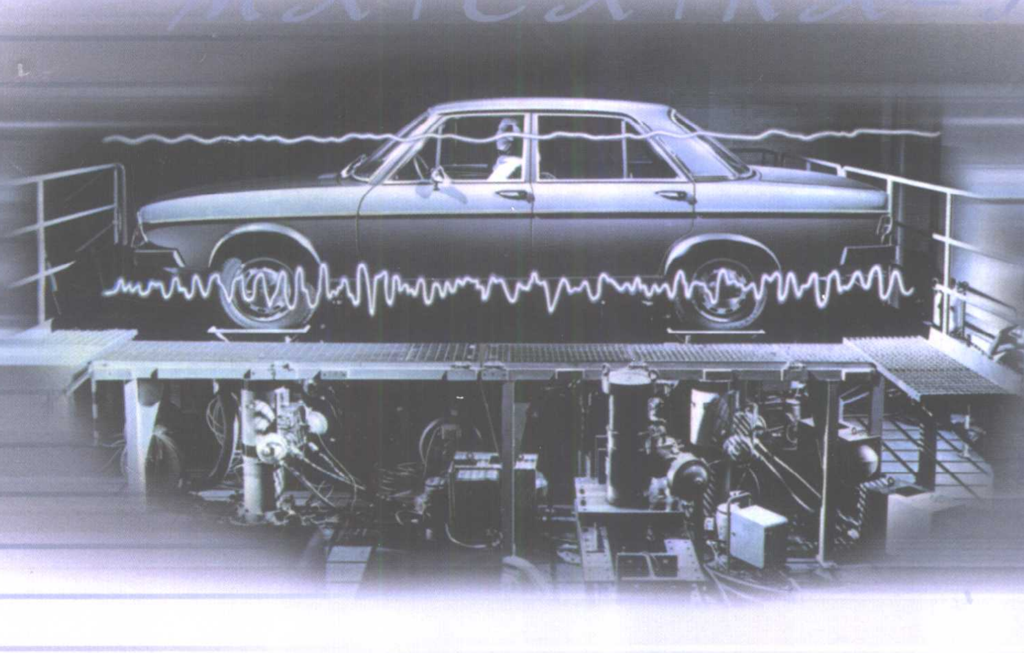
QICHE ZHENDONG FENXI

汽车振动分析

靳晓雄 张立军 江 浩 编著



$M\ddot{X}+C\dot{X}+KX=F(t)$

同济大学出版社

汽车振动分析

同济大学汽车学院

靳晓雄　张立军　江　浩　编著

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

汽车振动分析/靳晓雄,张立军,江浩编著.—上海:
同济大学出版社,2002.5
ISBN 7-5608-2406-4

Ⅰ.汽… Ⅱ.①靳… ②张… ③江… Ⅲ.汽车-
振动-分析 Ⅳ.U467.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 019555 号

汽车振动分析

作　者　同济大学汽车学院
靳晓雄　张立军　江　浩

责任编辑　王有文　　　责任校对　郁　峰　装帧设计　陈益平

出　版
发　行　同济大学出版社

(上海四平路 1239 号　邮编 200092　电话 021-65985622)

经　销　全国各地新华书店
印　刷　同济大学印刷厂印刷
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　18.25
字　数　467000
印　数　1—3000
定　价　30.00 元
版　次　2002 年 5 月第 1 版　　2002 年 5 月第 1 次印刷
书　号　ISBN 7-5608-2406-4/U·34

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换

前　言

随着科学技术的日新月异和人民生活水平的日益提高，人们对汽车的动态性能——例如，汽车行驶的舒适性，操纵的稳定性，车内噪声水平及音质，等等——提出了愈来愈高的要求。因而汽车的动态分析和设计方法已日益成为产品研究和开发的重要手段。我国进入WTO以后，汽车的自主开发更是提到了议事日程上来。要提高我国汽车自主开发能力，开发出具有自主知识产权的汽车产品，就必须从基本原理出发，进行大量的汽车动态特性的分析和研究。随着汽车向高速化和轻质化方向发展，振动噪声问题日益突出，人们对振动噪声的控制要求也越来越严格。因此，振动分析理论越来越受到重视。具体来说，汽车理论和汽车设计课程的许多章节都以振动理论为基础。在汽车的行驶平顺性、乘坐舒适性、发动机的减振和隔振等研究中都离不开振动分析，而车身结构的模态分析技术更是以振动为基础的学科。如果没有振动理论的扎实基础，学生对这些课程就很难有深入的理解。所以，“汽车振动分析”已成为汽车工程中必不可少的基础理论之一。

