（初中）

郑国莱　主编

奥林匹克数学解题宝典

学林出版社

奥林匹克数学解题宝典(初中)

郑国莱　主编

学林出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学解题宝典(初中)/郑国莱主编．—上海：学林出版社，2002.12

ISBN 7-80668-387-9

Ⅰ.奥... Ⅱ.郑... Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 077579 号

奥林匹克数学解题宝典(初中)

主　　编——郑国莱
责任编辑——吴耀根
封面设计——王　峥
责任监制——应黎声
出　　版——学林出版社(上海钦州南路 81 号 3 楼)
电话:64515005　传真:64515005
发　　行——新华书店上海发行所
学林图书发行部(钦州南路 81 号 1 楼)
电话:64515012　传真:64844088
印　　刷——上海印刷三厂印刷
开　　本——889×1194　1/32
印　　张——18.75
字　　数——77 万
版　　次——2002 年 12 月第 1 版
2002 年 12 月第 1 次印刷
印　　数——6000 册
书　　号——ISBN 7-80668-387-9/G·144
定　　价——28.00 元

参加本书编写的有：

主　编　郑国莱

编　者　（按姓氏笔划为序）

王　采　关玉岚　映　光　郑国莱

郭平尔　程　凡　曾英远　戴世祥

王采、关玉岚、戴世祥参与了第一篇的编写，映光、程凡参与了第二篇的编写，郭平尔、曾英远参加了第三篇的编写.

内 容 提 要

本书是以最新的学科课程标准和教材使用意见为依据，以奥林匹克数学知识框架为脉络，强调解题思路，突出工具性能的一本教学辅导读物. 全书分"认知专题疑难解析"、"解题思想疑难解析"与"重要题型疑难解析"三篇，并以精讲的模式，将知识点、知识块组成共 25 讲的体系. 每一讲都有概念讲解、范例剖析、评注点拨与巩固练习四个部分，以帮助读者解疑攻难、掌握规律.

本书兼顾了基础与提高，融合了认知与应用. 重在激活思路、提高智能，精于阐明方法、指点技巧，是初中学生学习数学的好帮手. 本书每一讲都配有 15 个练习题，书后还附有参考解答或求解提示.

编者的话

为了帮助广大初中生学好数学,我们依据初中数学教学大纲的要求,在总结多年中学数学教学实践的基础上,结合初中奥林匹克数学教学辅导的需要,在通过参阅大量相关数学书刊后,构建了本书的内容框架,筛选出了主要的疑难板块,汇集了作者多年教学经验的精华,荟萃了适量的典题范例,意在写成一本兼顾基础与提高、融合认知与应用的精讲型手册.

本书由一文三篇组成."怎样学好数学"一文,渗入了编者长期教学实践与指导学生的全面体会,提供了学生可促进悟性与学好数学的基本思路;"认知专题疑难解析篇",选定了 20 个重点专题,作了较为系统的讲析;"解题思想疑难解析篇",选择了两类思想方略,作了相对全面的综论;"重要题型疑难解析篇",选取了三类重能题型,作了一般推理的探讨.它们都采用了网络的结构与讲座的模式.每一讲大多包含概念讲解、范例剖析、评注点拨与巩固练习四个部分,以帮助读者掌握重点、驾驭要点、释解疑点、攻克难点,进而提高数学学习水平与数学解题能力.

由于编者学识有限,谬误在所难免,殷切希望读者提出中肯批评和宝贵意见,我们将不胜感谢.

