用直角坐标解平面问题	84
§ 5-1 理论概述.....	84
§ 5-2 用多项式解平面问题.....	88
§ 5-3 用富氏级数解平面问题.....	110
第六章 用极坐标解平面问题	123

§ 6-1	理论概述	123
§ 6-2	厚壁筒与旋转盘	126
§ 6-3	曲杆与带圆孔的板	134
§ 6-4	楔体与半平面问题	146
第七章	等直杆的扭转与弯曲	163
§ 7-1	理论概述	163
§ 7-2	等截面杆件的扭转	171
§ 7-3	薄壁杆件的扭转	180
§ 7-4	等截面杆件的弯曲	184
第八章	空间轴对称及弹性接触问题	191
§ 8-1	理论概述	191
§ 8-2	空间轴对称问题	200
§ 8-3	弹性接触问题	207
第九章	热应力	220
§ 9-1	理论概述	220
§ 9-2	简单热应力问题	224
§ 9-3	轴对称、球对称以及楔体问题中的热应力	238
第十章	能量原理及其应用	238
§ 10-1	理论概述	238
§ 10-2	弹性体的应变能、应变余能、体积变形应变能、形状变形应变能	248
§ 10-3	虚位移原理	251
§ 10-4	最小势能原理	260
§ 10-5	李兹方法、伽辽金方法、功的互等定理	268
§ 10-6	最小余能原理	278
§ 10-7	能量原理在扭转问题中的应用	283
§ 10-8	能量原理在平面问题中的应用	289
第十一章	有限差分法	304
§ 11-1	理论概述	304
§ 11-2	用有限差分法解筒形板的弯曲与稳定	309
§ 11-3	用有限差分法解扭转问题	319

§ 11-4	用有限差分法解平面问题	328
第十二章	有限单元法	342
§ 12-1	理论概述	342
§ 12-2	有限单元法的基础知识	355
§ 12-3	平面问题的有限单元法	365
§ 12-4	平面热应力问题的有限单元法	382
§ 12-5	轴对称问题的有限单元法	388
第十三章	用复变函数解平面问题和扭转问题	393
§ 13-1	理论概述	393
§ 13-2	简单问题	398
§ 13-3	用复变函数解平面问题	401
§ 13-4	用复变函数解扭转问题	416
第十四章	平面裂纹问题	417
§ 14-1	理论概述	417
§ 14-2	简单问题	425
§ 14-3	平面裂纹问题的复变函数解法	434
第十五章	薄板的小挠度弯曲	442
§ 15-1	理论概述	442
§ 15-2	圆板和环板的弯曲	449
§ 15-3	矩形板的弯曲	460
§ 15-4	其他形状板的弯曲	476
第十六章	弹性薄壳	481
§ 16-1	理论概述	481
§ 16-2	旋转壳的无矩理论	490
§ 16-3	轴对称圆柱壳的一般理论	502

第二篇 塑性力学部分

第十七章	塑性拉伸和压缩	512
§ 17-1	理论概述	512
§ 17-2	真应力、对数应变和颈缩	516
§ 17-3	残余应力	522

第十八章 屈服条件和塑性应力应变关系	528
§ 18-1 理论概述	528
§ 18-2 屈雷斯卡和密赛斯屈服条件	535
§ 18-3 增量理论	541
§ 18-4 形变理论(全量理论)	548
第十九章 简单弹塑性问题	553
§ 19-1 理论概述	553
§ 19-2 梁的弹塑性弯曲	561
§ 19-3 杆的弹塑性扭转	569
§ 19-4 旋转圆盘	577
§ 19-5 厚壁圆筒和圆盘	581
§ 19-6 厚壁球壳	588
第二十章 塑性平面应变问题(滑移线场理论、极值定理 及其应用)	593
§ 20-1 理论概述	593
§ 20-2 滑移线场理论	600
§ 20-3 极值定理及其应用	607
第二十一章 薄板的极限分析	614
§ 21-1 理论概述	614
§ 21-2 圆板的极限分析	619
§ 21-3 多边形板的极限分析(塑性铰线法)	625
参考文献	634

第一篇 弹性力学部分

第一章 应力分析

§ 1-1 理论概述

一、一点的应力状态

1. 在直角坐标系 (x, y, z) 中, 受力物体内一点的应力状态可由三个正应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 和六个剪应力分量 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$ 来确定。用张量表示时记作