本书为高等院校汽车设计专业的本科生及研究生提供了一本较全面的、系统的有关汽车振动理论的教科书，对从事汽车或其他车辆工程的工程技术人员也具有很好的参考价值。在编写本书的过程中，我们力求做到由浅入深、循序渐进，从单自由度系统的简单问题开始逐渐加深难度，进入多自由度，甚至是无限自由度系统；并从简单激励的振系逐渐推广到随机激励振系。同时，我们也注意在书中反映振动分析理论中的新方法，如对统计能量分析法的理论基础及其在汽车振动分析中的应用加以介绍，使学生对新技术、新方法有所了解。在编写过程中，各章都注意加入了密切结合汽车实际的多种实例分析，使学生能从中了解到这些振动理论在汽车设计实践中的具体应用情况。本书在最后一章还提供了使用MATLAB软件进行振动分析的介绍，其中的内容反映了我们长期从事教学和科研工作的成果，一些分析程序可以直接用于工程实践。

本书共分11章：第1章，概论；第2章，单自由度系统的振动；第3章，二自由度系统的振动；第4章，多自由度系统的振动；第5章，多自由度系统固有特性近似计算；第6章，连续系统振动分析；第7章，振动分析的有限单元法；第8章，随机振动概述；第9章，振动分析的统计能量法(SEA)；第10章，非线性振动分析；第11章，MATLAB软件在解决汽车振动问题中的应用。其中，第1章、第2章、第3章和第11章由江浩编写；第4章、第5章、第7章和第8章由张立军编写；第6章、第9章和第10章由靳晓雄编写。在编写过程中参考了大量振动分析方面的专著和文献。书中第1章至第5章适用于本科生教学，第6章至第11章则适合于研究生教学选用。

限于编者的水平，书中难免有疏漏和不妥之处，敬请读者批评指正。

编者

2002年3月于同济大学

目　　录

第1章 概 论

1.1 引言

在所研究的机械或结构均为弹性体时，在外力作用下不仅产生刚体运动，还会产生由于自身弹性而引起在平衡位置附近的微小弹性往复运动，这种往复运动通常称为振动。振动现象是在生产和生活中非常普遍存在的现象，它会对人类的生活和生产活动带来危害，但同时还可以造福于人类。

1.1.1 振动的危害

在自然界中，振动现象不可避免，如人们所熟知的地震。地震引起建筑物振动倒塌，造成大规模的人员伤亡、财产损失，带来的危害是巨大的。

人们所使用的交通工具车、船、飞机在运行过程中振动也是难以避免的，如汽车在崎岖不平道路上行驶时引起的振动；飞机起飞、着陆以及飞行时遇到气流时产生的振动；轮船航行时遇到海浪引起的颠簸。这些振动导致乘客晕车、晕船等，影响了乘客的身心健康。那些长期处在这种振动环境下的驾驶员等往往会患上腰椎劳损、胃下垂等职业病。

振动会产生噪声，污染环境，影响人们正常的工作和休息。纺织机械发出的巨大噪声使纺织厂工人患耳聋、耳背的比例大大增加。建筑工地上工程机械作业引起的振动噪声，如钻孔机、打桩机和混凝土导振器等发出的噪声破坏了人们的生活环境，噪声到达一定的分贝值就会严重影响人们正常的工作和休息，所以，在一些城市中规定，在夜间休息时不允许进行建筑施工。

在大多数机器、机械结构和动态系统中都不希望发生振动。因为振动会降低机床的精度，产生误动作，影响机床的性能；振动会降低仪器仪表的准确性及其工作寿命；振动会使机器、结构出现疲劳破坏，影响使用寿命；振动还会产生噪声，增加能量损耗。振动会使汽车的操纵稳定性变差；海浪激起的共振引起轮船的断裂；气流引起的共振导致飞机机翼的折断，这些都可能造成严重的事故。在空气中飞行的导弹遇到气流引起的振动会影响导弹的命中率，若不加以考虑，会导致严重后果。

以上列举了一些振动给人类带来的危害，当然，振动的危害远不止这些。如果我们能够正视振动的危害，掌握振动机理，应用振动规律为人类服务，振动又不可怕了。

1.1.2 利用振动为人类服务

人类在受振动危害之苦时，却能聪明地利用振动为其服务。早在 19 世纪，瑞士人发明了钟表，利用摆振进行计时，这个发明对人类的作用是不可估量的，而现在的石英钟则用晶振进行更为准确的计时。

