大学物理实验

王诗进 主编

航空工业出版社

大学物理实验

王诗进　主编

航空工业出版社

1990

内 容 提 要

本书包括绪论、力学热学实验、光学实验、近代物理和综合性实验五部分，共43个实验。前35个为基础实验，各校可根据仪器配备情况选做其中20个实验以满足60学时教学需要。最后8个为较高层次的研究型实验，可供优秀学生选修。各部分均配有简单设计性实验，以进一步培养学生的实验能力。在书末附有物理实验数据处理通用程序，用以初步培养学生使用微机的能力。本书可作高等工业学校本科各专业物理实验课教材或参考书。

大 学 物 理 实 验

王诗进 主编

航空工业出版社出版发行
（北京市和平里小关东里14号）
—邮政编码：100013—
全国各地新华书店经售
南京航空学院印刷厂印刷

1990年4月第1版	1990年4月第1次印刷
开本：787×1092毫米 1/16	印张：14.75
印数：1-1500册	字数：361.9千字

ISBN 7-80046-230-7/G·023

定价：3.10元

前　　言

本书根据1986年制订的“高等工业学校物理实验课程教学基本要求”，结合编者的教学实践编写而成。

物理实验是高等工业学校一门基础课程，其主要任务是培养学生的实验能力和科学作风。实验课的特点：一是学生必须亲自动手做实验；二是在实验中将出现各种各样的物理现象，学生要运用所学知识进行思考分析，用分析得出的结论来指导自己的实践。所以在实验教学中，要发挥学生主观能动性，使学生树立起研究问题的主动态度。

全书包括五个部分，即绪论、力学热学实验、电磁学实验、光学实验、近代物理和综合性实验。

由于测量误差、数据处理和物理实验方法的基本思想贯串于整个实验过程，在绪论中，这部分作为主要的内容来叙述。在误差估算方面，尽量要求运用标准误差，也可以用平均误差来估算实验结果。但在物理实验的范围内不可能对每一项实验都用严格的误差理论来分析实验结果。根据具体情况可由教师提出要求。

实验一至实验三十五为基础实验。其中多数实验都需三学时方能完成，可根据实验室条件，选做其中二十个实验，以满足教学大纲要求的60学时实验教学的需要。

为适应科学技术迅速发展，尽可能使学生在物理实验室接触到一些先进技术和新的测试方法，起到开拓视野的作用，最后编写了八个较高层次带有研究型的综合性实验项目。在编写中注意到这部分实验与基础实验之间的衔接，尽量减小坡度。这部分内容可作为优秀学生因材施教的内容，即作为选修实验。

书中编入五个简单设计性实验，其中有一些环节要求学生独立思考，自行设计，以利于进一步提高学生的实验水平。

本书附录Ⅰ，列出了用BASIC语言编制、配合PC-1500微机，用最小二乘法处理数据和标准误差估算的通用程序，可用于部分实验数据处理，以初步训练学生使用微机的能力。

本书在内容叙述上，力求做到实验理论叙述清楚，计算公式推导完整。某些仪器的使用说明，作为附录列在各实验内容正文后面，以便查询。

本书在编写过程中得到东南大学潘人培老师的热情关心与指导，同时参考了其他兄弟院校的实验教材。编者在此一并表示谢意。

本书实验一、四、九、十八、二十一由管尧兴编写；实验六、七、八由何明初编写；实验二十四由孟善贞编写；实验三十四、三十七、三十八由赵志敏编写；总附录Ⅰ由邱振芳编写；由王诗进负责主编并编写其余全部内容。

编者水平有限，书中缺点和错误在所难免，请各兄弟院校的同事们和广大读者批评指正。

编　者

1988.10.

目 录

绪 论

力学、热学实验

电 磁 学 实 验

光　学　实　验

近代物理与综合性实验

附　录

绪　论

第一节　物理实验课的任务

科学实验是科学理论的源泉，是工程技术的基础。在近代科学技术和工程技术的发展中几乎所有的科学技术上的重大突破，都是经过科学实验取得的。因此，作为培养德、智、体全面发展的高级技术人才的高等工科院校，不仅要使学生具有比较深广的理论知识，而且要培养学生具有较强的从事科学实验的能力，以适应科学技术不断进步和社会主义现代化建设的需要。

物理实验课是对学生进行科学实验基础训练的一门必修课程，是学生入学后受到系统的实验方法和实验技能训练的开端。通过本课程的教学，使学生掌握实验基本理论、方法和技能，用实验的方法研究问题的初步能力。

本课程的具体任务是：

1． 培养与提高学生的物理实验技能，并通过对实验现象的观察、分析和对物理量的测量，学习物理实验知识，加深对物理学原理的理解。

2． 培养与提高学生的实验能力，包括：能够通过自学实验教材和参考资料，正确理解实验内容；能够借助教材或仪器说明书，正确使用常用仪器；能运用物理学理论对实验现象进行初步分析；能正确记录、分析和处理实验数据，绘制图线，写出合格的实验报告；能独立完成简单的设计性实验。