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

应力张量是二阶对称张量。

通过物体已知点的任意斜截面(外法线为 ν)上总应力在坐标轴方向上的分量为

$$\left. \begin{aligned} p_{\nu x} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_{\nu y} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_{\nu z} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

式中 l, m, n 为法线 ν 的方向余弦。

在斜截面上的正应力和剪应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\nu &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl, \\ \tau_\nu &= \sqrt{p_\nu^2 - \sigma_\nu^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

式中 $p_\nu^2 = p_{\nu x}^2 + p_{\nu y}^2 + p_{\nu z}^2$ 。

当坐标轴变换时, 应力分量的变换公式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi} &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2\tau_{xy} l_1 m_1 + 2\tau_{yz} m_1 n_1 + 2\tau_{zx} n_1 l_1, \\ \sigma_{\eta} &= \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + \sigma_z n_2^2 + 2\tau_{xy} l_2 m_2 + 2\tau_{yz} m_2 n_2 + 2\tau_{zx} n_2 l_2, \\ \sigma_{\zeta} &= \sigma_x l_3^2 + \sigma_y m_3^2 + \sigma_z n_3^2 + 2\tau_{xy} l_3 m_3 + 2\tau_{yz} m_3 n_3 + 2\tau_{zx} n_3 l_3, \\ \tau_{\xi\eta} &= \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy} (l_1 m_2 + m_1 l_2) \\ &\quad + \tau_{yz} (m_1 n_2 + n_1 m_2) + \tau_{zx} (n_1 l_2 + l_1 n_2), \\ \tau_{\eta\zeta} &= \sigma_x l_2 l_3 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_z n_2 n_3 + \tau_{xy} (l_2 m_3 + m_3 l_2) \\ &\quad + \tau_{yz} (m_2 n_3 + n_2 m_3) + \tau_{zx} (n_2 l_3 + l_2 n_3), \\ \tau_{\zeta\xi} &= \sigma_x l_3 l_1 + \sigma_y m_3 m_1 + \sigma_z n_3 n_1 + \tau_{xy} (l_3 m_1 + m_3 l_1) \\ &\quad + \tau_{yz} (m_3 n_1 + n_3 m_1) + \tau_{zx} (n_3 l_1 + l_3 n_1). \end{aligned} \right\} (1-3)$$

式中新坐标轴 ξ, η, ζ 与原坐标轴 x, y, z 之间夹角的余弦 l, m, n 如下表所示。

	x	y	z
ξ	l_1	m_1	n_1
η	l_2	m_2	n_2
ζ	l_3	m_3	n_3

当斜截面为主应力平面时, 利用下式可以求出主应力。

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= 0, \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{zy} n &= 0, \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma) n &= 0. \end{aligned} \right\} (1-4)$$

因为 l, m, n 不能同时为零, 所以可将上式看作关于 l, m, n 的线性齐次方程组, 该方程组具有非零解的条件是它的系数行列式必须为零。将此行列式展开, 得

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0. \quad (1-5)$$

式中 $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2,$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2.$$

I_1, I_2 和 I_3 分别称为应力张量的第一、第二和第三不变量, 其值不随坐标轴方向的改变而改变。

方程式(1-5)的三个根即为主应力 σ_1, σ_2 和 σ_3 。将所求得的主应力值代入式(1-4)中的任意两式, 并与 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 联立求解, 便可得到三个主平面的三组方向余弦。

2. 在与主方向成 45° 角平面上, 剪应力为极值, 且有

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \\ \tau_2 &= \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \\ \tau_3 &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

若主应力大小的顺序为 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, 则最大剪应力为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

3. 在正八面体的面(等倾面)上, 正应力和剪应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \\ \tau_0 &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

正八面体面上的正应力 σ_0 即表示该点的平均正应力, 而剪应力 τ_0 则是与剪应力的驻值有关的一个量。

4. 在一般情况下, 应力张量可以分解为应力偏斜张量(或简称为应力偏量)和应力球形张量, 即

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}.$$

一点的应力偏量与该点微分单元体形状改变有关，而应力球形张量则与该点微分单元体体积改变有关。

若取 $s_x = \sigma_x - \sigma_0$, $s_y = \sigma_y - \sigma_0$, $s_z = \sigma_z - \sigma_0$, $s_{xy} = \tau_{xy}$, $s_{yz} = \tau_{yz}$, $s_{zx} = \tau_{zx}$, 则应力偏量可表示为