编　者

2002.2

目　　录

怎样学好数学 …… 1

第一篇　认知专题疑难解析篇 …… 44

第一讲　数的扩充与数集 …… 44

第二讲　整数的性质及其应用 …… 55

第三讲　实数比较大小的方法与技巧 …… 73

第四讲　因式分解的方法与技巧 …… 81

第五讲　代数式恒等变形的方法与技巧 …… 102

第六讲　代数化简、求值问题的解题思路 …… 115

第七讲　代数恒等问题的证题思路 …… 128

第八讲　关于方程 $ax^2+bx+c=0$ 之根的讨论及其应用 …… 141

第九讲　一元方程的类型及其解法 …… 166

第十讲　代数方程组的类型及其解法 …… 204

第十一讲　解不等式的重要方法——数轴标根法 …… 224

第十二讲　函数对应规律及其应用 …… 241

第十三讲　正、余弦定理及其应用 …… 255

第十四讲　统计概要及其应用 …… 278

第十五讲　平面几何证明中的方法与技巧 …… 298

第十六讲　添辅助线与几何变换 …… 325

第十七讲　面积问题与面积方法 …… 347

第十八讲　几何不等式证明的方法与技巧 …… 360

第十九讲　解证比例线段问题的类型及其方法 …… 375

第二十讲　几何动态思维及其应用 …… 392

第二篇　解题思想疑难解析篇 …… 407

第一讲　解题策略思想及其应用 …… 408

第二讲　解题战术思想及其应用 …… 433

第三篇　重要题型疑难解析篇 …… 459

第一讲　求解应用题的思路与型式 …… 459

第二讲　求解探索题的思路与型式 …… 480

第三讲　求解综合题的思路与型式 …… 505

解答与提示 …… 537

怎样学好数学

学好数学是每一个学生的真切愿望. 然而,学好数学单有愿望是不够的,更重要的是要有切实行动、顽强意志与进取精神. 这些素质的养成,则与学生自身的认识水平、学习素养、引申能力有关. 为此,下面我们就"提高认识"、"加强学习"与"努力引申"这三个问题作些探讨,欲起到抛砖引玉的作用.

一、提高认识

思想是行动的指南,认识是实践的先导,围绕学好数学这个主题,要正确认识以下两个问题:

1. 根本动因的辩证关系

学好数学的因素很多,但大致可分为主观因素和客观因素两大类. 这两类因素,事实上存在着科学的辩证关系. 按照哲学原理,主观因素是内因,客观因素是外因;内因是事物发展、变化的根据,外因则是事物发展、变化的条件,根据起主要的决定作用,条件仅起次要的辅助作用. 毛泽东同志说过:"事物发展的根本原因,不是在事物的外部而是在事物的内部,在于事物内部的矛盾性. 任何事物内部都有这种矛盾性,因此引起了事物的运动和发展. 事物内部的这种矛盾性是事物发展的根本原因,一事物和他事物的互相联系和互相影响则是事物发展的第二位的原因. "然而,唯物辩证法并不否认外因的作用,而且承认在一定情况下它还会起决定作用. 例如鸡蛋虽然有变为小鸡的可能性,但要真正变成小鸡,还必须有适当的温度. 当然,一块石头——不是鸡蛋,温度再适当,也是无论如何变不成小鸡的. 显然,外因是不能脱离内因去任意决定事物发展的,它必须通过内因才能起作用,而且外因在起作用的时候,所以能把事物的发展引导到某个方向,归根到底还是由于事物本身有向那个方向发展的可能性. 事实告诉我们,根据是不能创造的,条件却是可以创造的. 当然创造条件也不是任意的,而是要根据条件本身的规律性. 只要摸到事物的规律性,我们就可以把握事物发展的根据,创造事物发展的条件,充分发挥主观能动作用,变不利条件为有利条件,来加速事物的发展过程.

根据以上的论述,一个人要学好数学的内因根据,应是自身的内在矛盾性,实际上就是人的进取活力与退缩阻力的矛盾. 人的进取活力,主要表现在:有进取的愿望,有进取的目标,有进取的努力,有进取的坚毅,有进取的反思,有进取的调整,有进取的深化,有进取的升华. 不进则退,不思进则缩. 退缩的阻力,主要表现在:安于现状的满足,怕苦怕累的惰性,缺乏毅力的懈怠,思维劳动的粗放,不良习惯的束缚,学习方法的陈旧,自我剖析的不力,革新意识的淡薄. 显然,进取活力大于退缩阻力,一个人便会向学好数学的方向发展,反之,则难以摆脱学不好数学的

困境.

有的学生认为,自己没有学好数学是因为自己的学校或老师不理想.在他看来,只要能在好的学校里学或者有好的老师教,自己就一定能学好数学.其实,这种认识是片面的,好的学校或者好的老师,只是为学好数学营造了一定的外部条件,它通过自身努力会收到较好的学习效果,但并非是学好数学的“保险箱”.如果你自身不努力,没有好的学习方法,再好的学校或者老师,也是无法学好数学的.事实上,在好的学校或者在好老师所教的班里,不是也有一些数学没有学好的学生吗?同样,在非重点中学或者一般老师所教的班里,不是也会出现数学尖子学生吗?正确的认识应当是:一个人只要具有进取的活力——具备内因根据,再有好的学校或老师——外因条件,学好数学才会有保证;即使不具备这个外因条件,也会通过发挥自身的主观能动性,去创造适宜的外因条件来加以弥补,或者平时多求教老师,或者随时多求教数学学得较好的同学,或者多自学好的数学读物,等等,这样也是能学好数学的.

