

3
J613.11.1-43
C05
工科力学课程教学基地教材

工程力学教程之四

结构静力学

蔡 新 孙文俊



A0966802

河海大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

结构静力学/蔡新,孙文俊.—南京:河海大学出版社,2001.8

ISBN 7-5630-1673-2

I. 结... II. ①蔡...②孙... III. 结构静力学-高等学校-教材 IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 055641 号

出 版	河海大学出版社
地 址	南京市西康路 1 号(邮编: 210098)
电 话	(025) 3737852(总编室) (025) 3722833(发行部)
经 销	江苏省新华书店
印 刷	丹阳教育印刷厂
开 本	787 毫米×1092 毫米 1/16
印 张	14.75
字 数	356 000
版 次	2001 年 8 月第 1 版
印 次	2001 年 8 月第 1 次
定 价	29.00 元

工程力学系列课程教材编委会

主 编：卓家寿

副主编：孙文俊 张子明

编 委：(按姓氏笔画排列)

孙文俊 朱为玄 许庆春 张子明

陈国荣 陆晓敏 杨海霞 杜成斌

卓家寿 武清玺 徐道远 黄孟生

章 青 蔡 新

序

本教程是河海大学承担教育部《面向 21 世纪力学系列课程内容和课程体系改革的研究与实践》教改项目和《国家级力学教学基地》建设项目研究的成果。该教程以优化高校工科土木、水利类专业的固体力学系列课程知识结构为目标,按照“重组基础、反映现代、融入前沿、综合交叉”原则,建立由系列模块组成有机联系的一体化力学课程新体系。原有土木、水利类专业设立的 4 门力学课程(即理论力学、材料力学、结构力学及弹性力学),由于自成系统、各自为政,缺乏沟通和整合,存在知识结构中不该有的割裂或不必要的重复现象,现代信息和应用实践也较薄弱,不利于进行完整的力学素质教育和创造性思维的培养。本教程按新组建的课程体系分为 7 门:静力学基础、动力学基础、材料力学、结构静力学、结构动力学、弹性力学基础、计算力学基础等,依序编为高校工科教材——工程力学教程之一到之七。

由新体系组建的工程力学教程具有以下一些特点:

(1) 本教程体系采用了小型模块化和分层系列化的结构,精化了基础,增加了组合的灵活性,便于适应不同专业、不同层次的要求。

本教程将静力问题和动力问题分别设置模块集中论述,使教材内容紧凑、重点突出,避免不必要的重复;同时又将静定问题和超静定问题以及结构分析的经典理论和现代发展的电算方法分别设置在不同模块,以便循序渐进地安排教学内容,使该教程的层次分明,条理清晰,前后连贯,易为读者掌握。

本教程涵盖了不同性质固体(刚体和变形体)、不同形体结构(杆件、杆系和实体结构)的力学分析问题,加强了不同研究对象的各门课程之间的共性联系,又突出了各自的个性差异,有利于学生整体力学素质的提高和创新能力的培养。

本教程以基础力学为主体内容,这部分内容通过反复精选,力求突出基础力学的精华,可以保持内容的相对稳定性。另一些内容则是根据水利、土木类专业的需求而编写的应用性基础内容。这部分内容着眼于加强力学素质教育和应用能力的培养,力求融入现代信息、扩大视野、余留思维空间。因此,根据不同的教学要求,可由本教程各模块适当组合,得到合适的课程体系教材。

(2) 本教程内容的选取和组织体现了整体力学知识的融会贯通和整合优化,既强化了力学知识的完整性,又达到了精减篇幅、提高效率的目的。

新教程中对于力学中一些重要的概念、原理和方法的论述按照其内涵的完整性和外延的逻辑性进行有机的贯通连接、交叉融会和整合优化。例如书中将考察体的平衡概念、平衡条件以及静定问题的求解等内容统一在本教程之一《静力学基础》中作严密完整的阐述,实现了刚体和变形体平衡问题的连贯以及各类静定问题求解条件和方法的统一。又如结构分析理论的平衡律、协调律和本构律等三大定律的提出、相应方程的建立和应用等始终贯穿于不同形体结构问题的分析求解全过程,既突出了工程力学中这一最重要、最基本的理论工