3． 培养与提高学生的科学实验素养，使学生具有理论联系实际和实事求是的科学作风，严肃认真的工作态度，勤奋研究的探索精神和遵守纪律，爱护公共财产的优良品德。

作为教学实验，经实验室技术人员精心设计，突出某些环节，使学生得到实验技能的训练。例如，按照拟定的实验步骤连接线路，调整仪器，进行观察与测量等。学生不应当满足于测出数据，完成实验报告，而应当在整个实验过程中，积极发挥主观能动性进行观察、思考与分析、探索最佳实验方案与测量方法，不断提高自己的实验能力。

第二节　物理实验课的基本程序

一、预习

为了在规定时间内高质量地完成实验，学生必须作好实验前的预习。

1． 理论的准备：认真阅读教材和有关参考书，充分了解实验的理论依据和条件。

如果不理解实验原理就动手操作，只能机械地照教材规定步骤读得一些数据，但不能深入地理解物理现象的本质，更谈不上注意实验方法上的技巧以及主动地研究实验中出现的各种现象。

2． 实验仪器的准备：阅读教材中有关仪器部分，了解仪器的工作原理、工作条件和操

作规程。

3. 观测的准备：明确实验内容与主要步骤，即“做什么？”，“怎么做”？然后设计好记录实验原始数据的表格，表格要设计得既便于记录又便于数据整理。

二、实验的观测与记录

1. 仪器的安装和调整：使用仪器进行测量时，必须满足仪器正常工作条件（如螺旋测微器的调零，天平调整水平和平衡，光路调共轴等高）。不重视耐心细致的调整仪器，而忙于进行测量，是初学者容易出现的毛病，必须纠正。使用仪器测量时，必须按操作规程进行，不明确操作规程，千万不要动用仪器。

2. 观测：准备就绪后就开始测量，并要求实验者精力集中，仔细观察，精心操作。应发挥主观能动性以获得所用仪器可能达到的最佳结果。

3. 记录：原始数据是指从仪器上直接读出而未经整理的数据，它是以后计算和分析问题的依据，在实际工作中则是宝贵的资料。初学者往往觉得自己实验经验少、记得乱，而随便用一张纸先记下来，以后再整理抄在正式记录纸上，这样做就失去了原始记录的意义。应当一开始就记录在正式的记录纸上。记录的内容包括：日期、时间、地点、合作者、室温、气压、仪器编号、名称及规格、原始数据及有关现象。

三、数据的整理和实验报告

实验过程中要随时整理数据，尽可能在实验课上完成数据整理工作，以便及时发现问题作补充测量。

实验报告是实验工作的总结，是学生实验成果的书面反映。要求文字通顺、字迹端正、数据完整、图表规范、结果正确，并进行认真讨论。实验后的讨论是发挥学生才智的重要环节，应当努力去做。

实验报告的内容一般包括：实验名称、目的、原理摘要、仪器名称及规格、简要步骤、原始数据和数据处理、实验结果、讨论与分析。

第三节　测量与误差

在物理实验中，要用实验的方法研究各种物理规律，因此要定量地测出有关物理量的大小。所谓测量就是借助仪器用某一计量单位把待测量的大小表示出来。测量可分为两大类：一类是用计量仪器和待测量进行比较，就可获得结果。例如用米尺测物体的长度，用天平测物体的质量，这一类测量称为直接测量；另一类是由几个直接测量量按一定的函数关系求出待测量。例如用单摆测重力加速度 g 时，需先测出摆长 l 和周期 T，再按公式 $g=4\pi^2\cdot\frac{l}{T^2}$ 算出 g，这类测量称为间接测量。

每个物理量都是客观存在的，在一定条件下具有不依人的意志为转移的客观数值，这个客观数值称为物理量的真值。进行测量就是想要获得待测量的真值，但是测量是依据一定的理论和方法，使用一定的仪器，在一定的环境中由确定的人进行的，由于实验理论的近似性，实验仪器的灵敏度和分辨力的局限性，以及环境的不稳定性等因素的影响，待测量的真

值是不可能得到的，测量的结果总是待测量的近似值。待测量真值和测得值之间总会存在或多或少的差值，这种差值称测得值的误差。

本节仅介绍有关误差的一些基本知识，学生应着重领会误差分析对确定实验方案，选择实验仪器，调节实验装置以及实验操作、数据处理的指导意义，并学会一些简单的误差估算和数据处理方法。

