21世纪实用经济数学系列教材

实用概率统计同步教练

主 编 于义良 安建业
李秉林 赵芬霞

SHI YONG GAI LÜ TONG JI
TONG BU JIAO LIAN

中国人民大学出版社

21世纪实用经济数学系列教材

实用概率统计同步教练

主　编　于义良　安建业
　　　　李秉林　赵芬霞

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实用概率统计同步教练/于义良等主编.
北京:中国人民大学出版社,2002
21世纪实用经济数学系列教材

ISBN 7-300-04052-7/O·49
Ⅰ.实…
Ⅱ.于…
Ⅲ.①概率论-教学参考资料 ②数理统计-教学参考资料
Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第012660号

21世纪实用经济数学系列教材
实用概率统计同步教练
主　编　于义良　安建业
　　　　李秉林　赵芬霞

出版发行:中国人民大学出版社
　　　　(北京中关村大街31号　邮编100080)
　　　　邮购部:62515351　门市部:62514148
　　　　总编室:62511242　出版部:62511239
　　　　E-mail:rendafx@public3.bta.net.cn
经　　销:新华书店
印　　刷:北京密兴印刷厂

开本:787×980毫米 1/16　印张:15.25
2002年3月第1版　2002年9月第2次印刷
字数:275 000

定价:16.00元
(图书出现印装问题,本社负责调换)

总 序

人类已经迈进了21世纪，由于科学技术的迅猛发展，数量分析已渗透到各个领域，数学的重要性已被整个社会所公认；由于计算机技术的广泛普及和提高，许多繁难的计算和抽象的推理已不再是高不可攀，数学的应用越来越深入；随着人类素质的不断提高，数学素质教育已成为全体国民的必修课程，数学的普及越来越广泛．为适应21世纪形势的发展和社会的需要，信息技术与学科课程整合已提到教育教学改革“重中之重”的地位，运用信息技术改造和优化传统学科内容是培养新世纪具有创新能力的高素质人才的必然要求．经过多年的教学研究和实践，我们组织了具有丰富教学经验的第一线教师，编写出这套实用经济数学系列教材，奉献给大家．

这套系列教材，包括《实用微积分》、《实用线性代数》、《实用概率统计》、《实用数学模型》共四册．本套教材力求体现如下特点：

第一，以实用为原则，内容体系整体优化，突出“用数学”能力的培养，使读者实现由知识向能力的转化．

第二，以实际为背景，概念阐述简明、通俗化，举例贴近生活，运用多媒体技术使内容直观化、图形化，使读者消除对数学的陌生感、抽象感、恐惧感，激活求知欲，增强学好数学、用好数学的信心．

第三,以计算机为工具,传统内容与信息技术应用融为一体,注重基本知识、基本思想、基本能力的培养,对繁、难、抽象的内容,充分利用当前极为流行的Mathematica软件、Excel软件来实现,比如函数图形描绘、矩阵计算、数据分析等.

第四,每册教材均配有多媒体助学助教光盘,包括课程说明、同步辅导、习题详解、单元测试、模拟演示、电子教案、案例精选、考研试题分析、数学家简介等众多模块,信息量大,使用方便,便于读者更好地理解、掌握、巩固所学知识,有助于及时检测、拓展和提高.

这套系列教材是21世纪初天津市普通高校教学改革项目《信息技术与经济数学课程整合的研究和实践》的成果,主要面向高等学校经济学类、管理学类的本科生,对其他学科类的学生和数学实用工作者也是很好的辅助教材.

我们期盼着这套实用经济数学系列教材能给广大读者带来学数学的轻松、用数学的快乐和效益.

于义良

2002年5月于天津商学院

前　言

学校要以学生为本,给每个学生提供优质教育是每个教育工作者义不容辞的职责.为了提高服务意识,帮助学生学好"实用概率统计"这门重要基础课,我们在多年教学实践的基础上,总结编写了这本《实用概率统计同步教练》,旨在做一名"教练员","手把手"地教给学生掌握知识的思路和方法,激活求知欲,启迪悟性,挖掘潜能,使每个学生尽快成为"实用概率统计"这门科学的实践者.

《实用概率统计同步教练》的结构:

章、节序号与《实用概率统计》教材基本一致,每章均提出学习目标要求,每节均由基本内容、典型例题分析、思考与练习、提示与答案四部分组成.

