高等院校文科试用教材

数理统计学

李茂年　周兆麟　主编

天津人民出版社

高等院校文科试用教材

数理统计学

李茂年
周兆麟 主编

天津人民出版社

数理统计学

李茂年
周兆麟 主编

*

天津人民出版社出版

（天津市赤峰道124号）

天津新华印刷一厂印刷　天津市新华书店发行

*

850×1168毫米　32开本　17.5印张　插页1　插表1　361千字

1983年6月第1版　1983年6月第1次印刷

印数：1－28,400

统一书号：4072·58

定　价：2.18元

说　明

《数理统计学》是国家统计局委托我们编写的，经国家统计局审定，作为高等院校财经专业教材．

本书由湖北财经学院李茂年、周兆麟主编，厦门大学俞大刚主审．上海财经学院郑德如、四川财经学院吴梅村、天津财经学院陈克式、陕西财经学院彭逢瑞、陕西机械学院黄玉喜、北京经济学院朱永泽、西南交通大学沈德嗣参加了本书的编写．

在本书的编写过程中，得到了许多单位的支持和帮助，北京大学陈良焜、湖南财经学院宋元村、吉林财贸学院崔专一、杭州商学院钱尚玮、山西财经学院龚宝和等参加了初稿的讨论，对书稿提出了许多宝贵的意见，在此表示衷心的感谢．

由于我们的水平所限，缺点错误一定不少，热忱地希望读者批评指正．

编　者　1982年8月

目　录

说明

第一章　概率的基本概念 …………………………………… (2)

§1-1　什么是概率 …………………………………… (2)
§1-2　概率的计算定则 …………………………………… (8)
§1-3　概率的加法定理 …………………………………… (11)
§1-4　概率的乘法定理 …………………………………… (14)
§1-5　全概率公式与贝叶斯 (Bayes) 公式 ……………… (20)

第二章　随机变量及概率分布 ……………………………… (28)

§2-1　离散分布与连续分布 ……………………………… (28)
§2-2　经验分布和理论分布 ……………………………… (35)
§2-3　基本随机变量的分布(一)：常用的离散分布 ………… (38)
§2-4　基本随机变量的分布(二)：常用的连续分布 ………… (58)

第三章　概率分布的特征数……………………………… (102)

§3-1　期望值和方差的性质……………………………… (102)
§3-2　矩……………………………………………… (107)
§3-3　矩母函数……………………………………… (112)

第四章　极限定理 ………………………………………… (124)

§4-1　概述…………………………………………… (124)

§4-2 大数定律……………………………………………………… (125)
§4-3 李雅普诺夫(Ляпунов)中心极限定理……………… (130)

第五章 统计推断的一般原理 ……………………………… (135)

§5-1 统计估计的种类……………………………………………… (135)
§5-2 点估计………………………………………………………… (135)
§5-3 最大似然估计………………………………………………… (139)
§5-4 区间估计……………………………………………………… (143)
§5-5 统计假设的种类和统计检验的方法……………………… (145)
§5-6 在假设检验中可能造成的两类错误……………………… (150)
§5-7 统计检验的势………………………………………………… (153)

第六章 抽样分布(一)：渐近分布 ……………………… (157)

§6-1 随机抽样……………………………………………………… (157)
§6-2 正态总体中样本平均数的分布…………………………… (158)
§6-3 非正态总体中样本平均数的分布………………………… (162)
§6-4 两个平均数之差的分布…………………………………… (165)
§6-5 两个比率之差的分布……………………………………… (168)
§6-6 方差和均方差的分布……………………………………… (170)

第七章 抽样分布(二)：精确分布 ……………………… (174)

§7-1 在次数函数中的变量变换………………………………… (174)
§7-2 克方分布（X^2分布）…………………………………… (178)
§7-3 t分布 ……………………………………………………… (191)
§7-4 F分布……………………………………………………… (202)
§7-5 极差分布……………………………………………………… (208)

第八章　抽样的设计与分析 …………………………………… (215)