在测量中，尽量设法减小误差，使测得值尽可能接近真值，称为最佳值（最可信赖值）。为了对得到的最佳值的准确度作出估计，需要研究误差的来源、性质以及处理方法等。

一、系统误差、随机误差和过失误差

由于误差来源和性质不同，一般可将误差分为系统误差、随机误差和过失误差（粗大误差）三类。在实验数据中，这三类误差常常是混杂在一起出现的，现分别进行讨论。

1．系统误差

在同一条件下（方法、仪器、环境和观测者不变），多次测量同一量时，误差数值的大小和正负号或固定不变，或按一定规律变化，这种误差称为系统误差。其来源大致可分为：

（1）仪器误差：这是由于所用仪器本身构造上的不完善或未经校准所造成的误差。例如天平两臂不等；千分尺零点未校准等都会引起系统误差。

（2）方法误差：这是由于测量所依据的理论、实验方法不完善或实验条件不符合要求所引起的误差。如用单摆测重力加速度时，实验摆角偏大，热学测量中热量散发被忽略而造成的误差。

（3）环境误差：这是外界环境（如光照、温度、湿度、电磁场等）的影响而产生的误差。

（4）人身误差：这是由于观测者个人因素带来的误差。如由于个人反应速度不同，使得测量某一物理量时的操作总是超前或落后；由于各人分辨力不同使读数总是偏大或偏小等等。

由于系统误差具有某种确定的规律，多次测量某一物理量，使测得值固定地偏大或偏小，因此，试图通过增加测量次数来减小系统误差是不可能的。但是如果能找出产生系统误差的原因，可加以修正或采取适当方法来消除或减少其影响。

2．随机误差

在同一条件下多次测量同一物理量时，即使排除了产生系统误差的因素，进行精心测量，仍然会出现绝对值和符号以不可预定的方式变化着的误差，这种误差称为随机误差（偶然误差）。

随机误差的来源是由于观察者感官灵敏度和仪器精度有限，周围环境的干扰（温度、湿度、电源电压的起伏）等不可预测的偶然因素造成的。这些因素的影响一般是微小的，并且是混杂出现的，因此难以确定某个因素产生的具体影响的大小。所以对待随机误差不能象对待系统误差那样，找出原因加以排除。但根据随机误差所遵循的统计规律，在一定条件下，可用增加测量次数的方法减小误差，提高测量的精密度。

3．过失误差

过失误差（粗大误差）它是由于人为的过失造成的。如实验者使用仪器操作不规范，或者观测、记录、计算不细心等不正常情况引起的误差。这种误差的出现必将明显歪曲测量结果。因此除要求实验者精力集中，防止出现过失误差外，同时在数据处理中要发现并剔除认

为有过失误差的数据以获得正确的测量结果。

二、测量的精密度、准确度和精确度

在科学实验中，常用精密度、准确度和精确度来评价测量结果。这三个概念涵义不同，使用时应加区别。

1． 精密度高是指多次测量的重复性好，随机误差小，但系统误差大小不明确。

2． 准确度高是指测量数据的平均值偏离真值的程度小，测量结果的系统误差小，但数据的重复性好坏，即随机误差大小不明确。

3． 精确度是测量结果的系统误差和随机误差的综合评定，精确度高是指测量数据集中在真值附近，测量的随机误差与系统误差都比较小。在科学实验中，总希望尽可能提高测量的精确度。图 03-1 以打靶弹着点分布为例说明三者的区别，图 (a) 表示射击的精密度高但准确度差，图 (b) 表示射击的准确度高但精密度差，图 (c) 表示精确度高。

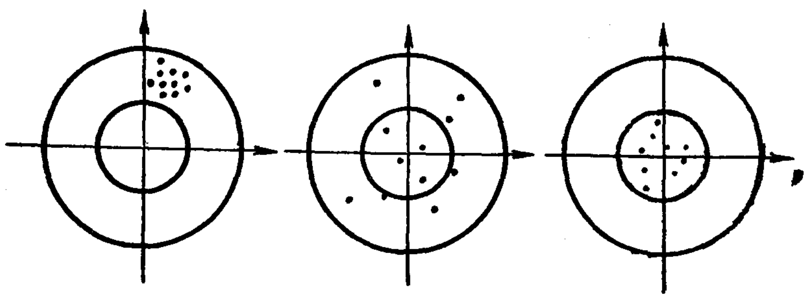

图 03-1 以弹着点分布说明精密度、准确度和精确度

三、直接测量的误差估算

本节讨论随机误差的估算，是假设已经排除了系统误差和过失误差的情况下进行讨论的。

1． 测量结果的最佳值——多次测量的算术平均值

在相同条件下对某一物理量进行重复测量（称为等精密度测量）所得一组数据称为一个测量列。由于误差的存在，测量列中各个数据都稍有不同，那么如何表达测量结果呢？这就需要研究随机误差的基本性质。

假设不存在系统误差，在一般的实验条件下，如果导致误差产生的原因很多，而又不能肯定是由某一种因素起主要作用时，随机误差将由许多微小的、独立的、不可分解的因素决定。这种情况下随机误差将服从正态分布（或称高斯分布），大部分物理实验都属于这种情况。大量实验事实及统计理论都证明，服从正态分布的随机误差可用如图 03-2 所示曲线表示。图中横坐标是误差 $\varDelta$，纵坐标是误差分布几率密度函数 $f(\varDelta)$，由图可看出随机误差有下列性质：