2. *认知结构的变化规律*

正确认识中学生在数学方面的认知结构的内容及其发展变化过程,对学好数学颇有裨益.

中学数学内容自成一套相对严密的知识结构.学生学习数学的时候,总要结合自己的感觉、知觉、记忆、思维、联想等认知特点,按照自己所认识的深度和广度去理解、接受新信息,获取新知识.对同样的数学知识和同等的课堂条件,不同的学生在接受和掌握程度上会存在明显差异,其中原因虽然是多方面的,但是恰主要和学生相应的心理结构息息相关.一个学生的数学基础和相应的心理结构密切配合、相互作用,构成了这个学生的达到某种水平的数学认知结构.而学生的学习过程实质是认知结构发展变化的过程,即从原有认识结构逐步发展成为新的认知结构的过程.因此,分析和掌握学生的认知过程的发展变化规律,对提高学生学习质量有着十分密切的关系.例如,一般学生学习平面几何论证题时,普遍存在一定的困难.原因是在学习平面几何前,学生已形成了套用运算法则、数学公式进行求解的认知结构及其变形化归的思维模式,这与学习平面几何中要运用定义概念、数学定理进行论证的认知结构及其判断推理的思维模式有着很大的差异.一时的不适应造成了不少学生的困惑与怯难.然而,只要学生认真学习范例,加强习题训练,潜心揣摩钻研,努力归结提炼,探索论证规律,掌握论证方法与技巧,必将会尽快地实现认知结构的调整、发展、完善与飞跃.经历了这样一个“过程”,学生的知识结构和相应的心理结构就有可能达到一个新水平,学习任务也会随之顺利完成.

学生的数学认知结构的变化一般分为三个阶段:输入吸纳阶段,相互作用阶段和巩固发展阶段.认识并掌握三个阶段的发展规律,对于学生无疑是十分重要的.

(1) 输入吸纳阶段. 输入吸纳总是在一定环境下进行的，良好的学习动机是促进学生学好数学的重要条件. 而学习动机中最现实、最活跃的成分是学习兴趣(即求知欲). 有兴趣的学习不仅能使学生全神贯注、积极思考，甚至会达到废寝忘食的地步，而且在满怀兴趣的状态下所学习的一切，常常能掌握得迅速、深刻而牢固；在相反状态下，学习缺乏积极思维的配合，就容易产生概念不清、理解不深、掌握不牢和运用不活等种种弊病.

输入的第二条原则是"力所能及". 力所能及，一是指原有知识水平是否足够提供萌发基础；二是心理水平是否具有足够承受能力. 对于学生来说，脱离自己的实际，好高骛远，则是不足取的.

(2) 相互作用阶段. 这个阶段是输入新学习内容之后和学生原有的数学认知结构会产生相互作用. 例如，学生学了化简、求值的运算方式——递等式推导后，却往往会盲目地迁移到方程的运算方式——等式分步推导上；学了方程的同解变形——两边同乘除一个不等于零的数后，又常常会盲目地迁移到不等式的同解变形——两边同乘正数不等号不变向，两边同乘负数不等号要变向上；学了正确论证实例后，还会屡屡因对论证的逻辑机制关注不力而出现"虚假论据"、"不能推出"、"论据不足"、"循环论证"、"逻辑混乱"、"论题不清"与"偷换论题"等错误……总之，新内容与旧认知的相互作用，如不去理顺它们之间的相互关系，定会导致层出不穷的谬误. 其原因在于：当新内容与原有认知结构相一致的情况下，新内容比较容易地被纳入原有认知结构而实行同化，进而融化为新的整体；当新内容与原有认知结构不一致时，学生必须对自己头脑中原有知识结构进行相应调整，才有可能建立起新的认知结构，而一旦新的认知结构形成，我们才可以认为理解并掌握了新的学习内容，这时学生的总体认识水平也同步地获得了提高.

(3) 巩固发展阶段. 新内容和原有数学认知结构相互作用的结果产生新的数学认知结构，但要使它巩固、完善乃至成为新发展的良好起点，必须通过有效练习. 这里，经验的学习，技能的训练，思维的运动是主要环节，而吸收融化和探索创造是这个阶段的主要目标. 通过一系列有效训练，新的认知结构从"产生"过渡到"形成"，并在练习过程中获得"巩固和发展"，表现出学生具有相应的能力，并能够顺利地把有关方法和知识运用到实际中去. 因此，在这个阶段，学生一定要努力使自己的认知结构能够顺利地获得发展.