§8-1　简单回置式抽样（简单重复抽样） ………………………… (215)
§8-2　简单不回置式抽样（不重复抽样） ………………………… (221)
§8-3　分层抽样 ………………………………………………… (226)
§8-4　等距抽样（机械抽样） …………………………………… (230)
§8-5　两阶段抽样（两步抽样） ………………………………… (232)
§8-6　属性抽样 ………………………………………………… (246)

第九章　产品质量的抽样控制 ………………………………… (251)

§9-1　计量控制 ………………………………………………… (252)
§9-2　计件控制 ………………………………………………… (265)
§9-3　计点控制 ………………………………………………… (268)

第十章　产品质量的抽样检验 ………………………………… (274)

§10-1　单式抽样检验 …………………………………………… (274)
§10-2　复式抽样检验 …………………………………………… (297)
§10-3　序列抽样检验 …………………………………………… (309)

第十一章　方差分析 …………………………………………… (322)

§11-1　单因素试验的方差分析 …………………………………… (323)
§11-2　单因素不等重复试验的方差分析 ………………………… (333)
§11-3　双因素试验的方差分析 …………………………………… (341)
§11-4　双因素试验有交错作用的方差分析 ……………………… (348)
§11-5　系统分组的方差分析 ……………………………………… (360)

第十二章　回归分析与相关分析 ……………………………… (373)

§12-1　回归分析与相关分析的意义 ……………………………… (373)

§12-2　样本回归直线…………………………………………………… (375)
§12-3　相关系数………………………………………………………… (396)
§12-4　化曲线为直线的回归问题……………………………………… (405)
§12-5　多元线性回归分析………………………………………………… (416)

第十三章　正交试验设计……………………………………………… (429)

§13-1　正交试验的基本方法与原理…………………………………… (429)
§13-2　多指标与水平数不等的试验…………………………………… (438)
§13-3　有交互作用的试验……………………………………………… (440)

第十四章　非参数方法………………………………………………… (454)

§14-1　X^2检验 ……………………………………………………… (454)
§14-2　柯尔莫哥洛夫—斯米尔诺夫检验……………………………… (459)
§14-3　等级相关…………………………………………………………… (463)

附录一

1　最佳检验…………………………………………………………… (483)
2　似然比率检验……………………………………………………… (489)
3　对拟合适度的似然比率检验……………………………………… (494)
4　极差（全距）分布的期望值和方差的计算公式………… (496)

附录二　附表、附图

附表 1　普阿松分布 $\sum_{x=0}^{c} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ 值表 ……………………… (502)
附表 2　正态概率积分表…………………………………………… (505)
附表 3　负指数函数表……………………………………………… (508)
附表 4　X^2分布表 ………………………………………………… (511)
附表 5　t分布表 …………………………………………………… (512)

附表6　F分布表（$\alpha=0.05$）……………………………………（515）

附表7　F分布表（$\alpha=0.01$）……………………………………（518）

附表8　柯尔莫哥洛夫—斯米尔诺夫拟合适度临界值表……（519）

附表9　随机数表……………………………………………………（520）

附表10　正交表举例………………………………………………（524）

参考书目 ……………………………………………………………（532）

附图(一)　决定合格判断数C的图（$\beta=0.10$）…………………（533）

附图(二)　决定样本大小n的曲线（$\beta=0.10$）…………………（534）

附图(三)　决定最少平均检验个数$\bar{I}_{min}$的曲线（$\beta=0.10$）……（535）

附图(四)　决定C值的图…………………………………………（536）

附图(五)　决定C_1和C_2的图（$\beta=0.10$）………………………（537）

附图(六)　决定n_1和n_2的图（$\beta=0.10$）………………………（538）

附图(七)　威布尔概率纸 …………………………………………（插页）

附图(八)　正态概率纸……………………………………………（539）

习题答案 ……………………………………………………………（540）

客观世界中存在着各种现象，其中一类现象，在相同条件下进行的试验或观察（为叙述方便，统称为试验）中，其可能结果不止一个，事前无法确定．例如，在相同条件下抛一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是背面朝上，每次抛掷之前无法肯定其结果是什么；某厂生产的某种灯泡的寿命值是不尽相同的，每次抽检前也不能预先确切知道：这类现象称为**随机现象**．随机现象的各种结果总是可以数量来表现的，即是一种变量，这种变量尽管有偶然性的一面，但也有规律性的一面，通过大量的观察或试验，可以揭示出这种现象的规律性．具有这样的变化规律的变量称之为**随机变量**．数理统计学就是以随机变量为研究对象的．