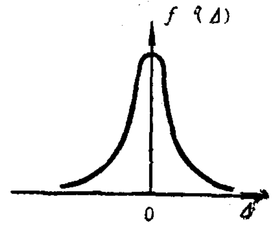

图 03-2

（1）单峰性：绝对值小的误差出现的几率比绝对值大的误差出现的几率大。

（2）对称性：绝对值相同的正负误差出现的几率相同。

（3）有界性：超过一定范围的误差出现的几率趋近于零。

设对某物理量 x 进行了 n 次重复测量，其值为 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n$，各次测量值的误差为 $x_1-x_0, x_2-x_0, x_3-x_0, \cdots\cdots, x_n-x_0$，其中 x_0 为其真值。根据上述随机误差的性质，当测量次数 $n\to\infty$ 时

$$(x_1-x_0)+(x_2-x_0)+(x_3-x_0)+\cdots\cdots(x_n-x_0)=0$$

展开后可得 $$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n=nx_0$$

即 $$x_0=\frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad (03\text{-}1)$$

由于实际测量次数是有限的，物理量的真值仍然不能得到，但由此可得到：

（1）在确定条件下，减小测量结果的随机误差的办法是增加测量次数。

（2）在消除系统误差之后，算术平均值的误差由于测量次数增加而减小，平均值即趋近于真值，因此算术平均值为直接测量的最近真值，即最佳值。实际测量中就以此最佳值作为测量结果，并将它作为对真值 x_0 的估计值。

从上面讨论可知，测量次数的增加对提高平均值的可靠性是有利的，但与系统误差减小无关。所以不是测量次数越多越好，同时测量时间过长还会引起观测上的误差。在物理实验中测 5 到 10 次即可。

2. 随机误差的估算

根据误差的定义，误差是测量值与真值之差。但真值是无法确定的，实际测量中，用测量值与平均值之差称为偏差来表示。误差与偏差的估算公式是有差别的，为简单起见，下面的叙述中都不加区别了。

为了评价测量结果的可靠程度，下面介绍两种随机误差估计方法：

（1）标准误差（方均根误差）和平均误差

当测量列的测量次数无限增多时，各次测量值 x_i 和平均值 $\bar{x}$ 之差的平方和的平均值的平方根，定义为该测量列中某次测量结果的标准误差，以 σ 表示，即

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}$$

当测量次数 n 为有限时，根据误差理论，上式应改写为

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \qquad (03\text{-}2)$$

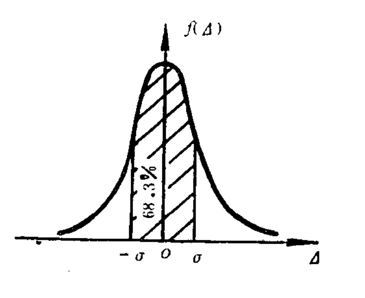

图 03-3

为了说明 σ 的意义，我们在图 03-2 所示曲线中标出 $-\sigma$ 和 σ 的位置，如图 03-3 所示。

由图 03-3 可以看出在 $-\sigma\sim\sigma$ 范围内，分布曲线所包围的面积（图中画有斜线部分）占总面积 68.3%。这就是说，在等精密度重复测量时，如测量次数 n 很大，则所获得的数据中，将有 68.3% 个数据的误差绝对值 $|\Delta x_i|$ 将比 σ 小。因此，我们讲一组重复测量数据的误差为 σ，并不意味着这组测量中每个测量值 x_i 与真值 x_0 之差就等于 σ，也不是指这组数据的误差都在 $-\sigma\sim\sigma$ 这个范围内，而只

是从某一个概率水平（对 σ 为68.3%）上来讲，有多大的把握可以认为误差不会超过这个区间。

σ 为测量列的标准误差，它反映的是一组等精密度重复测量数据的离散性。如 σ 值小，反映测量列中各数据比较集中，我们说测量的精密度较高；如 σ 值较大，则数据较分散，即测量的精密度较低。

设测量列中各测量值的误差为 $\varDelta x=x_1-\bar{x}$，$\varDelta x_2=x_2-\bar{x}$，$\varDelta x_3=x_3-\bar{x}$，……，$\varDelta x_n=x_n-\bar{x}$，则测量列的平均误差（平均绝对误差）$\eta$ 用各测量值的误差的绝对值的算术平均值表示，即

$$\eta=\frac{\sum_{i=1}^{n}|\varDelta x_i|}{n} \tag{03-3}$$

经过数学推导，可得出平均误差 η 与测量列的标准误差 σ 之间的关系为

$$\eta=0.7979\sigma\approx 0.8\sigma \tag{03-4}$$

由式(03-4)看出，平均误差 η 与标准误差 σ 之间有确定的比例关系，因此它也可以用来描述随机误差，且 η 值小也表示数据的离散性小，重复性好，或精密度高。

同样也可以在分布曲线下面划出一个从 $-\eta$ 到 η 的范围，如图03-4所示，经计算得到在 $-\eta$ 到 η 之间的那部分用斜线划出的面积为57.5%。