《实用概率统计同步教练》的特点:

这是21世纪初天津市普通高校教学改革项目《信息技术与经济数学课程整合的研究和实践》的成果之一,我们力求做到:

1. 每章学习目标明确,便于学生分清主次,突出重点.

2. 每节基本内容清晰,便于学生一览全局,掌握知识体系.

3. 每节典型例题分析注重阐述解题思路,尽量提供一题多解方法,便于学生很快掌握解题要领,开拓思路,提高创新能力.

4. 每节针对基本知识理解和基本技能训练均配有思考与练习,题型全面,内

容丰富,便于初学者拓宽知识面,亦便于学有余力者深入理解,更上一层楼.

5.每节思考与练习均配有提示与答案,便于学生及时反馈信息,进行总结提高.

在编写过程中,为了使所选内容更具代表性、典型性,我们参阅和引用了有关书籍的一些例题,恕不一一指明出处,在此一并向有关作者致谢.

限于编著者的水平,书中的不当或错误之处,敬请批评雅正,以期不断修改与提高.

编著者

2002年9月于天津商学院

21世纪实用经济数学系列教材

目录

第1章

随机变量

您学了本章之后，应当能够做到：

1. 了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系和运算，并能灵活运用这些概念表示新的事件.

2. 掌握古典概型的条件和公式并能计算.理解概率、条件概率的概念，掌握概率的公理化定义及基本性质.掌握概率乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式，并能灵活运用这些公式进行计算.

3. 理解事件独立性的概念，理解独立重复试验概念并能进行判断和计算.

4. 理解随机变量的概念，理解随机事件和随机变量之间的关系.理解离散型随机变量及其概率分布的概念，掌握两点分布、二项分布和泊松分布的概率分布及其背景和应用.

5. 理解连续型随机变量及其概率密度的概念，掌握均匀分布、指数分布和正态分布的概率密度函数及其背景和应用.

6. 理解分布函数的概念及其性质，理解分布函数与概率分布(或密度函数)之间的关系，掌握正态分布的计算.

7. 会求简单的一个随机变量函数的概率分布.

第1.1节 随机事件及其概率

基本内容

1. 随机事件

(1) **随机试验** 具有以下三个特点的试验称为随机试验:

1) 在相同的条件下可以重复进行;

2) 每次试验的可能结果不只一个,而究竟出现哪个结果,在试验之前不能预言;

3) 试验之前可以预知试验中一切可能的结果,每次试验中出现且只出现可能结果中的一个.

随机试验常记为 E.

(2) **样本点、样本空间** 试验中的每个可能的结果称为样本点,用 ω 表示.全体样本点构成的空间称为样本空间,用 Ω 表示.从集合论的观点看,样本空间就是针对该试验的全集,而样本点就是构成样本空间的元素.

(3) **随机事件、必然事件、不可能事件** 样本空间 Ω 的子集称为随机事件,简称事件,一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.我们称某一事件在一次试验中出现(发生)了是指该次试验出现的结果(样本点)属于该事件(子集),否则称该事件没有出现(发生).易见 Ω 在每次试验中均要出现,故称必然事件.$\varnothing$ 在每次试验中均不出现,故又称不可能事件.

(4) **随机事件之间的关系和运算** 由集合和随机事件之间的联系,可得到如下的结论:

1) $A\subset B$:A 是 B 的子集.它表示若事件 A 出现则事件 B 一定出现.

2) $A\cup B$(或 $A+B$):A 与 B 的并(和).它表示一个新事件,即事件 A 和事件 B 至少有一个出现.同样,$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 这 n 个事件至少有一个出现.

3) $A\cap B$(或 AB):A 与 B 的交(积).它表示一个新的事件,即事件 A 和事件 B 同时出现.同样,$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$,表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 这 n 个事件同时出现.

4) $A\cap B=\varnothing$:它表示事件 A 和事件 B 不可能同时出现,我们称 A 与 B 为互不相容,简称互斥.

5) $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$:它表示事件 A 和事件 B 出现且只出现其中

一个，我们称为 A 与 B 对立，并称 $B(A)$ 为 $A(B)$ 的对立事件，记为 $B=\overline{A}(A=\overline{B})$.

6）$A-B$：A 与 B 的差，它表示事件 A 出现而事件 B 不出现．显然 $A-B=A\overline{B}$，同时 $B-A=B\overline{A}$.