具,又强化了对工程力学问题的求解能力和正确思维方法的培养与训练。本教程中有关虚位移原理、质量几何与面积几何以及静、动力学等内容也体现了其贯通性和统一化。

(3) 本教程中内容的阐述方法不囿于一种模式。对于基本概念的提高和分析计算模型的建立等一类不易理解的内容,采用从特殊到一般的方法论述;对于有关力学的理论分析和推导公式等一类比较严密的数学性较强的内容,则采用从一般到特殊的方法演示,并留下一些内容给读者练习。这种因问题不同而采用不同的叙述、展开方式既体现了认识论的规律,又有利于培养抽象思维、逻辑推理的能力,还可提高授课的质量和效率。与过去传统教材相比,新教程的起点是提高了。

(4) 本教程刻意加强了工程概念、实验和上机计算等实践性内容,并增添了一些现代知识、实验技术和教学软件(本教程各门课的计算程序集中在“工程力学教程计算软件”光盘内),以便强化学生的工程应用、创造性思维和动手能力,提高学生的综合素质。

本教程的编写工作是由河海大学国家力学教学基地的教师们合作分工完成,并由主编统一协调定稿的。各模块的编者分别为:《静力学基础》为武清玺和陆晓敏;《动力学基础》为武清玺、许庆春和赵引;《材料力学》为徐道远、黄孟生、朱为玄和王向东;《结构静力学》为蔡新和孙文俊;《结构动力学》为张子明、杜成斌和江泉;《弹性力学基础》为陈国荣;《计算力学基础》为杨海霞、章青和邵国建。本教程由卓家寿、孙文俊和张子明任主编。

本教程由教育部基础力学课程指导小组组织专家评审,参加审稿的专家有胡增强教授、王鑫伟教授、赵光恒教授、余颖禾教授、单建教授等。以上专家们提出的宝贵审稿意见,为本书的修改起了重要的指导作用。特别要提出的是教育部基础力学课程指导小组组长范钦珊教授多次审阅了本书稿,提出了指导性的意见,为本书的定稿起了很大的作用。在此特向他们致以诚挚的谢意。

由于水平所限、时间匆忙,书中肯定存在不少缺陷和差错,敬请读者不吝指正。

卓家寿 孙文俊 张子明

2001年8月

前 言

本书为河海大学推出的面向 21 世纪力学系列课程教材——《工程力学教程》之四,是在河海大学“国家工科基础课程(力学)教学基地”,及河海大学“面向 21 世纪力学系列课程改革小组”审定的“《结构静力学》编写大纲”编写的校内试用教材的基础上修订而成的。原试用教材已经专家评审并在校内正式使用,这次修订充分考虑和采纳了专家和校内师生的意见,在此谨致谢意。

根据我校面向 21 世纪力学系列课程改革的总体思路,本书对传统结构力学内容作了较大调整。首先,将“静定结构内力计算”归入新编的《静力学基础》一书中,本书仅作简要回顾;其二,将“矩阵位移法”纳入新编的《计算力学基础》一书中,本书不加讨论;其三,将“力矩分配法”、“近似法”分别作为一节放入“位移法”一章中,不单独设章。本书在选材上既注重加强基础理论又强调结合实际应用,例如全面阐述了虚功原理及其应用,简介了能量原理及能量法;又如对超静定结构的解法和结构的计算简图作了补充讨论,增设了厂房结构计算大作业等。本书还在内容的叙述上注意与其他系列力学课程的衔接和贯通。此外,为了继续培养学生应用计算机进行力学计算的能力,还给出了绘制连续梁影响线的电算程序(光盘)。

参加本书编写的有蔡新[第二、三、四、五章(部分),附录 A、B],孙文俊(第一、六章,附录 B),唐建民[第二、五章(部分),附录 A]。硕士研究生杨建贵编制了附录 B 的计算程序并作算例,硕士研究生方忠强参加了本书稿的校稿工作,硕士研究生杨付权参加了习题解答工作。全书由蔡新统稿编成。