我们把对某一问题的研究对象的全体称为**总体**（又称**母体**）．构成总体的每个基本单元称为**个体**．由于所研究的总体中包含众多的甚至是无穷多的个体，各个体又具有量的变异，故在实际工作中，往往从该总体中抽取一部分个体作为**样本**（或称**子样**）来观察和研究，然后据此对总体的客观规律性作出各种推断．数理统计学是以样本为依据，运用数学模型①来

① 这里，所谓数学模型是指从随机变量的研究中所导出的随机现象的近似数学表达式．

对总体作各种推断的.

数理统计学的内容很丰富，其具体方法也很多，应用相当广泛，已成为从事科学研究和经济管理等工作必不可少的工具.本书将介绍数理统计学的一些主要理论和方法，这里从概率的基本概念谈起.

第一章 概率的基本概念

§1-1 什么是概率

一、基本事件和样本空间

我们从某一研究任务出发，对随机现象进行的观察和试验称为**随机试验**.在一定条件下,随机试验中可能出现或可能不出现的事情称为**随机事件**，简称为**事件**，常用大写拉丁字母A、B、C等表示.

在一定条件下必然发生的事件，称为**必然事件**，记作U；在一定条件下必然不发生的事件，称为**不可能事件**，记作V.

就某项研究任务而言，我们把随机试验的每一可能结果称为**基本事件**，记为ω.基本事件的全体称为**基本事件组**.因此，基本事件组作为一个事件，是必然事件．仍记以U．从几何意义看，随机试验的每一个可能结果叫做**样本点**，样本点的全体称为**样本空间**，故样本空间与基本事件组的关系是对应关系，记为$U=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\ \omega_n\}$,下面举些例子.

例1 检查3件产品的质量，观察其次品出现的次数.这里基本事件组是由4个基本事件所所构成，即没有次品，1件次品，2件次品，3件次品.以ω_i表示出现i件次品，样本空间为
$U=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}=\{0, 1, 2, 3\}$.

例2 计算某电话交换台在1小时内接到呼唤的次数.这里共有可数个基本事件，即基本事件组是由0次呼唤、1次呼唤、2次呼唤、…所构成.用ω_i表示接到i次呼唤，$i=0, 1, 2, \cdots$，样本空间为$U=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\cdots\}=\{0, 1, 2, \cdots\}$.

例3 测量某物体的长度.其基本事件组是由物体可能长度的上限a及下限b之间任何值构成的区间来表示的.用ω_i表示第i次测量的结果，样本空间为$U=\{\omega_i; a\leqslant\omega_i\leqslant b\}$.

基本事件是随机事件中最简单的一种，又叫做**简单事件**.一般的随机事件总是由若干基本事件共同构成的，又叫做**复合事件**.比如例1中，令A表示事件“出现奇数件次品”，该事件则由两个基本事件即“出现1件次品”和“出现3件次品”共同构成，故$A=(\omega_1,\omega_3)$；同样，令B表示事件“出现不超过2件次品”，该事件则由3个基本事件即“没有出现次品”、“出现1件次品”和“出现2件次品”共同构成，故$B=(\omega_0,\omega_1,\omega_2)$。

二、随机事件的运算

如果事件A出现必然导致事件B出现，则称事件B**包含**事件A，记作$B\supset A$或$A\subset B$.例如，“接到2次呼唤”属于“接到偶数次呼唤”，故前者被后者所包含.为了方便起见，规定对于任一事件A有$V\subset A$，显然，也有$A\supset U$.