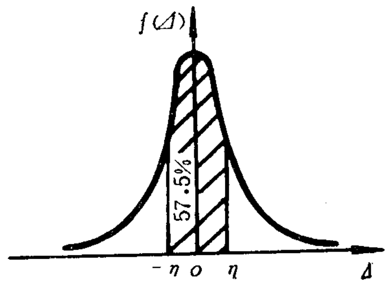

图 03-4

这就是说，在进行等精密度的重复测量时，所获得的 n 个数据中，将有57.5%的误差的绝对值不大于 η，或者说我们有57.5%的把握，可以认为这一测量列中的每个数据，其误差的绝对值不大于 η。

(2) 平均值的误差

当进行一组等精度的重复测量时，获得一组数据 x_i，我们可以用其算术平均值 $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$ 来作为这一组测量值的大小，又可根据相应公式算出这一列数据的标准误差 $\sigma=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2/(n-1)}$ 或平均误差 $\eta=\sum_{i=1}^{n}|(x_i-\bar{x})|/n$ 以表示其离散性。虽然有了平均值 $\bar{x}$ 又算出了误差，但不能用

$$x=\bar{x}\pm\sigma\text{（或 }\eta\text{ 等）}$$

来作为测量结果。因为前面已经说明 η 等只是测量列的误差，它只反映获得算术平均值的那列数据 x_i 的离散性，而不能表示平均值偏离真值的情况。$\bar{x}$ 的离散性是指平均值本身的波动情况，例如当我们通过测量获得一组数据，并得到平均值 $\bar{x}$ 作为测量结果，那么别人，甚至我们自己在完全相同的条件下再重复上述实验时，由于随机误差的影响，不一定能得到完全相同的 $\bar{x}$ 值。n 次测量所获得的平均值之间的差异就表示 $\bar{x}$ 本身具有离散性。

与测量列的标准误差 σ 和平均误差 η 的统计含义那样，引出平均值 $\bar{x}$ 的标准误差 $\sigma_{\bar{x}}$ 和平均值的平均误差 $\eta_{\bar{x}}$ 来描述平均值的离散性。经理论推导得到

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{03-5}$$

$$\eta_{\bar{x}}=\frac{\eta}{\sqrt{n}} \tag{03-6}$$

平均值的标准误差与测量列的标准误差只差一个因子 $1/\sqrt{n}$，平均值的平均误差与测量列的平均误差也只差一个因子 $1/\sqrt{n}$，但两者随测量次数 n 变化的规律有较大的差别。

根据上面的讨论我们可用平均值的标准误差将测量结果写成为

$$x=\bar{x}\pm\sigma_{\bar{x}} \tag{03-7}$$

根据对标准误差统计意义的认识，(03-7) 式的意义可理解为测量值 x 有 68.3% 的几率落在 $\bar{x}-\sigma_{\bar{x}}\sim\bar{x}+\sigma_{\bar{x}}$ 的范围内。

同样，如果用平均误差，测量结果可写成

$$x=\bar{x}\pm\eta_{\bar{x}} \tag{03-8}$$

由于 $\sigma_{\bar{x}}<\sigma$，$\eta_{\bar{x}}<\eta$，通常粗略地把 σ 看成 $\sigma_{\bar{x}}$ 的误差限，把 η 看成 $\eta_{\bar{x}}$ 的误差限。把实验结果写成

$$x=\bar{x}\pm\sigma \quad (\text{单位})$$

$$x=\bar{x}\pm\eta \quad (\text{单位})$$

世界上许多国家的科学论文中都用标准误差来评价数据的。有些计算器也有计算标准差的功能，能较快地算出 σ 值。希望在物理实验中使用标准误差，当然也可用平均误差。

例 03-1：对某长度 10 次测量值如下，试求测量结果。

63.57cm，63.58cm，63.55cm，63.56cm，63.56cm，63.59cm，63.55cm，63.54cm，63.57cm，63.57cm。

解：为清楚起见列表计算，见表 03-1。

表 03-1

测量次数 n	x_i(cm)	Δx_i($\times10^{-3}$cm)	Δx_i^2($\times10^{-6}$cm^2)
1	63.570	+6	36
2	63.580	−16	256
3	63.550	−14	196
4	63.560	−4	16
5	63.560	−4	16
6	63.590	+26	676
7	63.550	−14	196
8	63.540	−24	574
9	63.570	+6	36
10	63.570	+6	36
$\bar{x}=63.564$ cm		$\Sigma\Delta x_i^2=2040\times10^{-6}$(cm^2)	

