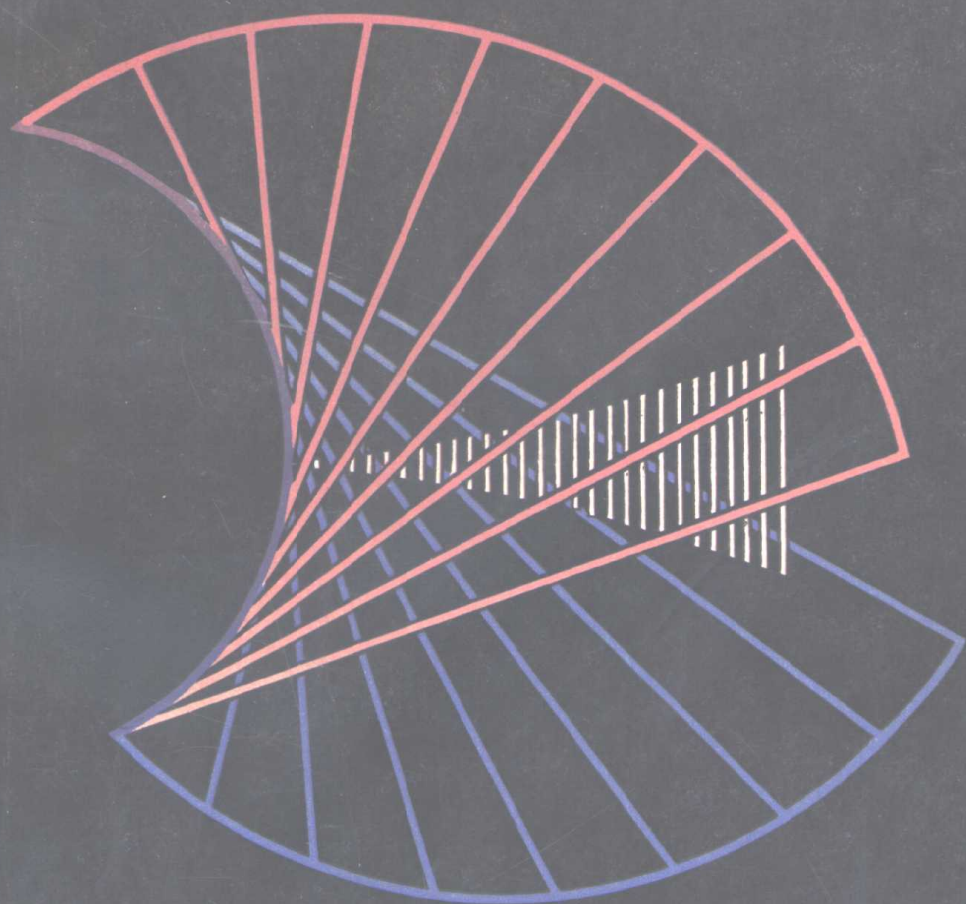


空间啮合原理

及 SG—71 型蜗轮副



沈蕴方 容尔谦 李寅年 冯德坤 编著 冶金工业出版社

78.249

8602623

空间啮合原理 及 SG-71 型蜗轮副

沈蕴方 容尔谦 编著
李寅年 冯德坤

冶金工业出版社

内 容 简 介

本书用包络方法系统地研究一般空间啮合理论,并应用该理论研究SG-71型蜗轮副(平面二次包络弧面蜗杆传动)的啮合原理、啮合性能,在此基础上提出设计方法和参数选择。此外,还编有一组设计中常用的电子计算机程序。

本书供啮合理论的研究工作者,机械设计和制造工艺人员使用 and 参考。可作为有关大专院校研究生教材以及机械类高年级学生的参考书。

空间啮合原理及SG-71型蜗轮副

沈蕴方 容尔谦 编著
李寅年 冯德坤

*

冶金工业出版社出版

(北京灯市口74号)

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

850×1168 1/32 印张 11 5/8 字数 307 千字

1983年3月第一版 1983年3月第一次印刷

印数00,001~3,200册

统一书号: 15062·3935 定价1.50元

前 言

空间啮合原理主要研究两个互相包络的曲面间接触传动的关系。从广义来说,包括一切互为包络的共轭曲面,例如机加工的展成法中刀具和工件之间、成型轧制中孔型和轧件之间的关系等。但更多和更直接的是用于齿轮啮合传动。因此,空间啮合理论是与生产实践有紧密联系的一门技术科学。