7）$\overline{A\cup B}$：它是事件 A 和事件 B 至少出现一个的对立事件．显然它表示事件 A 和事件 B 都不出现，即 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$．同样，$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$.

8）$\overline{A\cap B}$：它是事件 A 和事件 B 同时出现的对立事件．显然它表示事件 A 和事件 B 至少有一个不出现，即 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$．同样，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$.

2．随机事件的概率

（1）**概率的描述性定义**　用来刻画事件出现可能性大小的数值称为事件的概率.

（2）**概率的古典定义**　我们把具有以下两个特点的试验称为古典概型：

1）所有可能的试验结果是有限个（有限性）；

2）每个可能结果在一次试验中出现的可能性相同（等可能性）.

在古典概型中，设样本空间 Ω 中包含有 n 个样本点，则对任意事件 A，若 A 中含有 k 个样本点，那么事件 A 的概率 $P(A)$ 定义为

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 中包含的样本点数}}{\text{样本空间}\Omega\text{ 中样本点总数}}=\frac{k}{n}$$

（3）**概率的统计定义**　在相同条件下重复进行 n 次试验，事件 A 在这 n 次试验中出现了 μ 次，当试验次数 n 足够大时，频率 $\frac{\mu}{n}$ 稳定在某个常数 p 附近，则我们就称 p 为事件 A 的概率，即 $P(A)=p$．$\frac{\mu}{n}$ 为 $P(A)$ 的近似值.

（4）**概率的几何定义**　$P(A)=\dfrac{\text{事件 }A\text{ 的度量}}{\text{样本空间}\Omega\text{ 的度量}}$

（5）**概率的公理化定义**　设试验 E 的样本空间为 Ω，对于试验 E 的每一个事件 A，都赋予一个实数 $P(A)$，如果 $P(A)$ 满足以下三条公理，则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率：

1）非负性：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

2）规范性：$P(\Omega)=1$，　$P(\varnothing)=0$；

3）可列可加性：若 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 是两两互不相容的事件（即 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$），则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

(6) **概率的基本性质**

1) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$；

2) $P(\bar{A})=1-P(A)$；

3) 若 $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$；

4) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$；

5) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；

6) $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$；

7) 若 $A\supset B$，则 $P(A)\geqslant P(B)$.

典型例题分析

例 1 某运动员射击目标，共发 5 枪，若 A_i 表示第 i 次射击击中目标 ($i=1,2,\cdots,5,$) 则 $A_1A_2\overline{A_3A_4A_5}$ 表示什么事件？

解 由于 $A_1A_2\overline{A_3A_4A_5}=A_1A_2(\overline{A_3}+\overline{A_4}+\overline{A_5})$，等式右端系三个事件的乘积，意味着三个事件同时发生. A_1A_2 表明 A_1 和 A_2 同时发生. $\overline{A_i}$ 表示第 i 次没击中目标，$\overline{A_3}+\overline{A_4}+\overline{A_5}$ 表明 $\overline{A_3},\overline{A_4},\overline{A_5}$ 至少有一个发生，因此 $A_1A_2\overline{A_3A_4A_5}$ 表示该运动员前两次射击都击中目标，后三次射击至少有一次没击中目标.

例 2 A 表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件 $\bar{A}$ 表示什么？

解 为明确起见，令 $B=$“甲种产品畅销”，$C=$“乙种产品畅销”，于是 $A=B\cdot\bar{C}$ 而 $\bar{A}=\overline{(B\bar{C})}=\bar{B}+C$. 可见 $\bar{A}$ 表示甲种产品滞销或乙种产品畅销.

[注] 会用字母表示事件，是一种基本要求. 明了字母所表示的究竟是什么事件，是计算事件概率的一个先决条件. 但由于简单，这一点易被忽视，往往是出现错误的原因之一，应当引起注意. 在用字母表示事件时，特别要注意德·摩根公式 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$ 的应用.

例 3 事件 A,B,C 两两互不相容与 $ABC=\varnothing$ 是不是一回事？

解 A,B,C 两两互不相容当然有 $ABC=\varnothing$，但 $ABC=\varnothing$ 并不意味着 A,B,C 两两互不相容. 例如，有三个球，每个球都涂有两种颜色，三个球的颜色分别为红、黄；黄、绿；红、绿. 现从中任取一球，令 $A=$“取到的球上有红色”，$B=$“取到的球上有黄色”，$C=$“取到的球上有绿色”，显然有 $ABC=\varnothing$，而 A 与 B，B 与 C，C 与 A 是两两相容的. 因此事件 A,B,C 两两互不相容与 $ABC=\varnothing$ 并非一回事.