建筑行业中为了减轻劳动强度，提高工作效率，人们利用振动机理发明了振动机械，如振动压路机、混凝土导振器、振动沉桩机等。就像其中的振动沉桩机，利用振动原理来减少

桩与地层的摩擦，它沉桩的效率高、噪声小，是利用振动为人类服务的一个很好的例证。此外，在矿业中用振动筛进行选矿、淘金；环卫工作中利用振动进行垃圾筛选、分类处理；在机械结构中利用振动来消除残余应力；在医学中利用振动来治疗疾病，如用振动按摩器进行按摩、用脂肪运动机来减肥等。这些只是振动为人类服务的例证中的一小部分，随着人们对振动规律认识的加深，振动的作用在不断被挖掘，就能更好地造福于人类。

1.1.3 振动研究的问题

了解了振动的危害，就需要人们研究振动问题，掌握振动机理，消除振动带来的不利影响，利用振动规律造福于人类。所要研究的问题有以下几个方面：

(1) 振动隔离：在振动源不可能完全消除的情况下，研究如何减小振动对结构的影响。如汽车悬架的设计就是为了减小汽车在不平路面上行驶时传给车身的振动。

(2) 在线控制：利用振动信号监测设备工作状况，诊断故障。如对发动机故障进行的振动监测和诊断。

(3) 工具开发：利用振动原理，研究和开发新型的振动源和振动工具。如地下钻孔机利用振动来松动土层，减少阻力，提高钻孔效率。

(4) 动态性能分析：对机器的动态性能进行分析，如汽车的乘坐舒适性、操纵稳定性等进行振动分析。同时研究机器和结构件的疲劳寿命、动强度等问题。

(5) 模态分析：振动中模态分析的理论和试验的研究。

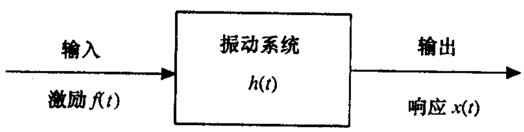


图 1.1 振动系统框图

对于一般的振动问题，可以用图 1.1 所示的框图来说明。图中的“振动系统”是指所研究的振动对象，例如，汽车、各种机器或机床、工程结构或某些零部件等。从振动理论来分析，“振系”是表示研究对象的振动特性。“输入”或“激励”是表示初始干扰和激振力等外界因素对系统的作用。“输出”或“响应”是表示系统在输入或外激励作用下所产生的动态响应。

根据图 1.1，可以把振动问题分为以下三类：

(1) 振动分析：已知激励和系统特性，求系统的响应。如已知路面条件和车辆结构，求驾驶员受到的振动。

(2) 振动环境预测：已知系统特性和振动响应，反推系统的激励。预测的结果可以作为以后振动设计的激励。

(3) 系统识别：已知激励和系统的响应，确定系统的特性。这类问题往往用模态试验的方法，识别出系统，以建立振动模型或检验已有的理论模型。这类问题中，如对振系有所了解，称为灰箱问题；如对系统一点也不了解，称为黑箱问题。

1.2 研究机械振动的基本方法

1.2.1 理论分析法

从振动分析观点看，即使是一台较简单的机器，其系统也是很复杂的，它所使用的是质

点动力学的方法。振动分析的第一步，也是关键的一步，就是把所研究的对象以及外界对它的作用简化为一个既简单又能在动态特性方面与原来的研究对象等效的力学模型。

1.2.1.1 建立系统的力学模型

系统之所以会产生振动，从外部条件看是因为系统受到了外界激励，从内部条件看是由于系统具有质量和弹性。从能量转化过程来看，外界对系统的激励就是对系统作功，这个功被储存到系统中，其中一部分转化为质量块的动能；另一部分转化为弹性件的变形势能。反复振动过程就是激励功、动能和势能之间的不断转换。如果系统没有阻尼，只要给系统以初始激励，振动就一直延续下去；若系统具有阻尼，而系统又没有继续从外界获得能量，振动在经历一段时间之后终将停止。由此可见，激励、质量、弹性和阻尼是振动系统的四大要素。因此，从实际的机械简化出的理想的力学模型若要确切反映其物理过程的话，就要确定这四个要素。

实际机器或结构元件的质量是分布的，弹性也是如此。这种分布参数系统（或称为连续系统）往往不能按照解析法求解，所以，将实际上是分布参数的系统简化成离散系统，也就是简化成具有若干集中质量并由相应的弹簧和阻尼器联结在一起的系统。下面将弹簧、阻尼器和质量的特性予以说明。