研究空间啮合理论的方法很多,包络法是其中的一种,但是用这种方法系统地来研究啮合传动尚不多,本书在这方面做了一些探讨,在计算中引入和定义了算符和相似微分算符,简化了计算,有助于得到一个比较方便的研究啮合原理的方法。

本书的重点是一般空间啮合原理和SG-71型蜗轮副的理论研究。全书共分三篇,第一篇为数学基础;第二篇是空间啮合原理;第三篇是啮合原理的应用,研究了SG-71型蜗轮副的啮合原理和设计。

蜗杆传动是机械设备中常用的一种机械传动。它的主要优点是传动比大、结构紧凑、工作平稳和噪音小。但是也有发热大、效率低、齿面易磨损和产生胶合等缺点。因此,国内外科技工作者都在研究如何扬长避短、克服缺点。

一九六四年,首都钢铁公司机械厂与一机部原机械科学院齿轮研究室(现郑州机械科学研究所齿轮研究室)合作,制造出中心距为540毫米的“直齿平面包络弧面蜗杆传动装置”,成功地应用于30吨转炉的倾动机构中。

一九七一年,首钢机械厂进一步研制成功“平面二次包络弧面蜗杆传动装置”。经过长期实践证明,其啮合性能良好,效果显著。一九七七年三月北京市和冶金部联合召开现场会议,将这种蜗轮副正式命名为“首钢(SG)-71型蜗轮副”。一九七九年七月又召开全国鉴定会议,确认SG-71型蜗轮副为首钢发明,并荣

获国家发明二等奖。作者等对这种蜗轮副作了理论研究和推广工作，取得了一定的进展。本书对该蜗轮副啮合原理的研究方面较系统地应用了“包络法”。

为了兼顾各方面的不同需要，在各篇之间既有联系，又有相对独立性。此外，为方便设计人员，第十章集中了设计公式、数据和图表。第十一章中给出了用ALGOL算法语言编写的在设计中常用到的一组电子计算机程序。

本书由北京钢铁学院沈蕴方、容尔谦、李寅年、冯德坤等编写，沈蕴方主编。多年来参加该专题理论研究工作的同志还有方兆彰、孙荣平、江心智、李焱等。

在我们的研究工作和编写过程中得到首钢机械厂、重庆大学、南开大学、天津市机械研究所、郑州机械科学研究所、西安冶金建筑学院、乐山冶金机修轧辊厂、西安冶金机械厂、上海机修总厂、上钢十厂和湘潭钢铁公司等单位的帮助。本书承蒙冶金部蔡书阡工程师审阅，提出了宝贵的意见，在此一并表示衷心感谢。

由于编写时间匆促，我们水平有限，书中定有不妥之处，敬请读者批评指正。

一九八一年八月

目 录

前 言

第一篇 数学基础知识

第一章 空间曲线	1
第一节 向量函数	1
第二节 向量函数的导数和微分	4
第三节 向量函数的常用性质	5
第四节 向量函数的台劳公式	7
第五节 空间曲线的表示及其正则性	8
第六节 曲线的弧长参数和单位切向量	10
第七节 伴随三面形	12
第八节 密切平面	14
第九节 曲线的曲率	16
第十节 曲线的挠率	18
第十一节 弗朗内公式	20
第十二节 曲线在正则点附近的结构	22
第十三节 平面曲线族的包络	24
第十四节 参数方程表示的曲线族的包络	26
第十五节 平面曲线族及其包络的综合曲率	28
第二章 空间曲面	30
第一节 空间曲面的表示	30
第二节 曲面上的曲线及其切向量	34
第三节 曲面的法向量和切平面方程	37
第四节 曲面的第一基本形式	39
第五节 曲面的第二基本形式	42
第六节 法曲率和麦尼埃定理	44
第七节 杜班标形和欧拉公式	46
第八节 主曲率的确定和曲面上点的分类	48
第九节 曲率线和罗德里克方程	50
第十节 单参数曲面族的包络	52