二、加强学习

什么是学习？从字面上讲，学是指获得知识或行为经验，习是指温习、实习与练习. 学习是学、思、习、行的总称. 从心理学角度分析，学习是涉及人脑中发生的心理现象的一种复杂的过程.

显然，学习是增长知识与才干的源泉. 从无知到有知，从知之甚少到知之甚多，只能依赖于学习. 学好数学也必须依仗于学习，通过不断地学习，提高知识的精深、宽广程度，增强技能的熟练、灵巧程度，发展智慧的聪颖、敏锐程度，推进能

力的强化、拓宽程度.

学习,会使学习者经过一定训练之后出现某种变化.这种变化是复杂的,有运动的、情感的、认知的;这种变化的心理机制是多样的,有条件反射的、尝试错误的、观察模仿的、突觉顿悟的;引起这些变化的原因,有学习情景的因素,也有学习者自身的因素等.

围绕学好数学这个主题,实践加强学习必须重视以下两个问题:

1. 学习渠道的不断宽泛

人的学习渠道是相当宽泛的,一切可交流的人事、情境都是学习渠道.古人有"三人行必有吾师"的至理名言,其意是要求人必须谦虚谨慎、虚怀若谷.而今是信息时代,人们更应深谙海纳一切有利信息的道理.

有的学生往往把学习渠道局限于课堂学习或者教师的授课活动;更有甚者,有的学生连上述渠道都不珍惜,上课不认真听讲,做作业草率马虎.这种狭隘的学习渠道观,限制了学习者的视野,扭曲了学习者的心态,使不少有用信息在有利的情景中白白地流失了.

综观数学尖子的学习实际,他们都有"乐于学习,善于学习"的特点.他们热爱学习,无论是听课、作业,还是看书、应试,不仅认真、投入,而且用心、动脑;他们虚心求师,无论是老师、同学,还是教材、读物,只要有可取之处、有过己之长,都予以采纳、吸收,因而才会成为超越众人的"巨子".

2. 学习素质的全面提高

有相当数量的学生对数学课程是喜爱的,学习也是努力的.但用他们自己的话来说:"我听课时仔细认真,笔记全,课外练习也多,但不知为什么,学习效率总是提不高?"从他们十分羡慕班上那些聪明学生反应快、成绩好的神情上,反映出他们具有一股提高数学学习效率的迫切要求.这里,我们向这些学生提出一个问题:"你的学习立足点是在素质上加强自己呢?还是在'类型'的道路上来回奔波?"如果是前者,坚持不懈努力,总会有成功的一天.否则,建议你在思想上进行反思,彻底改变原有的学习方法.学习过程中,为了有利于自己掌握知识、技能,必需重视"类型"的更新.因为新知识必须建立在旧知识的基础上,复杂的、高一级的问题的解决办法,通常也要建立在解决简单的、低一级问题的基础上.因此,把一些情况相似的问题(指条件相似的问题或者方法类同的问题)归结成一类,不但有利而且很有必要.但是,如果一个学生把自己的精力、重点仅仅放在已有"类型"的记忆和运用上,就是上述的"在'类型'的道路上来回奔波",结果使自己只会依样画葫芦,充其量做到照搬不误.其最大恶果还在于自己压抑了自身聪明才智的发挥和发展.相反地,如果一名学生在学习数学知识的过程中,把学习、掌握与之相关联的学习方法、思考方法放在重要位置上,那么他的"学习立足点是在素质上加强自己".结果自己的吸取、消化能力和解决实际问题的能力不断得到提高,因此,总有一天自己也会变得聪明起来.

全面的学习素质反映为一系列的基本能力：阅读能力，记忆能力，识别能力，思维能力，运算能力，论证能力，动手能力与表达能力等. 而这些能力的提高，又集中体现在以下五个复合能力（它们既互有关联又相对区别）上：