∴有

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma\Delta x_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{2040\times10^{-6}}{10-1}}=0.015(\text{cm})$$

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{\Sigma\Delta x_i^2}{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{2040\times10^{-6}}{10\times9}}=0.0047(\text{cm})$$

得结果 $x=\bar{x}\pm\sigma_{\bar{x}}=63.564\pm0.005(\text{cm})$

如用算术平均误差，请读者求出结果。

3． 单次测量的误差估计

有些实验，由于在动态中测量，不允许作重复测量，或者实验要求精密度不高，只需要对被测量作单次测量。对单次测量的误差要进行具体的合理的估计，不能一概而论。一般情况下，可按仪器出厂说明书或仪器铭牌上注明的仪器误差作为单次测量误差。如某液体温度计，说明书中给出仪器误差为 0.2℃，如测得一温度为 17.1℃，则测量结果写成 $t=17.1\pm0.2$(℃)；对于有游标的量具和非连续读数的仪表（电子秒表、数字显示仪表），取其分度值为单次测量误差；对于连续读数的仪表取其分度值一半作为单次测量误差。如用千分尺某次测一物体长度为 3.674 毫米，则一次测量结果写成 $l=3.674\pm0.005$(毫米)。

4． 重复测量测得值相同时的误差估计

重复测量几次，测得值相同，并不是误差为零，而是偶然误差较小或仪器精度不足以反映其微小差异。这时如果不考虑仪器的系统误差，可估计其标准误差为仪器最小分度值的一半。

5． 绝对误差和相对误差

前面讨论的各测量值的平均误差 $\eta_{\bar{x}}$ 和标准误差 $\sigma_{\bar{x}}$ 反映出测量值偏离真值的大小，称为绝对误差，它可以表示一个测量结果的可靠程度。但在比较不同测量结果可靠性时，还应当用绝对误差和测量值之比去评价，此比值称为相对误差，相对误差通常用百分数表示之。

例如测量两物体的质量：$m_1=(1.00\pm0.01)$ 克，$m_2=(100.00\pm0.01)$ 克，两者绝对误差相同，但相对误差为： $E_1=1\%$， $E_2=0.01\%$

显然后者的可靠性更大。

误差是一种不十分准确的估算值，所以不论绝对误差还是相对误差，一般可取一位数字，对于下一位数字一律只进不舍。

四、间接测量结果误差的估算

大多数物理实验中的测量，是将某些直接测量值按照一定函数关系最终将待测量计算出来，这就是所谓间接测量。

计算间接测量结果时，是将各直接测量值的最佳值（算术平均值）代入函数式计算出来的。由于直接测量值的最佳值都有一定的误差，因此计算得出的间接测量值必然存在误差，间接测量值的误差与直接测量值误差的关系称为误差的传递，而表示间接测量值误差与各直接测量值误差之间的关系式，称为误差的传递公式。

1． 间接测量值的误差公式之一

为了简便起见，讨论只有二个直接测量值的情况。设 A 和 B 为二直接测量值的算术平均值，ΔA 和 ΔB 为其偶然误差，将 A、B 代入测量公式求出间接测量值为 N，由 ΔA 和 ΔB 引起 N 的误差为 ΔN。

(1) 加法

$$N=A+B$$

考虑误差后，可写成

$$\begin{aligned}N\pm\Delta N&=(A\pm\Delta A)+(B\pm\Delta B)\\&=(A+B)\pm\Delta A\pm\Delta B\end{aligned}$$

后两项是不确定项，它们有四种可能的组合，在这里我们考虑最坏情况，即最大误差 $+\Delta A+\Delta B$ 和 $-\Delta A-\Delta B$，所以有

$$N \pm \Delta N=(A+B) \pm (\Delta A+\Delta B)$$

即
$$\Delta N=\Delta A+\Delta B$$

相对误差
$$E_r=\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta A+\Delta B}{A+B}$$

（2）减法

$$N=A-B$$

同样考虑最大误差的情况

$$\begin{aligned} N \pm \Delta N &= (A \pm \Delta A)-(B \pm \Delta B) \\ &= (A-B) \pm (\Delta A+\Delta B) \end{aligned}$$

故
$$\Delta N=\Delta A+\Delta B$$

相对误差
$$E_r=\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta A+\Delta B}{A-B}$$

由上讨论可知，n 个直接测量值相加、相减时，结果的绝对误差等于各直接测量值绝对误差之和。

（3）乘法

$$N=A \cdot B$$

$$\begin{aligned} N \pm \Delta N &= (A \pm \Delta A)(B \pm \Delta B) \\ &= AB \pm A\Delta B \pm B\Delta A \pm \Delta A\Delta B \end{aligned}$$