（1）弹簧

弹簧是表示力与位移关系的元件。在力学模型中，它被抽象为无质量并具有线弹性的元件。这就是说，若它的一端受一作用力 F_s，则它的另一端必产生一大小与 F_s 相等、方向与之相反的力，力的大小与弹簧两端点的相对位移成正比（图 1.2(a)）：

$$F_s = k(x_2 - x_1) \tag{1.1}$$

式中 k——比例常数，称弹簧刚度；

x_1, x_2——弹簧两端点的位移。

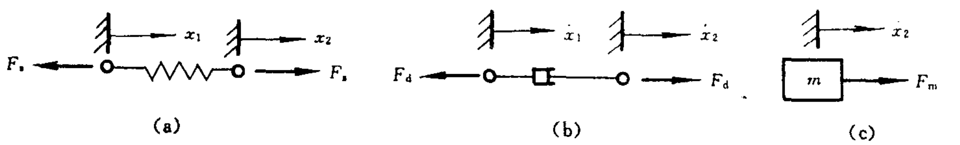


图 1.2 振动系统元件

式(1.1)中表示的是直线位移的弹簧。在扭转振动系统中，质量作扭转运动，这种情况下用扭转弹簧 k_t，扭转弹簧产生的广义力是扭矩，位移是角度，力和位移的关系式与式(1.1)类似。

（2）阻尼器

阻尼器是表示力与速度关系的元件。力学模型中，它被抽象为无质量而且具有线性阻尼系数的元件。若它的一端受一 F_d 力的作用，则它的另一端必产生一大小相等、方向相反的力。这个力称为阻尼力，其大小与阻尼器两端的相对速度成正比（图 1.2(b)）：

$$F_d = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \tag{1.2}$$

式中 c——比例常数，称为阻尼系数；

$\dot{x}_1, \dot{x}_2$——分别为阻尼器两端的速度。

根据式(1.2)阻尼力 F_d与相对速度的一次方成正比，因为粘性阻尼具有这种关系，系数 c 又称为粘性阻尼系数。

(3) 质量

质量是表示力和加速度关系的元件。在力学模型中，它被抽象为绝对不变形的刚体。若对质量施加一个作用力 F_m，质量就会产生一个与 F_m方向相同的加速度 $\ddot{x}$，对于直线的平移运动，如图 1.2(c)所示，力与加速度的关系为

$$F_m = m\ddot{x} \tag{1.3}$$

式中，m 为比例常数，它是刚体所具有的惯性的一种度量，称为刚体的质量。对于扭振系统，广义力为扭矩，广义加速度为角加速度，相应于式(1.3)，式中的比例常数为刚体绕其旋转中心线的转动惯量 J。当质量块的转动惯量不可忽略时，应该把它看作是具有转动惯量的。如果可以忽略转动惯量，则将质量看作只有质量而无弹性无尺寸的质点，用圆圈或方块表示。

国际单位制中，质量的单位为 kg；转动惯量的单位为 $kg \cdot m^2$；力的单位为 N；位移的单位为 m；扭矩的单位为 N·m；速度的单位为 m/s；直线弹簧刚度的单位为 N/m；扭转弹簧刚度的单位为 N·m/rad；阻尼系数 c 的单位为 N·s/m。

图 1.3 是用上述基本要素表示的单自由度系统。其中，图 1.3(a)是一个平移系统，即质量作直线移动，弹簧为线形弹簧；图 1.3(b)是扭转系统，扭转弹簧用细轴表示，质量用转动惯量 J 表示，位移用角位移 φ 表示，作用力用转矩 $T(t)$表示。

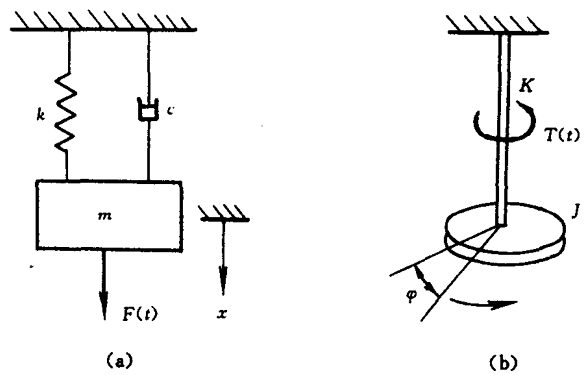


图 1.3 单自由度系统

将实际振动系统简化成一定的力学模型后，就要进一步确定力学模型中的四大要素，也就是要确定系统的质量、刚度、阻尼参数以及系统所受的激励，这样，一个振动系统就可以完全确定下来。