(1) 解题能力. 有些学生认为，提高解题能力的途径是多做数学题. 这种看法有失偏颇. 平日学生能自觉多做一些数学练习题固然很好，但关键是要重视掌握好分析和综合这两种基本思维方法，习惯于把问题的条件和结论沟通起来，把面临的信息和头脑中已有的旧知识沟通起来，并能随时调用现时所需要的旧知识. “分析”是由果溯因的思维方法，“综合”是由因导果的思维方法，两者都是上述各类“沟通”的有效武器. 我们提倡，拿到一道数学题不要急于追求结果，而应先作一番分析. 这是因为解题时，每个人不可能经常处于“灵机一动，计上心来”的最佳状态，解题方法的选定一般都孕育于分析之中. 想要解决命题 A，经过分析需要解决命题 B，而解决命题 B，经分析又需要解决命题 C，……. 接连产生的一系列命题 B、C……向学生头脑发出联想信息，如果恰好与自己已有知识、经验吻合，那么在新命题解决以后，原命题 A 也就会迎刃而解. 例如，对于命题“已知$\triangle ABC$是$\odot O$的内接三角形，AE是$\odot O$的直径，交BC于点D. 求证：$\tan\angle ABC\cdot\tan\angle ACB=\dfrac{AD}{DE}$.”粗看似乎难以找到证题途径，但是可先分析一下：如图 0-1，由图想性，挖掘图形中隐含的性质. 由 AE 是$\odot O$的直径，联想到直径的有关性质，即有：①直径上的圆周角是直角. 若连结 BE，CE，便得到两个直角三角形：$\triangle ABE$，$\triangle ACE$. ②垂径定理. 若由 B 或 C 作直径 AE 的垂线，则这条弦便被直径平分，但却破坏了线段 AD 或 DE. ③过直径外端作圆的切线. 这样做，虽然可以得到直角，但与 AD、DE 的关系仍不明朗. 下面，我们再发展条件，看到连结 BE、CE 后，$\triangle ABD\backsim\triangle CED$，$\triangle ACD\backsim\triangle BED$，得到对应边成比例，有可能得出$\dfrac{AD}{DE}$. 构造出直角三角形后，便可为应用$\angle ABC$、$\angle ACB$的正切值创造了条件. 接着，我们再从求证入手，去寻找结论与条件之间的联系. 求证中有$\tan\angle ABC$与$\tan\angle ACB$的乘积，需从它们的定义考虑，需出现直角三角形，因此可连结 BE、CE，得到直角三角形 ABE 与 ACE，同时又得到$\angle ABC=\angle AEC$，$\angle ACB=\angle AEB$，于是$\tan\angle ABC=\tan\angle AEC=\dfrac{AC}{CE}$；$\tan\angle ACB=\tan\angle AEB=\dfrac{AB}{BE}$，则$\tan\angle ABC\cdot\tan\angle ACB=\dfrac{AC}{CE}\cdot\dfrac{AB}{BE}=\dfrac{AB}{CE}\cdot\dfrac{AC}{BE}$. 然后，再由$\triangle ABD\backsim\triangle CED$、$\triangle ACD\backsim\triangle BED$，使比例式中出现 $AD:DE$，从而使问题得证. 然后，就不难运用一小段综合推理来证明此题.

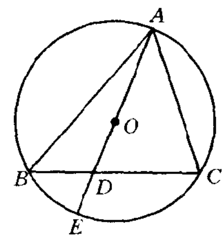

图 0-1

有些学生认为，探求解题途径用分析法，着手解题表达用综合法. 这种设想虽

好，但是实际上分析探求与综合解题之间难以截然分开，往往混合进行，这样做可以省时省力，切实解决问题. 这好比你到某新村拜访一位朋友，尽管主人详尽地给你介绍路径，终因地形雷同，寻找颇为困难，但是热情的主人走出数步，常能很快迎到来访客人. 这和综合、分析结合探求解题途径有异曲同工之妙. 当然，单独运用综合法或者单纯运用分析法探求和解题也是允许的. 但是，用分析法解题时，经分析所得的每一个新结论要保证先前那个旧结论能充分成立. 有些学生喜滋滋地介绍解题窍门："解题过程中，一旦山穷水尽时，最好去寻找一下还有哪些已知数学条件尚未被运用，这些条件往往是最终解决问题的突破口."这个经验当然很有实用价值，但我们还是力求多打"主动"仗，一开始就把命题的条件和结论全面琢磨，养成良好习惯. 只有这样，我们的分析思维能力和综合思维能力才有可能扎扎实实地提高起来.

(2) 洞察能力. 学生不应成为被动的知识接受者，要争取成为具有较强的数学洞察能力的主动探索者. 面临一大堆"信息"，要敢于和善于观察、归纳、概括、猜想，从中看出固有的现象或规律. 而发展这些能力的关键是学会"比较"的本领. 例如，有一道平面几何数学竞赛题：已知$\triangle ABC$中，$AB > AC$，$\angle A$的一个外角平分线交$\triangle ABC$的外接圆于点E，过E作$EF \perp AB$，垂足为F，求证：$2AF = AB - AC$（见图 0-2）.