由于 ΔA、ΔB 和 A、B 相比可视为微小量，最后一项 $\Delta A \cdot \Delta B$ 为二阶微小量，可以忽略不计，考虑到最大可能误差，因此

$$\begin{aligned} N \pm \Delta N &\approx AB \pm A\Delta B \pm B\Delta A \\ &= AB \pm (A\Delta B \pm B\Delta A) \end{aligned}$$

故
$$\Delta N=A\Delta B+B\Delta A$$

相对误差
$$E_r=\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}$$

（4）除法

$$N=\frac{A}{B}$$

$$\begin{aligned} N \pm \Delta N &= \frac{A \pm \Delta A}{B \pm \Delta B}=\frac{(A \pm \Delta A)(B \mp \Delta B)}{B^2-\Delta B^2} \\ &\approx \frac{A}{B} \pm \frac{B\Delta A+A\Delta B}{B^2} \end{aligned}$$

故
$$\Delta N=\frac{B\Delta A+A\Delta B}{B^2}$$

相对误差
$$E_r=\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}$$

由以上讨论可知，n 个因子相乘、相除结果的相对误差等于各因子的相对误差之和。

（5）对于任意函数

$$N=F(A,B,C,\cdots)$$

考虑到误差之后，则有

$$N \pm \Delta N=F(A \pm \Delta A,B \pm \Delta B,C \pm \Delta C,\cdots)$$

按泰勒公式展开并略去二阶小量及以后各项可得

$$N \pm \varDelta N = F(A,B,C,\cdots) \pm \left(\frac{\partial F}{\partial A}\varDelta A + \frac{\partial F}{\partial B}\varDelta B + \frac{\partial F}{\partial C}\varDelta C + \cdots\right)$$

故绝对误差为 $$\varDelta N = \left|\frac{\partial F}{\partial A}\right|\varDelta A + \left|\frac{\partial F}{\partial B}\right|\varDelta B + \left|\frac{\partial F}{\partial C}\right|\varDelta C + \cdots \qquad (03\text{-}9)$$

式中 $\varDelta N$ 称为总误差，而 $\left|\frac{\partial F}{\partial A}\right|\varDelta A, \left|\frac{\partial F}{\partial B}\right|\varDelta B, \left|\frac{\partial F}{\partial C}\right|\varDelta C, \cdots$ 称为分误差，各项系数 $\frac{\partial F}{\partial A}$，$\frac{\partial F}{\partial B}$，$\frac{\partial F}{\partial C}$，……称为误差传递系数。

相对误差 $$\frac{\varDelta N}{N} = \left|\frac{\partial F}{\partial A}\right|\frac{\varDelta A}{F} + \left|\frac{\partial F}{\partial B}\right|\frac{\varDelta B}{F} + \left|\frac{\partial F}{\partial C}\right|\frac{\varDelta C}{F} + \cdots \qquad (03\text{-}10)$$

以上讨论了间接测量误差与直接测量误差之间的传递关系。各直接测量值误差的符号实际上不完全相同，它们传递给间接测量值时有可能相互抵消一部分，然而我们无法判断各误差的实际符号，而从最不利的情况考虑，将各项误差或相对误差直接相加（取绝对值），这样估计的误差是间接测量值的最大误差。

为了方便，现将常用的运算公式的最大绝对误差、最大相对误差计算公式列表如下，见表 03-2。

表 03-2

运算关系式 $N=F(A,B,C\cdots)$	最大绝对误差 $\varDelta N$	最大相对误差 $E_r=\varDelta N/\bar{N}$
$N=A+B+C+\cdots$	$\varDelta A+\varDelta B+\varDelta C+\cdots$	$(\varDelta A+\varDelta B+\varDelta C+\cdots)/(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\cdots)$
$N=A-B-C-\cdots$	$\varDelta A+\varDelta B+\varDelta C+\cdots$	$(\varDelta A+\varDelta B+\varDelta C+\cdots)/(\bar{A}-\bar{B}-\bar{C}-\cdots)$
$N=A\cdot B\cdot C$	$\bar{B}\bar{C}\varDelta A+\bar{A}\bar{C}\varDelta B+\bar{A}\bar{B}\varDelta C$	$\varDelta A/\bar{A}+\varDelta B/\bar{B}+\varDelta C/\bar{C}$
$N=A^n$	$n\bar{A}^{n-1}\cdot\varDelta A$	$n\cdot\varDelta A/\bar{A}$
$N=\sqrt[n]{A}$	$\frac{1}{n}\bar{A}^{\frac{1}{n}-1}\cdot\varDelta A$	$\frac{1}{n}\cdot\frac{\varDelta A}{\bar{A}}$
$N=A/B$	$(\bar{B}\cdot\varDelta A+\bar{A}\cdot\varDelta B)/\bar{B}^2$	$\varDelta A/\bar{A}+\varDelta B/\bar{B}$
$N=\sin A$	$(\cos\bar{A})\cdot\varDelta A$	$(\mathrm{ctg}\bar{A})\cdot\varDelta A$
$N=\cos A$	$(\sin\bar{A})\cdot\varDelta A$	$(\mathrm{tg}\bar{A})\cdot\varDelta A$
$N=\mathrm{tg}A$	$\varDelta A/\cos^2\bar{A}$	$2\cdot\varDelta A/\sin 2\bar{A}$
$N=\mathrm{ctg}A$	$\varDelta A/\sin^2\bar{A}$	$2\cdot\varDelta A/\sin 2\bar{A}$