当一个实际振动系统较复杂时，建立的模型越复杂，越接近实际情况，也越能进行逼真的模拟，但往往使分析困难；建立的模型越简单，分析越容易，但得到的结果可能不精确。因此，在建立振系力学模型中，总是在求得简化表达和逼真模拟二者之间的折衷。但一个完整系统的力学模型不仅与实际机械的结构有关，还与所研究的内容有关。

以汽车这样一个复杂的振动系统为例，要根据所分析的问题进行简化，如图 1.4 所示。图 1.4(a)为一个把汽车车身质量看作为刚体的立体模型。汽车的簧载(车身)质量为 m_2，

它由车身、车架及其上的零部件总成组成，通过减振器和悬架弹簧与车轴、车轮相连接。车轮和车轴构成的非簧载（车轮）质量为 m_1。车轮再经过具有一定弹性和阻尼的轮胎支承在不平路面上。这个模型中，车身质量讨论平顺性时主要考虑垂直、俯仰、侧倾三个自由度，四个车轮质量有四个垂直自由度，共七个自由度。

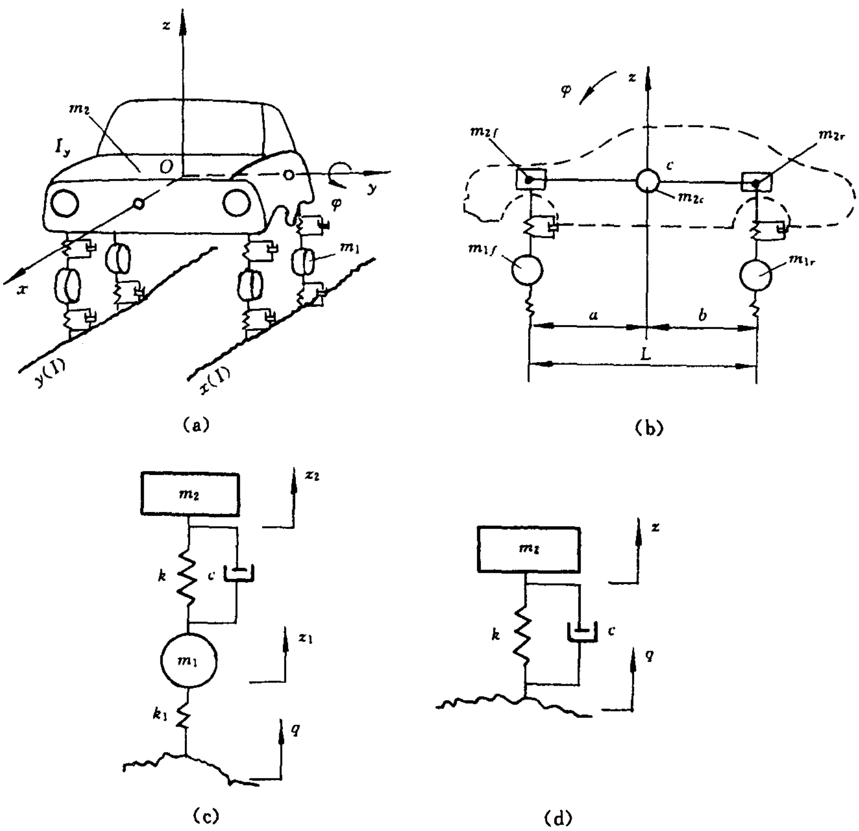


图 1.4　汽车振动系统模型

当汽车对称于其纵轴线时，汽车车身只有垂直振动和俯仰振动对平顺性影响最大。此时，将汽车简化成如图 1.4(b)所示的四个自由度的平面模型，因轮胎阻尼较小，在此予以忽略。在这个模型中，车身质量 m_2 主要考虑垂直和俯仰两个自由度，前、后车轴质量 m_{1f}，m_{1r}有两个垂直自由度。

当汽车前、后轴悬架质量分配达到一定值时，前、后悬架系统的垂直振动几乎是独立的。于是可以将汽车进一步简化为如图 1.4(c)所示的车身和车轮两个自由度振动系统。m_2为簧载（车身）质量，m_1为非簧载（车轮）质量，分析平顺性时，只考虑两个质量的垂直自由度。

在远离车轮部分，其固有频率（10～16Hz）在较低激振频率范围（如 5Hz 以下），轮胎动变形很小，忽略其弹性和轮胎质量，就得到如图 1.4(d)所示分析车身垂直振动的最简单的单质量系统。