第十一节 显式和隐式表示的曲面族的包络	54
第十二节 曲面族的脊线	56

第二篇 包络法和空间啮合原理

第三章 包络法 (一)	61
第一节 空间啮合一般坐标系	61
第二节 算符及其性质	65
第三节 对坐标变量的相似微分算符	73
第四节 曲面族及其包络	78
第五节 接触线及由其组成的 Σ_1 和 Σ_2^*	83
第六节 曲面上曲线族的包络线	87
第七节 包络面上接触线的包络线	92
第八节 母面上接触线的包络线	94
第九节 应用实例分析	99
第四章 包络法 (二)	106
第一节 一类界点	106
第二节 二类界点和二次接触	110
第三节 二次包络的包络面和接触线	115
第四节 二次包络的界限曲线	121
第五节 二次作用面	129
第五章 平面族包络和蜗杆曲面	133
第一节 平面族的包络	133
第二节 平面包络蜗杆曲面的几何形状	137
第三节 蜗杆曲面第一、第二基本量	139
第四节 蜗杆曲面的主曲率和曲率线	141
第五节 蜗杆曲面在脊线附近的结构	144
第六节 蜗杆曲面的根切	146
第六章 诱导法曲率	151
第一节 相切曲面的相对法曲率	151
第二节 共轭曲面的诱导法曲率	157
第三节 综合曲率	160
第四节 平面包络蜗轮副的综合曲率	167

第三篇 SG-71型蜗轮副

第七章 第一次包络过程	174
第一节 概述	174
第二节 坐标设置及其变换	177
第三节 母平面方程和啮合方程	180
第四节 母平面上的接触线	182
第五节 母面上接触线的包络线——二界曲线	187
第六节 接触线与相对滑动速度间的夹角——润滑角	194
第七节 接触线分析	195
第八章 蜗杆的几何特性	200
第一节 蜗杆的齿面方程	200
第二节 蜗杆的齿廓	204
第三节 蜗杆螺旋升角	212
第四节 蜗杆齿面的非工作区	217
第五节 蜗杆齿面的根切	226
第六节 非工作区和根切的综合分析	232
第七节 蜗杆轴向齿厚	235
第八节 蜗杆齿面的主曲率 ——平面一次包络蜗轮副的综合曲率	240
第九章 第二次包络过程	247
第一节 SG-71型蜗轮副的类型	247
第二节 坐标设置及其变换	248
第三节 接触线和相对综合曲率半径	250
第四节 接触线分析	260
第五节 直线弧面蜗杆传动	272
第六节 第Ⅱ类平面二次包络弧面蜗杆传动	275
第十章 SG-71型蜗轮副的设计计算	282
第一节 主要参数选择原则	283
第二节 几何尺寸计算	285
第三节 非工作区和根切的验算	288
第四节 蜗杆齿顶厚度的验算	289
第五节 设计计算实例	333

第十一章 电子计算机程序	339
第一节 接触线和综合曲率半径计算机程序	339
第二节 一界曲线和非工作区判别线计算机程序	349
第三节 计算圆齿厚与齿顶厚计算机程序	353

第一篇 数学基础知识

本篇介绍“包络法和啮合理论”的数学基础知识，主要涉及微分几何中的某些内容。

第一章 空间曲线

第一节 向量函数

在解析几何中，当在三维空间取定了直角坐标时，空间任意一点 $P(x, y, z)$ 的向量 $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$ 可表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

点 P 的坐标 x, y, z 也叫做向量 $\mathbf{r}$ 的坐标 (图1-1)。

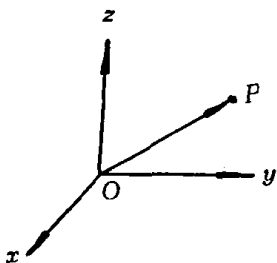


图 1-1

如果变量 $t \in [\alpha, \beta]$ ，当 t 取得某一个确定的值时，坐标 x, y, z 有确定的对应值，并且由方程组

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (1-1)$$

来确定，则称 $\mathbf{r}$ 为参变量 t 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的一个向量函数，记作

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1-2)$$

上式也称为向量方程或点 P 的向径，当 t 变动时，端点 P 的轨迹是一条曲线，因此，式 (1-2) 等价于式 (1-1)。

一般情况，若向量 $\mathbf{A}$ 是变量 t 的一个单值连续函数，即 $\mathbf{A}=\mathbf{A}(t)$ 。当 t 变动时， $\mathbf{A}$ 的大小和方向也随着变化。设 $\mathbf{A}$ 在三个坐标轴上的投影分别为 $A_x(t)$ ， $A_y(t)$ ， $A_z(t)$ ，则有

$$\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$$

如果 $\mathbf{A}$ 是平面向量，则 $\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}$ 。