例 4 若 A_1, A_2, A_3 均属于 A,试证 $P(A) \geqslant P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2$.

证 由于 A_1, A_2, A_3 均属于 A,则 $\overline{(A_1A_2A_3)} \supset \bar{A}$,由德·摩根公式知 $\overline{(A_1A_2A_3)} = \overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}$,便有

$$P(\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}) \geqslant P(\bar{A})$$

又有

$$P(\overline{A_1})+P(\overline{A_2})+P(\overline{A_3}) \geqslant P(\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3})$$

便知

$$P(\overline{A_1})+P(\overline{A_2})+P(\overline{A_3}) \geqslant P(\bar{A})$$

利用 $P(\bar{A})=1-P(A), P(\overline{A_i})=1-P(A_i)$代入上式

$$1-P(A_1)+1-P(A_2)+1-P(A_3) \geqslant 1-P(A)$$

移项之后便有

$$P(A) \geqslant P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2$$

例 5 证明对任意的随机事件 A 和 B 有 $P(A+B)\cdot P(AB) \leqslant P(A)\cdot P(B)$.

证 在 $A \subset B, A \supset B, AB=\varnothing, P(A)=0, P(B)=0$ 等特殊情况下,不等式显然成立.在以下证明中认为 $P(A)>0, P(B)>0, P(AB)>0, P(\bar{A}B)>0$.由于有 $AB \subset A$,故有

$$P(AB) \leqslant P(A)$$

$$P(\bar{A}B)P(AB) \leqslant P(A)\cdot P(\bar{A}B)$$

$$P(A)\cdot P(AB)+P(\bar{A}B)\cdot P(AB) \leqslant P(A)P(AB)+P(A)\cdot P(\bar{A}B)$$

$$[P(A)+P(\bar{A}B)]P(AB) \leqslant P(A)[P(AB)+P(\bar{A}B)]$$

$$P(A+\bar{A}B)\cdot P(AB) \leqslant P(A)P(AB+\bar{A}B)$$

$$P(A+B)\cdot P(AB) \leqslant P(A)\cdot P(B)$$

例 6 设二次方程 $Ax^2+Bx+C=0$ 的系数 A, B, C 分别等于连续抛掷一颗骰子三次所出现的点数.试求:(1) 方程有实数解的概率;(2) 方程有有理数解的概率.

解 如下表.一颗骰子掷一次有六种可能,A, B, C 均可能是从 1 到 6 的任何整数,样本点的数目为 6^3.方程有实数解须满足 $B^2-4AC \geqslant 0$,方程有有理数解应使$\sqrt{B^2-4AC}$为有理数.

B 的点数	1	2	3	4	5	6	总计
使 $B^2-4AC \geqslant 0$ 的样本点数	0	1	3	8	14	17	43
使$\sqrt{B^2-4AC}$为有理数的样本点数	0	1	2	5	7	5	20

若记方程有实数解的概率为 p,方程有有理数解的概率为 q,则

$$p=\frac{43}{216};\qquad q=\frac{20}{216}$$

例 7 四男四女去跳舞,抽签选舞伴.求四男的舞伴均为女的概率.

解 法 1.设 A="四男的舞伴均为女",样本点总数为 $C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2/4!$,而 A 所包含的样本点的个数可以这样考虑,将 8 人分为男、女两组,每组 4 人,在男子组选一人,在女子组选一人,两人搭伴.再从男子组选一人,女子组选一人,令其搭伴,……因此 A 包含的样本点的个数为 $(C_4^1)^2\cdot(C_3^1)^2\cdot(C_2^1)^2\cdot(C_1^1)^2/4!$,故有

$$P(A)=\frac{(C_4^1)^2\cdot(C_3^1)^2\cdot(C_2^1)^2\cdot(C_1^1)^2}{C_8^2\cdot C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2}=\frac{8}{35}$$

法 2.还可以这样看,8 人中一人先选舞伴有 7 种可能,选完剩 6 人,其中又一人选,有 5 种可能,所剩 4 人中再一人选有 3 种可能,最后剩下两人,只有一种可能,样本点总数为 $C_7^1\cdot C_5^1\cdot C_3^1\cdot C_1^1$.$A$ 所包含样本点数可考虑四男去选四女,不妨设四男为甲、乙、丙、丁,其中甲先选有 4 种可能,乙其次选有 3 种可能,然后丙再选有 2 种可能,丁最后选只有 1 种可能.因此有

$$P(A)=\frac{C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_2^1\cdot C_1^1}{C_7^1\cdot C_5^1\cdot C_3^1\cdot C_1^1}=\frac{8}{35}$$

例 8 一颗骰子掷 4 次至少出现一个 6 点,与两颗骰子掷各 24 次至少出现一个双 6 点,哪个概率大?