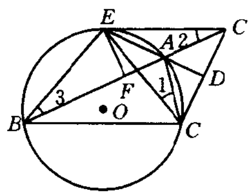

图 0-2

这道题的一般证法是作$\angle BAC$的平分线交外接圆于点E，过E作AB与AC的延长线的垂线逐步证明. 但这种方法辅助线作得多，比较繁琐. 然而，若能深刻剖析AF与AB、AC之间的潜在关系，敏锐洞察三者之间的必然联系，则将会得出一种十分简捷的极佳证法. 由此可见，具备较强的洞察能力是本例获得极佳证法的关键.

那么，如何才会洞察到AF与AB、AC的必然联系呢?

首先，由题设条件"$\angle A$的一个外角平分线"可联想到要构建"等腰三角形加顶角平分线"的数学模型Ⅰ. 又为使AB与AC联系起来，故想到将AC转移到BA的延长线上，并构建出如图 0-2 中的等腰三角形CAC'，有$AC' = AC$，AD是$\triangle ABC$中$\angle A$的外角平分线，也是等腰三角CAC'的顶角平分线. 进而，可得到$\triangle AEC \cong \triangle AEC'$；$\angle 1 = \angle 2$.

其次，由$\angle 2 = \angle 1 = \angle 3$及$EF \perp BC'$，可联想到这又可构建一个与数学模型Ⅰ等价的数学模型Ⅱ——"等腰三角形加底边上高"，使AF与AB、AC的必然联系显露了出来：

$\because \quad AC + AF = AC' + AF = FC' = FB = AB - AF$，

$\therefore \quad 2AF = AB - AC$.

由此证法可见，只要能深刻剖析已知条件的本质特征，进而又能洞察到求证

式中三条线段之间的必然联系，就可化繁为简，证题过程也就会变得非常便捷.

实践告诉我们，提高洞察能力，有赖于基础知识的扎实、基本技能的熟练与基本方法的精巧，仰仗于概念本质的掌握、常见模型的熟悉与信息组合的敏锐，孕育于创造思维的突显、顿悟意识的开启与聚焦思索的强化.

(3) 梳理能力. 梳理是指将学到的知识加以条理化、程序化、逻辑化的一种思维形式. 经常进行梳理，可以使所学知识清晰、完善起来，进而能准确、灵活地予以应用.

梳理的基础是比较与分类. 人们认识事物一般是从识别事物开始的，要识别事物，首先就要进行比较，“有比较才能鉴别”. 而要系统地总结和掌握已经识别的各种事物，就要进一步通过比较进行分类. 所以，比较与分类是一对关系密切的基本的逻辑方法.

比较，是确定对象之间差异点和共同点并加以运用的逻辑推理方法. 比较一般有三个步骤：确定比较对象——异同关系分析——异同关系运用. 比较是一种“发现”的手段，可以揭示出不易直接观察到的运动与变化，可以顿悟出突发新颖的思路与理念. 例如，有关欧氏几何中的平行公理是否独立的问题，自《几何原本》问世后 2 千多年，不少数学家花费了毕生精力想予以证明，然而都没有取得预期的效果. 著名德国数学家高斯、俄国数学家罗巴切夫斯基、匈牙利数学家波利亚则通过比较，发现对欧氏几何的公理系统仅替换另一个平行公设——过直线外一点至少可以作两条直线与已知直线平行，则便得到了一个新的几何系统——罗氏几何.

联系到学生的实际情况，经常会发现学生面对具体题目有茫然不知所措的现象，这就说明有些学生的主要问题仍是不会分析和比较. 因此，学习中掌握分析和比较的本领(尤其是比较本领)，就有可能从根本上提高自己的水平. 以分解因式：

$$x^4-2x^2y-3y^2+8y-4$$

为例. 解题时，就应力求做到既能与现成的基本类型作直接比较，又能对形式稍作变换，再与基本类型作对照比较. 通过比较，可以集中领悟到解题的核心在于选“元”. 有的学生说，把 x 看成系数字母后，原式是一个关于 y 的二次三项式；有的说，把 x^2 看成新元后，原式可被看成关于 x^2 的二次三项式；很多学生认为，可以看成关于 x^2 和 y 的二元二次式；也有学生提出，稍作分组后，符合某乘法公式形状. 每个学生都在搜索头脑中已熟悉的各种基本“类型”，进行各种直接或间接的比较对照，从而获得一定的结果. 作为一名优秀学生，不仅要很好地观察比较，而且要在同班同学的议论过程中自觉地归纳一下各种方法的总体实质——降为一元或二元的二次式. 着眼于在不变(题目不变)中找变(从不同的角度对照、比较，从而找出不同的解题途径)，又能通过对问题不同的处理方法的比较归纳，从变化着的东西中学习不变的东西，使自己的思维进入较高阶段.