对于平面和空间的一些曲线，可以用向量方程来表示。

例1-1：圆（图1-2）

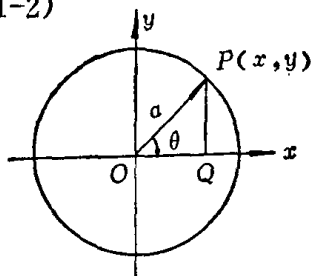


图 1-2

设圆上的动点为 $P(x, y)$ ，由于 $x=a\cos\theta$ ， $y=a\sin\theta$ ，则圆的向量方程为

$$\mathbf{r}(\theta)=a\cos\theta\mathbf{i}+a\sin\theta\mathbf{j}$$

同时，上式可用向量的加法得到。因为

$$\mathbf{r}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}$$

而

$$\overrightarrow{OQ}=x\mathbf{i}=a\cos\theta\mathbf{i}$$

$$\overrightarrow{QP}=y\mathbf{j}=a\sin\theta\mathbf{j}$$

所以

$$\mathbf{r}=a\cos\theta\mathbf{i}+a\sin\theta\mathbf{j}$$

例1-2：摆线（图1-3）

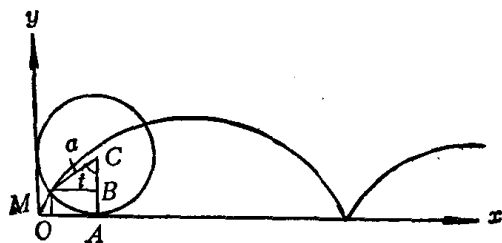


图 1-3

设摆线上任一点 $M(x, y)$, 据向量加法定理, 有:

$$\vec{r}(t) = \vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AC} + \vec{CM}$$

因为 $\vec{OA} = at\mathbf{i}$, $\vec{AC} = a\mathbf{j}$, $\vec{CM} = \vec{CB} + \vec{BM}$

而 $\vec{CB} = -a\cos t\mathbf{j}$ $\vec{BM} = -a\sin t\mathbf{i}$

所以 $\vec{r}(t) = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}$

由 $\vec{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, 得到

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

例1-3: 圆柱螺旋线 (图1-4)

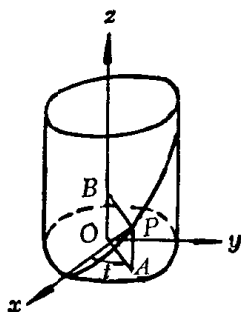


图 1-4

设该曲线上任一点 $P(x, y, z)$, 则有

$$\vec{r}(t) = \vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

而

$$\vec{OA} = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j}$$

$$\vec{AP} = bt\mathbf{k}$$

其中 螺旋导程 $b = \frac{OB}{t} = \text{常数}$

所以 $\vec{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$
 $= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$

或

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = a\sin t \\ z(t) = bt \end{cases}$$

第二节 向量函数的导数和微分

对于向量函数 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ ，当变量由 t 变到 $t + \Delta t$ 时，向量函数由 $\mathbf{A}(t)$ 变到 $\mathbf{A}(t + \Delta t)$ 。并且在 t 变化时， $\mathbf{A}(t)$ 的端点 P 描绘出一条空间曲线（图1-5），向量 $\overrightarrow{PP'}$ 为

$$\overrightarrow{PP'} = \mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t) = \Delta \mathbf{A}$$

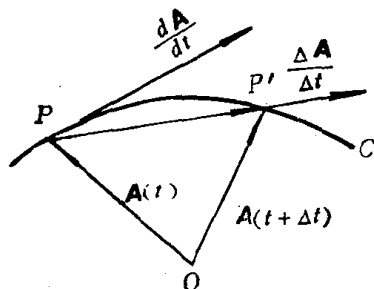


图 1-5

而向量 $\Delta \mathbf{A} / \Delta t$ 相当于 $\overrightarrow{PP'}$ 放大（或缩小） $1/\Delta t$ 。假定当 Δt 无限趋向于零时，向量 $\Delta \mathbf{A} / \Delta t$ 无限地接近于一个以 P 为起点的向量。这个极限位置的向量称为向量 $\mathbf{A}(t)$ 对 t 的导数，记为

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

如果 $d\mathbf{A}/dt$ 仍是 t 的函数，这种极限运算可以继续下去，那么可以定义 $\mathbf{A}(t)$ 的二阶、三阶导数，等等，即

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) = \frac{d^2 \mathbf{A}}{dt^2}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d^2 \mathbf{A}}{dt^2} \right) = \frac{d^3 \mathbf{A}}{dt^3}$$

.....