1.2.1.2　建立运动方程

对所确定的振动系统中的每个物体作隔离体进行受力分析，由牛顿第二定律或达朗贝尔原理建立运动微分方程。在某些情况下，受力分析较困难，可以采用能量法如拉格朗日方

程来建立运动微分方程。

1.2.1.3 求解方程，得到响应规律

通过求解运动微分方程得到系统的响应，掌握振动规律，也就是得到振系的物理量如位移、速度、加速度等随时间 t 的变化规律，还可以通过运动方程得到系统的特征方程或频率方程，从而求出系统的固有频率、振动模态等，这样就可以设法抑制由振动带来的危害，从而更好地利用振动有利的一面。

1.2.2 实验研究

实验研究通常进行两方面的工作：一方面，直接测量振动系统的振动响应，并进行分析以了解机械振动特性，这个工作称为振动分析；另一方面，用已知的振源去激振研究对象，并测取振动响应，以了解系统特性，这个工作称为系统识别。具体研究步骤如下：

(1) 选择测试工况，也就是选取激振源；

(2) 对振系结构进行分析，研究振动测点，以布置传感器；

(3) 测取振动信号，并进行分析和处理；

(4) 对分析的结果作出结论。

其中，振动信号测取和分析过程可用图 1.5 来表示。

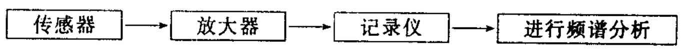


图 1.5 振动测试实验系统

1.2.3 理论分析与实验相结合

可以通过实验的方法(如模态分析)识别出系统，建立系统特性模型，或通过实验来验证理论分析的结果。也可以用理论分析的方法预测系统的响应，通过理论分析与实验的结合，更好地研究振动问题。

1.3 振动运动学概念

机械振动是一种特殊形式的运动，在这种运动中，机械系统围绕平衡位置作往复运动。从运动学的观点看，机械振动是指机械系统的某些物理量，如位移、速度、加速度、应力、应变等在某一数值附近随时间 t 的变化关系。这种关系如果是确定的，则可用函数 $x(t)$ 表示；如果是不确定的，也可用与时间 t 的关系图线表示。

1.3.1 振动分类

根据输入、输出和系统的特性等的不同，机械振动有以下各种不同的分类。

(1) 根据系统的输入类型分类

1) 自由振动：系统受初始干扰后，在没有外界激励作用时所产生的振动。

2) 强迫振动：系统在外界激振作用下产生的振动。

3) 自激振动：系统在输入和输出之间具有反馈特性，并有能源补充时产生的振动。

4) 参数振动：通过周期或随机地改变系统的特性参数而实现的振动。

(2) 根据描述系统的微分方程分类

1）线性振动：用常系数线性微分方程式描述的系统所产生的振动。

2）非线性振动：用非线性微分方程式描述的系统所产生的振动。

（3）根据系统的自由度分类

1）单自由度系统的振动：用一个独立坐标就能确定位置的系统的振动。

2）多自由度系统的振动：用多个独立坐标才能确定位置的系统的振动，包括二自由度系统。

3）无限多自由度系统的振动：要用无限多个独立坐标才能确定位置的系统的振动，这种振动又称为弹性体的振动。

（4）根据系统输出的振动规律分类

1）周期振动：振动量是时间的周期函数，$x(t)=x(t+nT) \quad n=1,2,\cdots$。系统在相等的时间间隔内作往复运动，周期 T 就是往复一次所需的时间间隔。周期振动中最简单、最重要的是简谐振动。简谐振动振动量是时间的正弦或余弦函数，如 $x(t)=A\sin\omega t$。

2）非周期性振动：振动量不是时间的周期函数，又可以分为稳态振动和瞬态振动。稳态振动是非周期持续进行的等幅振动；瞬态振动是在一定时间内振动并逐渐消失的非周期振动。

3）随机振动：振动量不是时间的确定函数，只能通过概率统计的方法来研究。振动量不能用函数 $x(t)$ 来表示，只能通过与时间 t 的关系图线来表示，如图 1.6 所示。振动过程中振幅、相位、频率都是随机变化的。

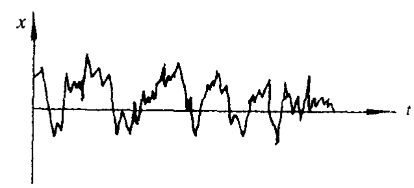


图 1.6　随机振动

1.3.2　简谐振动

简谐振动是指机械系统的某个物理量（位移、速度或加速度）按时间的正弦（或余弦）函数规律变化的振动。它是最简单最重要的周期振动，也是研究其他形式振动的基础。一个简谐变量可以用函数表达式、矢量或复数等形式来表示，不同的表示方法适用于不同的场合，如频域分析时用复数表达法就很方便。