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} s_x & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_y & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_z \end{pmatrix}.$$

与求主应力的方法类似，应力偏量的主值可由下式求得，即

$$s^3 - J_1 s^2 + J_2 s - J_3 = 0.$$

上式中 J_1 、 J_2 和 J_3 为应力偏量的第一、第二和第三不变量，且有

$$J_1 = s_x + s_y + s_z = s_1 + s_2 + s_3 = 0,$$

$$J_2 = s_x s_y + s_y s_z + s_z s_x - s_{xy}^2 - s_{yz}^2 - s_{zx}^2 \\ = s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1,$$

$$J_3 = s_x s_y s_z + 2s_{xy} s_{yz} s_{zx} - s_x s_{yz}^2 - s_y s_{zx}^2 - s_z s_{xy}^2 \\ = s_1 s_2 s_3.$$

由三次方程求得的解即为应力偏量主值 s_1 、 s_2 和 s_3 。而且，应力偏量的主方向与应力的主方向是一致的。

应力球形张量的三个不变量为

$$K_1 = 3\sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = I_1,$$

$$K_2 = 3\sigma_0 \sigma_0 = \frac{I_1^2}{3},$$

$$K_3 = \sigma_0^3 = \frac{I_1^3}{27}.$$

不变量之间的关系为

$$I_1 = J_1 + K_1,$$

$$I_2 = J_2 + K_2,$$

$$I_3 = J_3 + \frac{K_1}{3}(J_2 + K_2) - 2K_3 = J_3 + \frac{I_1 I_2}{3} - \frac{2}{27} I_1^3.$$

二、平衡(运动)方程

若受力物体处于平衡(运动)状态,则由物体中取出的微小六面体单元也处于平衡(运动)状态。考虑不同坐标系中微小六面体单元的平衡(运动)条件,可得到不同形式的平衡(运动)方程。

1. 在直角坐标中的平衡(运动)方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

式中 f_x , f_y 和 f_z 分别为 x , y 和 z 方向上单位体积的体积力。

由力矩的平衡条件可以得到

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

上式即表示剪应力互等,这种互等的性质在任何正交坐标系中皆存在。

2. 在柱坐标 (r, θ, z) 中的平衡(运动)方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + f_r &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + f_\theta &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + f_z &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

3. 在球坐标 (r, θ, φ) 中的平衡(运动)方程为

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [2\sigma_r - (\sigma_\theta + \sigma_\varphi) + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \varphi] \\
 & \quad + f_r = 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \right), \\
 & \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3\tau_{r\theta} + 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \varphi] + f_\theta \\
 & \quad = 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \right), \\
 & \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3\tau_{r\varphi} + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \varphi] \\
 & \quad + f_\varphi = 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} \right).
 \end{aligned} \right\}$$

(1-10)

三、静力边界条件

若受力物体处于平衡状态，则除了在物体内部应力分量应满足平衡方程外，在边界上应力分量还应满足静力边界条件，即边界平衡条件。

若物体表面的单位面积上的面力分量为 F_x 、 F_y 和 F_z ，则静力边界条件为

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= F_x, \\
 \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n &= F_y, \\
 \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n &= F_z.
 \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

上式表明了应力分量的边界值与面力分量之间的关系。当物体表面仅给出面力的合力时，可利用圣维南(St. Venant)原理，将合力变换成静力等效的分布力，在离该表面较远处可以不考虑这种变换对应力分布的影响。

§ 1-2 一点的应力状态

例 1-1 已知受力物体中某点的应力分量为 $\sigma_x = 0$ ， $\sigma_y = 2a$ ，

$\sigma_x = a, \tau_{xy} = a, \tau_{yz} = 0, \tau_{zx} = 2a$ 。试求作用在过此点的平面 $x + 3y + z = 1$ 上的沿坐标轴方向的应力分量, 以及该平面上的正应力和剪应力。

解: 平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的法线的方向余弦为

$$l = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad m = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$n = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

由上式求得该平面法线的方向余弦为 $l = \frac{1}{\sqrt{11}}, \quad m = \frac{3}{\sqrt{11}},$

$$n = \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

将应力分量及方向余弦代入式(1-1), 得到该平面上沿坐标轴方向的应力分量为

$$p_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = \frac{5}{\sqrt{11}} a = 1.508a,$$

$$p_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = \frac{7}{\sqrt{11}} a = 2.111a,$$

$$p_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = \frac{3}{\sqrt{11}} a = 0.905a.$$