显然，向量函数 $\mathbf{A}(t)$ 的导数 $d\mathbf{A}/dt$ 是个向量。它的方向是曲线 C 在 P 点的切线方向，它指向 t 的增加一方，把向量 $d\mathbf{A}/dt$ 称为曲线 C 在 P 点的切线向量。并且有

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{dA_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt}\mathbf{k} \\ &= \dot{A}_x\mathbf{i} + \dot{A}_y\mathbf{j} + \dot{A}_z\mathbf{k}\end{aligned}\quad (1-3)$$

也就是向量 $\mathbf{A}(t)$ 的导数等于其分量导数的向量和。如果向量函数 $\mathbf{A}(t)$ 有 n 阶导数存在, 则称 $\mathbf{A}(t)$ 为 n 阶可微的。

向量函数的导数运算, 容易证明它和微分学的法则基本相同, 满足以下关系式:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{B}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(C\mathbf{A}) &= C \frac{d\mathbf{A}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}\end{aligned}\right.\quad (1-4)$$

应该注意向量积的导数 $\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ 与次序有关, 必须按先后次序列出。

对于任意的不等于零的数量 dt , 向量 $d\mathbf{A} = \dot{\mathbf{A}}dt$ 称为向量函数 $\mathbf{A}$ 的微分。 $d\mathbf{A}$ 是个向量, 它相当于切线向量 $d\mathbf{A}/dt$ 的 dt 倍。因此, $d\mathbf{A}$ 的方向与曲线 C 的切线方向平行。向量 $\mathbf{A}$ 的微分法则与导数法则完全一样, 可由式 (1-4) 得到类似的微分公式。

第三节 向量函数的常用性质

性质一: 定长向量 $\mathbf{r}(t)$ 与它的导数 $\dot{\mathbf{r}}(t)$ 垂直, 反过来也是正确的。

因为, 若 $|\mathbf{r}(t)| = a$ (常数), 则 $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = r^2(t) = |\mathbf{r}(t)|^2 = a^2$, 对 t 进行微分有

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = 0$$

所以

$$2\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = 0$$

即

$$\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = 0$$

表明 $\mathbf{r}(t)$ 与 $\dot{\mathbf{r}}(t)$ 垂直。

反之, 若 $\mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = 0$, 则有 $\dot{r}^2(t) = \text{常数}$, 即 $|\mathbf{r}(t)| = \text{常数}$ 。

特别是单位向量 $\mathbf{e}(t)$, 向量 $\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt}$ 必与 $\mathbf{e}(t)$ 相垂直。

性质二: 定向向量 $\mathbf{r}(t)$ 与它的导数 $\dot{\mathbf{r}}(t)$ 相平行, 反过来也是正确的。

因为, 对于定向向量 $\mathbf{r}(t)$, 可取与 $\mathbf{r}(t)$ 平行的单位向量 $\mathbf{e}(t)$, 使 $\mathbf{r}(t) = P(t)\mathbf{e}(t)$, 其中 $P(t)$ 是 t 的数量函数, 且 $P(t) \neq 0$, 有

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{P}(t)\mathbf{e}(t) + P(t)\dot{\mathbf{e}}(t) \quad (1-5)$$

由于 $\mathbf{e}(t)$ 是个固定向量, 所以 $\dot{\mathbf{e}}(t) = 0$, 有

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{P}(t)\mathbf{e}(t)$$

这表明 $\dot{\mathbf{r}}(t)$ 与 $\mathbf{r}(t)$ 平行。

反之, 设 $\dot{\mathbf{r}}(t)$ 与 $\mathbf{r}$ 平行, 令 $\dot{\mathbf{r}}(t) = \lambda(t)\mathbf{r}$, 由 $\mathbf{r}(t) = P(t)\mathbf{e}(t)$ 对 t 微分, 得到

$$\dot{P}(t)\mathbf{e}(t) + P(t)\dot{\mathbf{e}}(t) = \lambda(t)P(t)\mathbf{e}(t)$$