"比较"是归纳、概括的基础.学生在整个中学学习阶段要时刻注意养成"比较"的习惯和本领,并且去粗取精、去伪存真,那么在学习新概念、理解新方法、解决新问题时都能抓住本质,且能灵活地解决问题.

分类是根据对象的相同点和差异点将对象划分为不同种类的逻辑方法,因此也称为划分.人们通过比较,识别对象之间的异同后进行分类,根据共同点将研究对象归合为较大的类,根据差异点将研究对象划分为较小的类,从而将事物区分为具有一定从属关系的不同等级的系统.

在科学迅速发展的现代,应用分类可以使大量繁杂的材料条理化、系统化.在比较的基础上建立的分类系统,为存取资料提供了方便,为进一步科学研究创造了条件.研究过程中产生的新资料与已有资料进行比较,则可能充实或扩大已有的分类,形成更系统、更丰富的分类系统,为人们所了解、所利用.例如,在人们认识复数的过程中,正是由于一元二次方程这一类方程里,正数的根与"负数的根"(即含有负数开平方的根)在已有的实数运算法则中的深刻内在联系,导致人们预见并构造了虚数,促进了数系深层次的分类.

学生在数学学习中,学习新概念、研究新对象,有时可以应用比较的方法,在掌握旧知识的基础上接受新知识;而在一定阶段学习后,又可在比较的基础上对学过的某一部分知识作出分类梳理.

实践证明,应用比较与分类,提高梳理能力,可以使学生加深对系统知识的理解与掌握,从而做到能得心应手地予以应用.

(4) 化归能力.化归是中学数学学习过程中经常运用的一种有效手段.根据已有认知结构,将一些数学问题转化为有足够基础解决的另一些数学问题.这种转化主题的学习方法称为化归方法.善于化归的学生不仅经常会"逢凶化吉"、"柳暗花明又一村",而且学习起点和总体认识水平比其他同学往往略高一筹.例如,问题:"已知 $a>1$ 且 $a\neq 1$,求使方程 $\log_a(x-a_k)=\log_a^2(x^2-a^2)$ 有解的 k 的取值范围."一种解法是化归为方程 $(x-a_k)^2=x^2-a^2$,但这个方程含有参数 k,最后需检验满足不等式 $x-a_k>0(x^2-a^2>0)$.如果我们考虑到已经掌握的有关曲线知识,构造函数 $y=x-a_k$ 和函数 $y=\sqrt{x^2-a^2}$,问题可以化归为求在 x 轴上方的等边双曲线部分与斜率为 1 的直线系具有公共点的条件.上述两种解法都是典型的化归方法.其中第二种解法运用数形结合,把代数问题化为几何问题,再把所获几何解答反演回代数领域而获得最终解答.

一般地说,化归方法就是通过分析、联系,对命题条件或者命题结论进行适当变换,达到转化为自己已经掌握的问题的基点上.例如,把某一个问题化归为求某一函数的最大值、化归为解某一不等式组等等.综观人类认识世界的实践,人们通过化归方法总是有一个由简到繁,由低级到高级的认识过程.所以,化归思想早已成为人们的宝贵财富.学生在整个教学过程中,重视进行化归训练,会促使自己一眼看透数学问题的本质,增强自己"随机应变"能力.

实际经验告诉我们，换元法和消元法在命题化归过程中有着不可估量的重要作用．几何课程中，面积、体积、线段、角之间的数量关系变换，常令学生赞叹数学内在之美并被利用为化归的一种具体手段．对此，重视知识的积累是很重要的．

(5) 攻难能力．攻难能力是指攻克难题的能力．难题大致是一些复杂的数学问题或者是一些抽象的数学问题．

中学生对于特殊条件下的一些数学问题，经过通常的分析、综合推理过程，往往可以获得比较满意的结果．但是对于一般化条件或一般化形式出现的数学问题常常束手无策，不知从何下手．解决这个难点，大致有如下办法：