解 设 A="一颗骰子掷 4 次,至少出现一个 6 点",B="两颗骰子各掷 24 次,至少出现一个双 6 点",一颗骰子掷一次,出现 6 点的可能性为 $\frac{1}{6}$,不出现 6 点的可能性为 $\frac{5}{6}$,掷 4 次都不出现 6 点的可能性为 $\left(\frac{5}{6}\right)^4$,因此

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1\quad\left(\frac{5}{6}\right)^4=0.517\ 7$$

两颗骰子掷一次共有 36 种可能性,双 6 是其中的一种,因此掷一次出现双 6 的可能性是 $\frac{1}{36}$,而不出现双 6 的可能性是 $\frac{35}{36}$,如果掷 24 次都不出现双 6 的可能性为 $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$,故

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=0.491\ 4$$

由以上结果可知,一颗骰子掷 4 次至少出现一个 6 点的概率较大.

例 9 9 位乘客随机进入三节车厢的列车,试求:(1) 第一节车厢进了 3 位乘客的概率;(2) 每一节车厢都进了 3 位乘客的概率;(3) 三节车厢分别进了 4,3,2

位乘客的概率.

解 每位乘客都有 3 种选择,9 位乘客共有 3^9 种选择,这是样本点总数.令 A =“第一节车厢进了三位乘客”,B =“每节车厢都进了 3 位乘客”,C =“三节车厢分别进了 4,3,2 位乘客”.事件 A 发生相当于从 9 位乘客中任选 3 位进入第一节车厢,其余 6 位乘客在另两节车厢中任选,因此有

$$P(A)=\frac{C_9^3\cdot 2^6}{3^9}=0.273\ 1$$

事件 B 发生相当于从 9 位乘客中选 3 位进第一节车厢,再从其余 6 位中选 3 位进第二节车厢,剩下 3 位进第三节车厢,故有

$$P(B)=\frac{C_9^3\cdot C_6^3\cdot C_3^3}{3^9}=0.085\ 4$$

事件 C 发生相当于从 9 位乘客中选 4 位进入某节车厢,其余 5 人中选 3 位进入一节车厢,剩下 2 位进一节车厢.由于没要求某节车厢必须是几人,即各节车厢的乘客可以互换车厢,还要乘上 3!,即

$$P(C)=\frac{C_9^4\cdot C_5^3\cdot C_2^2\cdot 3!}{3^9}=0.348\ 1$$

例 10 n 位乘客随机地进入 n 节车厢,求每节车厢都有乘客的概率.

解 每位乘客都可进入 n 节车厢中的任一节,即有 n 种选择,n 位乘客共有 n^n 种可能,系 n 个元可重复的排列数.令 A =“每节车厢都有乘客”,事件 A 发生意味着每节车厢都只有一位乘客,系 n 个元不重复的排列数,即有 $n!$ 种可能,因此

$$P(A)=\frac{n!}{n^n}$$

例 11 一列火车共有 n 节车厢,有 $k(k\geqslant n)$位旅客上了车并随意选择车厢,求每一节车厢内至少有一位旅客的概率.

解 令 A =“至少有一节车厢无旅客”,A_i =“第 i 节车厢中无旅客”($i=1,2,\cdots,n$),如果 A_i 发生意味着旅客全到其余 $n-1$ 节车厢,因此

$$P(A_i)=\frac{(n-1)^k}{n^k}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$$

$$P(A_{i_1}A_{i_2})=\frac{(n-2)^k}{n^k}=\left(1-\frac{2}{n}\right)^k,\quad i_1\neq i_2$$

…………

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_{n-1}})=\frac{[n-(n-1)]^k}{n^k}=\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^k \quad (\text{诸 } i_s \text{ 不相等})$$

由于必须有一节车厢不空,因此 $A_1A_2\cdots A_n=\varnothing$.