用 $\mathbf{e}$ 对上式作数量积, 有

$$\dot{P}(t)\mathbf{e}(t) \cdot \mathbf{e}(t) + P(t)\dot{\mathbf{e}}^2(t) = \lambda(t)P(t)\mathbf{e}(t) \cdot \mathbf{e}(t)$$

由性质一知: $\mathbf{e}(t) \cdot \mathbf{e}(t) = 1$, 有 $\dot{\mathbf{e}}^2(t) = 0$, 也就是 $\mathbf{e}(t)$ 是个固定向量, 则 $\mathbf{r}$ 为定向向量。

性质三: 单位向量 $\mathbf{e}(t)$ 的导数的模, 等于向量的方向改变率, 即

$$\left| \frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} \right| = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \quad (1-6)$$

当变量由 t 变到 $t + \Delta t$ 时, 单位向量由 $\mathbf{e}(t)$ 变到 $\mathbf{e}(t + \Delta t)$, 角度变化为 $\Delta\varphi$ (图1-6)。

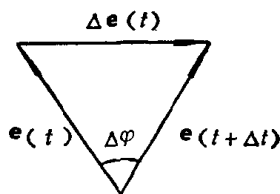


图 1-6

因为 $|\mathbf{e}(t)| = |\mathbf{e}(t + \Delta t)| = 1$

所以 $\left| \frac{\Delta\mathbf{e}(t)}{2} \right| = \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} \right| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\mathbf{e}(t)}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{2\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} \right| \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{2\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot \frac{1}{\Delta t} \right| = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \end{aligned}$$

第四节 向量函数的台劳公式

若向量函数 $\mathbf{r}(t)$ 是一个 n 阶可微的, 则它的 n 阶台劳 (Taylor) 公式为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t + \Delta t) &= \mathbf{r}(t) + \dot{\mathbf{r}}(t)\Delta t + \frac{1}{2!} \ddot{\mathbf{r}}(t)(\Delta t)^2 + \\ &\dots + \frac{1}{n!} \mathbf{r}^{(n)}(t)(\Delta t)^n + \varepsilon(\Delta t)^n \end{aligned} \quad (1-7)$$

其中, $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\varepsilon \rightarrow 0$ 。证明如下:

因为 $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + \frac{1}{2!}\ddot{x}(t)(\Delta t)^2 + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!}x^{(n)}(t_1)(\Delta t)^n$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \dot{y}(t)\Delta t + \frac{1}{2!}\ddot{y}(t)(\Delta t)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!}y^{(n)}(t_2)(\Delta t)^n$$

$$z(t + \Delta t) = z(t) + \dot{z}(t)\Delta t + \frac{1}{2!}\ddot{z}(t)(\Delta t)^2 + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!}z^{(n)}(t_3)(\Delta t)^n$$

其中, $t < t_i < t + \Delta t$, ($i=1, 2, 3$)。现在分别用 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ 乘上面三个等式, 再相加得到

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \dot{\mathbf{r}}(t)\Delta t + \frac{1}{2!}\ddot{\mathbf{r}}(t)(\Delta t)^2 + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!}\mathbf{R}_n(\Delta t)^n$$

式中 $\mathbf{R}_n = x^{(n)}(t_1)\mathbf{i} + y^{(n)}(t_2)\mathbf{j} + z^{(n)}(t_3)\mathbf{k}$

由于 $x^{(n)}(t_1)$, $y^{(n)}(t_2)$, $z^{(n)}(t_3)$ 都是 t 的连续函数, 而 t_1, t_2, t_3 在 t 与 $t + \Delta t$ 之间

所以 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{R}_n = \mathbf{r}^{(n)}(t)$

有 $\mathbf{R}_n = \mathbf{r}^{(n)}(t) + \varepsilon \quad \varepsilon \rightarrow 0 (\Delta t \rightarrow 0)$

故式 (1-7) 成立。

第五节 空间曲线的表示及其正则性

对空间任一条曲线, 可看作两个曲面的交线, 其方程为