1.3.2.1　简谐振动的函数表示法

简谐振动是正弦（或余弦）的时间函数，如用正弦时间函数表示，其数学表达式为

$$x=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)=A\sin(2\pi ft+\varphi)=A\sin(\omega t+\varphi) \tag{1.4}$$

式(1.4)如图 1.7 所示。

式中　A——振幅，振动体离开静平衡位置的最远距离；

T——周期，振动一个往复所需的时间；

f——频率，等于 $\frac{1}{T}$，表示振动快慢的程度，或单位时间内振动的次数，单位 Hz；

ω——圆频率，等于 $2\pi f$，单位为 rad/s；

φ——初相位，表示质量块的初始位置，若质量块初始在静平衡位置，则 $\varphi=0$。

简谐振动的速度 v：

$$v = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi) = A\omega\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.5}$$

振动的速度也是简谐函数，与位移有相同的频率，相位比位移相位超前 90°，幅值是位移幅值的 ω 倍。

简谐振动的加速度 a：

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = A\omega^2\sin(\omega t + \varphi + \pi) \tag{1.6}$$

振动加速度也是简谐函数，相位比位移相位超前 180°，幅值是位移幅值的 ω^2 倍。简谐振动的位移、速度和加速度的关系曲线见图 1.8。

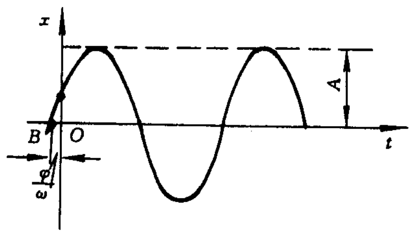


图 1.7　简谐函数

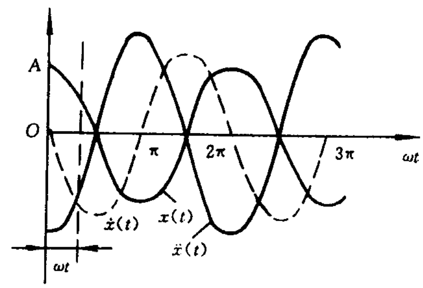


图 1.8　位移、速度、加速度关系

由式(1.4)和(1.6)得

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \tag{1.7}$$

这表明，在简谐振动中，加速度的大小和位移成正比，方向和位移成反比，始终指向静平衡位置。这是简谐振动的一个重要特性。

1.3.2.2　简谐振动的旋转矢量表示法

简谐振动也可以用旋转矢量来表示，对于正弦函数振动，可以看成是一个作等速圆周运动的点在铅垂轴上的投影，如图 1.9 所示。旋转矢量 **OP** 的模等于振幅 A，逆时针旋转的等角速度就是圆频率 ω，ωt 为 **OP** 在 t 时间内的转角。显然，上述简谐振动是周期运动，其周期 $T = 2\pi$。旋转矢量 **OP** 在铅垂轴上的投影为

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

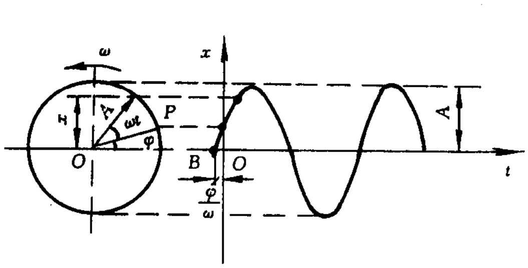


图 1.9　旋转矢量

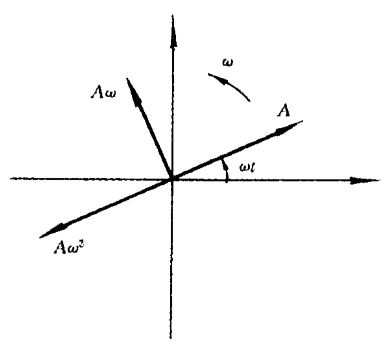


图 1.10　x, v, a 矢量关系

简谐振动的速度和加速度也是简谐函数，也可以用旋转矢量来表示，所以，前面所说的位移、速度和加速度间的关系也可以用矢量来表示，见图 1.10。

两同频率简谐振动的合成，也可用矢量合成来表示，如图 1.11 所示。

两同频率的简谐振动：

$$x_1 = a\cos\omega t,\ x_2 = b\sin\omega t$$

合成为一个同频率的简谐振动：

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

$$= a\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + b\sin(\omega t + 0)$$

$$= A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \tan\varphi = \frac{a}{b}$$