由表 03-2 可见，在计算间接测量误差时，为计算简便，除了直接测量值是相加、相减的情况外，一般先求相对误差，然后将求得的相对误差与间接测量值相乘，即可求出绝对误差。

下面举出几个测量公式的误差公式

例 03-2：$E=\frac{wl^3}{4a^3b\lambda}$的误差公式为

$$\frac{\varDelta E}{E} = \frac{\varDelta w}{w} + 3\cdot\frac{\varDelta l}{l} + 3\cdot\frac{\varDelta a}{a} + \frac{\varDelta b}{b} + \frac{\varDelta \lambda}{\lambda}$$

例 03-3：$V=\frac{1}{4}\pi(d_2^2-d_1^2)\cdot l$ 的误差公式为

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta(d_2^2-d_1^2)}{d_2^2-d_1^2}+\frac{\Delta l}{l}=\frac{\Delta(d_2^2)+\Delta(d_1^2)}{d_2^2-d_1^2}+\frac{\Delta l}{l}$$

$$=\frac{2d_2\Delta d_2+2d_1\Delta d_1}{d_2^2-d_1^2}+\frac{\Delta l}{l}$$

例 03-4：对于具有积商形式的函数式，则可对等式两边先取自然对数，再求全微分，而后用误差号代替微分号得出相对误差公式为

$$\frac{\Delta N}{N}=\left|\frac{\partial \ln F}{\partial A}\cdot\Delta A\right|+\left|\frac{\partial \ln F}{\partial B}\cdot\Delta B\right|+\cdots$$

例如 $N=x^a\cdot y^b\cdot z^c$ 则其误差公式可由上式求得

$$\frac{\Delta N}{N}=a\cdot\frac{\Delta x}{x}+b\cdot\frac{\Delta y}{y}+c\cdot\frac{\Delta z}{z}$$

2．间接测量值的误差公式之二

当各直接测量值的随机误差是以标准误差表示时，它们将以方和根合成方式传递给间接测量结果的误差。即

$$\sigma_N=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)^2\sigma_A^2+\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)^2\sigma_B^2+\left(\frac{\partial F}{\partial C}\right)^2\sigma_C^2+\cdots} \tag{03-11}$$

$$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)^2\cdot\left(\frac{\sigma_A}{F}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)^2\left(\frac{\sigma_B}{F}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial C}\right)^2\left(\frac{\sigma_C}{F}\right)^2+\cdots} \tag{03-12}$$

以上两式中，σ_A，σ_B，σ_C 等为直接测量值 A、B，C，……的标准误差，σ_N 为间接测量值的标准误差。

把(03-9)式与(03-11)式相比较，可知用前式计算随机误差较为简便，缺点是总合误差偏大。按(03-11)，(03-12)式求间接测量值的标准误差时，各直接测量值的误差均应为标准误差。然而在实验中，不是对所有直接测量值都进行多次测量，有的量可能只作单次测量并估计其误差，一般说单次测量估计的误差比标准偏差大些，因此将单次测量估计的某项误差代入上式计算，所得间接误差偏大。

常见函数的随机误差传递公式（标准误差的方和根合成），列表如下，见 03-3 表。

表 03-3

函数关系式 $N=F(A,B,C,\cdots)$	均方误差传递（合成）公式
$N=A+B$	$\sigma_N=\sqrt{\sigma_A^2+\sigma_B^2}$
$N=A-B$	$\sigma_N=\sqrt{\sigma_A^2+\sigma_B^2}$
$N=A\cdot B$	$\sigma_N/\overline{N}=\sqrt{(\sigma_A/\overline{A})^2+(\sigma_B/\overline{B})^2}$
$N=A/B$	$\sigma_N/\overline{N}=\sqrt{(\sigma_A/\overline{A})^2+(\sigma_B/\overline{B})^2}$
$N=A^K B^m/C^n$	$\sigma_N/\overline{N}=\sqrt{K^2(\sigma_A/\overline{A})^2+m^2(\sigma_B/\overline{B})^2+n^2(\sigma_C/\overline{C})^2}$
$N=KA$	$\sigma_N=K\sigma_A$，$\sigma_N/\overline{N}=\sigma_A/\overline{A}$
$N=K\sqrt{A}$	$\sigma_N/\overline{N}=1/2(\sigma_A/\overline{A})$
$N=\sin A$	$\sigma_N=\lvert\cos\overline{A}\rvert\sigma_A$
$N=\ln A$	$\sigma_N=\sigma_A/\overline{A}$