如果$A\subset B$且$B\subset C$，那么$A\subset C$.如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称事件A与B**相等**（或等价），记作 $A=B$.

事件A与B至少有一个出现，称为事件A与B的**和事件**，也叫做事件之**并**，记作$A\cup B$或$A+B$. 例如，电话总机“接到不多于1次呼唤”便是“接到1次呼唤”与“没有接到呼唤”两事件的和事件.

事件A与B同时出现，称为事件A与B的**积事件**，也叫做事件之**交**，记作$A\cap B$，或AB. 例如，电话总机“接到6次呼唤”便是“接到不多于6次呼唤”与“接到至少6次呼唤”两事件的积事件.

对于多于两个事件的情形，也可以类似地规定它们的和事件与积事件.

如果A与B的积事件为不可能事件，即$AB=V$，那么称A与B两事件**互斥**，或**互不相容**. 如果n个事件A_1，A_2，……，A_n中任意两个都互斥，那么称这n个事件两两互斥，可记作$A_i\cap A_j=V$（$i\neq j$），或$A_iB_j=V$（$i\neq j$）.

如果两个事件A与B满足$A\cup B=U$，$AB=V$，那么称A与B**互逆**或**对立**，并称A是B的逆事件（或对立事件），或B是A的逆事件. 事件A的逆事件记作$\overline{A}$. 例如，电话总机“接到大于10次呼唤”与“接到不大于10次呼唤”是互逆事件.

从事件A中减去事件B后的**差事件**是指A出现而B不出现的事件，记作$A-B$. 例如，电话总机“接到6次呼唤”便是从“接到不小于6次呼唤”这一事件中减去“接到不小于7次呼唤”事件后的差事件.

显然，事件A的逆事件$\overline{A}$就是从必然事件U中减去事件A后的差事件，即

$$\overline{A}=U-A \qquad (1\cdot1)$$

随机事件之间的关系及运算可以用图1-1表示.

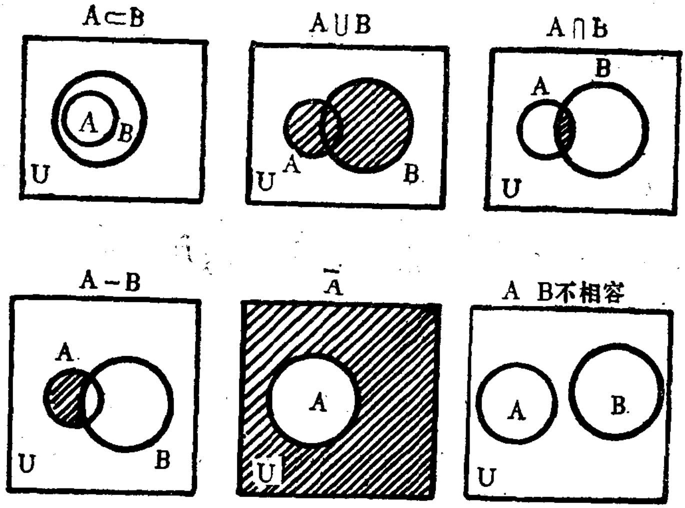

图 1-1

三、统计概率

随机事件在一定条件下可能出现也可能不出现，这只是其偶然性的一面，随机事件还有规律性的一面，它可以通过多次重复试验观察到.

当观察某一随机事件时，设进行了n次试验，其中事件A出现了m次，则比值$\frac{m}{n}$称为n次试验中事件A出现的**频率**，记作$W(A)$，即

$$W(A)=\frac{m}{n} \tag{1.2}$$

显然，任何随机事件的频率是介于0与1之间的一个数.

例1 某工厂生产的某种产品一般是合格品，但偶尔也可能是次品，故“生产的产品为合格品”是一随机事件.为了知道

这个随机事件出现的结果，可分别抽出若干件产品观察其合格品数，并记录如表1-1.