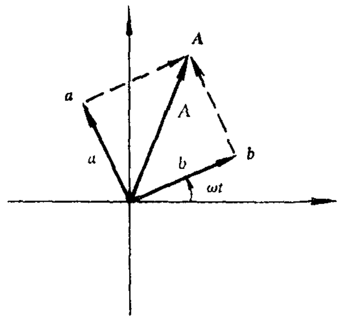


图 1.11 振动的矢量合成

1.3.2.3 简谐振动的复数表示法

简谐振动也可用复数表示，把坐标平面 xOy 视为复平面，x 轴当成实轴，y 轴当成虚轴，则此复平面上的复数为

$$z = A\cos(\omega t + \varphi) + \mathrm{i}A\sin(\omega t + \varphi) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi)}$$

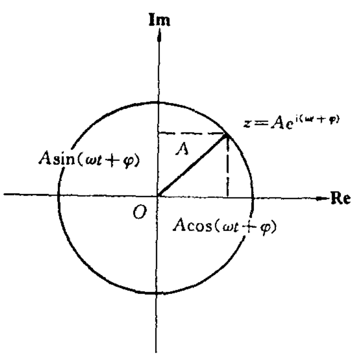


图 1.12 复数旋转矢量

复数 z 代表模为 A，等角速度 ω 逆时针旋转复数旋转矢量 $\boldsymbol{A}$，如图 1.12 所示。复数旋转矢量在任一轴上的投影都是简谐振动，即复数的实部与虚部都表示简谐振动，一般都取虚部来表示简谐振动规律，即

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) = \mathbf{Im}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi)})。$$

振动速度用复数指数形式表示为

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) = A\mathrm{i}\omega e^{\mathrm{i}\omega t} = A\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

振动加速度用复数指数形式表示为

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A\mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) = -\omega^2 A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = A\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \pi)}$$

1.3.3 谐波分析

简谐振动是一种最简单的振动，实际问题中，更多的是非简谐的周期振动，如发动机的振动，但一般周期振动可以理解成简谐振动的合成。按照级数理论，任一周期函数，只要满足以下条件，即可展开成傅里叶级数：

(1) 函数在同一周期内连续或只有有限个间断点，间断点上函数的左、右极限都存在；

(2) 在一个周期内，有有限个极大、极小值。

把一个周期函数展开成傅里叶级数，即一系列简谐函数之和称为谐波分析。把这种谐波分析法用于振动理论，就可以把一个周期振动分解为一系列简谐振动的叠加。

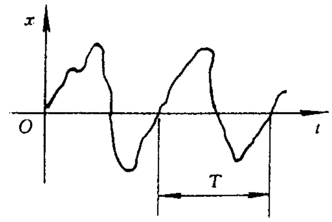


图 1.13 一般周期振动

如图 1.13 所示，一个周期振动函数 $F(t)$，周期为 T，可展开为

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$$

$$=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\omega_1 t+a_2\cos 2\omega_1 t+\cdots+b_1\sin\omega_1 t+b_2\sin 2\omega_1 t+\cdots$$

式中 $\omega_1=\frac{2\pi}{T}$称为基频，$\omega_2=2\omega_1$为二阶频率，依此类推；

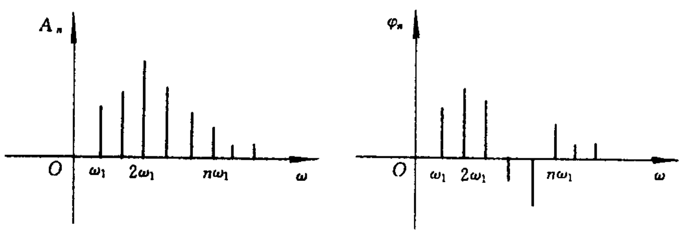
$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\mathrm{d}t;$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t;$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t;$$

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega_1+\varphi_n),\quad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\quad \tan\varphi_n=\frac{a_n}{b_n}。$$

经过谐波分析，将方波振动信号分解成一系列简谐函数之和。将上式中的 A_n 和 φ_n 与 ω 之间的变化关系用图形表示。其中，A_n 与 ω 之间的变化关系如图 1.14(a)所示，此图称为振幅频谱图或频谱图；而 φ_n 与 ω 之间的变化关系如图 1.14(b)所示，称为相位频谱图。由于 n 取正整数，两张频谱图中的图形都是离散的垂直线，称为谱线。将上述方法用于振动分析，称为频谱分析。



(a) (b)

图 1.14 频谱图

例如，图 1.15 所示的方波振动信号，其表达式为 $F(t)=\begin{cases}F_0 & 0<t<\frac{T}{2}\\ -F_0 & \frac{T}{2}<t<T\end{cases}$，对其进行谐波分析：