将以上求得的值代入式(1-2), 则得到该平面上的正应力和剪应力为

$$\sigma_n = p_x l + p_y m + p_z n = 2.637a,$$

$$\tau_n = \sqrt{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \sigma_n^2} = 0.771a.$$

例 1-2 已知受力物体中某点的应力分量为 $\sigma_x = 50a, \sigma_y = 80a, \sigma_z = -70a, \tau_{xy} = -20a, \tau_{yz} = 60a, \tau_{zx} = 0$ 。试求主应力分量及主方向余弦。

解: 首先求出应力不变量为

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 60a,$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = -9100a^2,$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \\ = -432000a^3.$$

将以上各值代入式(1-5), 得

$$\sigma^3 - 60a\sigma^2 - 9100a^2\sigma + 432000a^3 = 0.$$

为了计算方便, 引进如下表达式:

$$\frac{\sigma}{100a} = x,$$

则上式成为

$$x^3 - 0.6x^2 - 0.91x + 0.432 = 0.$$

上式为三次方程的一般形式, 且 $a=1$, $b=-0.6$, $c=-0.91$, $d=0.432$ 。为消去二次项, 令 $x = y - \frac{b}{3a} = y + \frac{0.6}{3} = y + 0.2$, 代入上式, 则得

$$y^3 - 1.03y + 0.234 = 0.$$

将上式与一般形式比较, 即

$$y^3 + 3py + 2q = 0,$$

其判别式为 $\Delta = q^2 + p^3 = \left(\frac{0.234}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1.03}{3}\right)^3 = -0.0267$, 该值为负数, 因此, 方程有三个实根。取 $r = \pm\sqrt{|p|}$, r 的符号应与 q 一致, 引进辅助角 φ , 则 $\cos 3\varphi = -\frac{q}{r^3} = -\frac{0.234}{2\sqrt{\left(\frac{1.03}{3}\right)^3}} = -0.5816$,

即 $3\varphi = 125.56^\circ$, $\varphi = 41.85^\circ$, 方程的根为

$$y_1 = 2r \cos \varphi = 2\sqrt{\frac{1.03}{3}} \cos 41.85^\circ = 0.873,$$

$$y_2 = 2r \cos (120^\circ + \varphi) = 2\sqrt{\frac{1.03}{3}} \cos 161.85^\circ = -1.114,$$

$$y_3 = 2r \cos(240^\circ + \varphi) = 2\sqrt{\frac{1.03}{3}} \cos 281.85^\circ = 0.241.$$

由 y 可以求得 x , 即 $x_1 = 1.073$, $x_2 = -0.914$, $x_3 = 0.441$ 。

如令 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, 则得 $\sigma_1 = 107.3a$, $\sigma_2 = 44.1a$, $\sigma_3 = -91.4a$ 。

为检查所得结果的正确性, 可利用根与系数的关系, 例如: $I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \approx -432000a^3$, 故解答正确。

将三个主应力值依次分别代入式(1-4)中的任意两式, 并利用关系式 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, 联立求解即可得到三个主方向的方向余弦。例如, 为求 σ_1 的方向余弦 l_1 、 m_1 、 n_1 , 将 $\sigma_1 = 107.3a$ 代入式(1-4)的前两式, 得

$$\begin{aligned} -57.3l_1 - 20m_1 &= 0, \\ -20l_1 - 27.3m_1 + 60n_1 &= 0. \end{aligned}$$

将以上两式除以 l_1 , 得

$$\begin{aligned} -20\frac{m_1}{l_1} - 57.3 &= 0, \\ -27.3\frac{m_1}{l_1} + 60\frac{n_1}{l_1} - 20 &= 0. \end{aligned}$$

由此得 $\frac{m_1}{l_1} = -2.865$, $\frac{n_1}{l_1} = -0.970$ 。再利用

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

得

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_1}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_1}{l_1}\right)^2}},$$

将 $\frac{m_1}{l_1}$ 和 $\frac{n_1}{l_1}$ 代入上式, 求得 $l_1 = 0.314$, 从而, $m_1 = -2.865l_1 = -0.900$, $n_1 = -0.970l_1 = -0.305$ 。

同样可得其余两组方向余弦为 (0.948, 0.282, 0.146); (-0.048, 0.337, -0.940)。