表1-1

生产件数 n	5	10	60	150	600	900	1200	1800
合格品数 m	5	7	53	131	548	820	1091	1631
频率 $\frac{m}{n}$	1	0.7	0.883	0.873	0.913	0.911	0.909	0.906

例2 为了知道棉花种子发芽的情况，从一大批棉花种子中抽取若干批种子，分别做发芽试验.将各批种子发芽的情况记录如表1-2.

表1-2

试验种子数n	2	5	10	100	200	500	1,000	1,000,000
发芽种子数m	1	2	6	49	103	262	517	510,300
频率$\frac{m}{n}$	0.5	0.4	0.6	0.49	0.515	0.524	0.517	0.5103

从上面的两个试验记录中可以看到，在大量试验中，频率经常稳定在一个固定的数值附近.从例 1 看，频率稳定在0.9；从例 2 看，频率稳定在0.51.而且随着试验次数的增大，这种稳定在一个数值附近的趋势越来越显著.这是一个非常重要的事实，即频率所具有的稳定性.它揭示出了随机现象中的规律性，即通常所说的统计规律性.

频率的稳定性揭示出一个随机事件出现的可能性有一定的大小.频率稳定在较大数值时，表明随机事件出现的可能性大；

频率稳定在较小数值时，表明随机事件出现的可能性小．而频率所稳定的这个常数就是随机事件出现可能性大小的一个客观的量度，这个常数就称为随机事件的**概率**．这种概率叫做**统计概率**或叫做**后验概率**．其定义如下：

设进行了 n 次试验，其中事件A出现了m次，如果随着试验次数 n 的增大，事件A出现的频率$\frac{m}{n}$稳定在某个常数p，则称事件A的概率为

$$P(A)=p$$

比如，例 1 中用A表示事件“生产的产品是合格品”，则该事件的概率$P(A)=0.9$；例 2 中用B表示事件“棉花种子能发芽”，则该事件的概率$P(B)=0.51$．

在一些实际问题中，当概率不易求出时，可把频率作为概率的近似值．

四、概率的公理

前述概率的定义，其依据主要是试验次数很多时，频率呈现稳定性这一事实．然而，究竟试验次数应该多到怎样的程度，以及所谓稳定性又应如何理解，都没有确切说明．为了克服这些缺点，且使以后有关推理有所依据，按照频率的规律性可概括出如下概率的公理①：

公理1　对于任一随机事件A，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1 \tag{1·3}$$

公理2

$$P(U)=1,\ P(V)=0 \tag{1·4}$$

---

① 参阅费史：《概率论与数理统计》第11—13页．

公理3 对于两两互斥的事件A_1，A_2，……，有

$$P(A_1+A_2+\cdots\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots \quad (1\cdot5)$$

据此，我们有下述概率的公理化定义：

如果函数$P(A)$的定义域为基本事件组所有随机事件组成的集合，即A为样本空间的任一事件（子集），若$P(A)$满足上述条件（1·3）、（1·4）、（1·5），则称函数$P(A)$为事件A的（**概率**）.

§1-2 概率的计算定则

通过重复试验观察事件的频率，不仅能了解概率概念的实际含义，同时也可作为求概率近似值的一个具体方法．然而，在特殊类型的问题中，根据具体分析，就可直接得到事件的概率.现在来讨论一类特殊的随机试验，它的特征是：

1.试验结果的个数即基本事件的全体是有限的。

$$U=(\omega_1,\omega_2,\cdots\cdots,\omega_n)$$

2.每一个基本事件出现的可能性相等．这时，就称所讨论的问题是**等可能型**的。

例如，抛掷一枚五分硬币，只可能出现两个结果："正面向上"和"背面向上"，即共有两个基本事件．如果硬币是匀称的，则这两个基本事件出现的可能性是相等的.如果进行很多次试验，必然大约有一半结果出现"正面向上"，因而"正面向上"这一事件的频率稳定在0.5附近，故它的概率为0.5。这样，通过对问题进行具体分析，我们得到了与重复试验相同的结论.

在等可能型的问题中，我们有下面概率的计算定则：