1) 学会"一般"和"特殊"相互转化的学习方法．先把一般形式的问题，取特殊情形，化繁为简，找出适当的解决办法，然后再对一般形式问题研究解决办法．很多情形下，简化后问题的解决办法恰好就是繁杂的一般形式的数学问题的解决办法．这种处理方法就是"解剖麻雀"的研究方法．麻雀虽小，五脏俱全，剖开了一只小麻雀，往往能够解开若干大动物体内结构之谜．有些时候，经简化后的数学问题的解决办法虽不具有普遍性，但我们仍应牢牢抓住点滴小成果，作为阶梯，以有利于原先问题的解决．例如，对于下列命题："a、b、$c \in \mathbf{R}$，$|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$．求证：

$$abc+2>a+b+c."$$

学生用求差法做，常常不能获得满意结果．若试把三个元 a、b、c 改成两个元 a、b，先证：

$$ab+1>a+b,$$

这是非常容易证明的(用求差法)，然后利用前面的可贵尝试成果，把三个元情形简化为两个元情形：

$$\begin{aligned} abc+2 &= (ab\cdot c+1)+1>(ab+c)+1 \\ &= (ab+1)+c>a+b+c. \end{aligned}$$

这里"特殊"情形成了"复杂"问题的化归基础，起着开门钥匙的作用．

2) 学会运用数学归纳法．当一般性问题适用于字母 n 取自然数集或其某个子集时，常可考虑运用数学归纳法解决．

3) 掌握分类讨论方法．有些数学问题粗粗一看似乎情况繁杂，难以解决，但按照某种标准进行分类，而每个同一类情形都具有统一规律(如统一的论证、计算规律)时，就可采取适当分类的办法，分门别类地加以解决．

分类之后，同一类中的条件基本一致，除原先命题规定的条件保持不变外，又新增了特定条件(分类条件)．因此，各类问题与原来整体命题相比显得单纯易解，从而增加解决原整体命题的可能性．所以从本质上看，分类讨论方法也是一种化"一般"为"特殊"的数学方法．

三、努力引申

引申是学习、解题的后续环节.引申,就是对学习、解题的体验进行开拓性的思考,以引申出新的问题、新的解法、新的模型和新的理念.又由于解题是"数学的心脏",也是学习的核心环节,故而更应重视解题后的引申.例如:这个问题的"条件"之间的联系有何内在规律?这个问题的"条件"与"已知"之间有否更好的内在联系?这个问题的"条件"与"要求"之间有否更佳的求解思路?能否用上与问题相关的定理?能否用上已解决的问题?能否用上别的方法?能否解决"条件"或"要求"或"题意"作了变化的问题?是否能用上这个问题的方法与结果?能否解决一个与此有关的问题?能否解决一个更普遍的问题?能否解决一个更特殊的问题?能否解决一个可类比的问题?能否解决比"条件"更苛刻的问题?是否见过问题相同而形式稍有不同的问题?是否可知道与此有关的问题?是否存在形式相同而内容相异的问题?是否能推得更一般化的问题?是否能提炼出新的至理警言?是否能总结出新的规律性认识?……引申的目的是为了深化认识,激发智慧,增长才华,磨炼意志,提高能力,铸造品质.实践告诉我们,引申的质量会影响到认知升华的高度和能力提高的幅度.引申的重视与否及其投入程度,会带来发散思维能力、收敛思维能力、开拓创造精神、解决问题水准上的差异.由此可见,学习、解题绝不可轻视努力引申这个极其重要的后续环节.

围绕学好数学这个主题,实践努力引申必须明确以下两个问题:

1. 学习引申的基本方向

学习引申的基本方向是学得深刻、用得灵活.怎样才能学得深刻、用得灵活?

(1) 改善数学思维品质.思维是人脑借助语言实现的对客观事物的概括、间接的反映,是反映对象本质和规律的认识过程.实际上,人的大脑思考问题时的内部活动就是思维.

思维是运动的.新的需要与已有思维水平的矛盾是推动思维发展的动力.人的思维发展,表现为人的思维品质的改善、思维能力的提高和思维方法的运用.显然,坚持不懈的追求、勤奋不息的实践,是发展思维的必由之路.

学生的学习,不能仅仅满足于懂得课本中的一般性叙述或老师在课堂内的一般性讲解,因为"懂"仅仅表示没有疑问,满足于"懂"恰好是阻碍进一步深入理解的大敌.

怎样使自己学得深透些,怎样改善数学思维品质?养成学习过程中的推敲、引申习惯不啻是一个好办法.例如,学习棱柱的定义,通常采用大量模型观察,归纳出棱柱的本质属性,然后作出一个精确定义:"有两个面互相平行,其余各面都是四边形,并且每相邻两个四边形的公共边也都互相平行,由这些面所围成的几何体叫做棱柱."学生下定义(或者复述)的时候,常常会把"面"说成"平面",漏掉"其余"、"每相邻"等必要字眼,有些学生甚至错误运用"侧棱互相平行"作为定义的主要依托.这些错误,学生往往自己不易觉察.因此,当我们学习定义、定理和法