本书稿主要参考本校结构力学教研室老师历年编写的教材,并吸取了其他同类教材的精华,还融入了作者多年教学、科研实践的经验体会,力争贴近时代,贴近工程实际。即使如此,限于时间及作者水平,不妥和谬误之处仍不可避免,诚请读者不吝赐教。

编 者

2001 年 8 月

目 录

第一章 绪 论

§ 1-1 结构力学的研究对象和任务	(1)
§ 1-2 结构的计算简图和分类	(3)
§ 1-3 平面体系的几何组成分析	(6)
§ 1-4 静定结构内力计算回顾	(12)
思考题	(17)
习 题	(17)

第二章 虚功原理和结构的位移计算

§ 2-1 概 述	(21)
§ 2-2 外力虚功与虚变形功	(23)
§ 2-3 虚功原理	(28)
§ 2-4 虚位移原理与单位位移法 静定结构反力(内力)计算的一般公式	(32)
§ 2-5 虚力原理与单位荷载法 结构位移计算的一般公式	(34)
§ 2-6 荷载作用下结构的位移计算	(36)
§ 2-7 图乘法计算结构的位移	(40)
§ 2-8 支座移动与温度改变时的位移计算	(46)
§ 2-9 线性变形体系的互等定理	(48)
思考题	(51)
习 题	(52)

第三章 力 法

§ 3-1 超静定结构的一般概念	(58)
§ 3-2 力法的基本原理	(60)
§ 3-3 力法的基本未知量、基本系和典型方程	(62)
§ 3-4 力法计算超静定结构举例	(65)
§ 3-5 支座移动与温度改变时的内力计算	(75)
§ 3-6 超静定结构位移计算与力法计算校核	(78)
§ 3-7 力法简化计算——对称性利用	(82)
§ 3-8 力法计算超静定拱	(85)
§ 3-9 超静定结构的特性	(97)
§ 3-10 等截面直杆的转角位移方程	(98)
思考题	(104)
习 题	(105)

第四章 位移法

§ 4-1 位移法的基本原理	(110)
§ 4-2 位移法的基本未知量、基本系和典型方程	(114)

§ 4-3 位移法计算举例	(118)
§ 4-4 混合法的概念	(127)
§ 4-5 力矩分配法	(128)
§ 4-6 对称性利用	(136)
§ 4-7 近似法	(139)
思考题	(146)
习 题	(148)
第五章 影响线及其应用	
§ 5-1 移动荷载与影响线的概念	(152)
§ 5-2 静力法绘制静定梁的影响线	(153)
§ 5-3 间接荷载作用下的影响线	(159)
§ 5-4 机动法作静定梁影响线	(161)
§ 5-5 连续梁影响线	(164)
§ 5-6 桁架影响线	(166)
§ 5-7 影响量的计算	(168)
§ 5-8 最不利荷载位置确定	(170)
§ 5-9 包络图	(175)
§ 5-10 简支梁的绝对最大弯矩	(178)
思考题	(182)
习 题	(182)
第六章 超静定结构补充讨论	
§ 6-1 超静定结构计算方法的讨论	(188)
§ 6-2 超静定结构基本解法的推广与联合应用	(190)
§ 6-3 结构计算中的能量法	(197)
§ 6-4 结构计算简图的补充讨论	(202)
习 题	(205)
附录 A 单层工业厂房结构计算作业	(208)
附录 B 连续梁影响线计算分析程序(源程序见光盘)	(213)
部分习题答案	(218)
参考文献	(224)

本章介绍了结构力学的研究对象和任务,着重讨论了结构的力学计算简图的选取和平面体系的几何组成分析,这些内容是对结构进行力学分析首先需要解决的问题。

静定结构的内力计算和内力图的绘制是本课程的重要基础,本章作了必要的回顾,学者应很好复习、熟练掌握。

绪 论

§ 1-1 结构力学的研究对象和任务

§ 1-2 结构的计算简图和分类

一、结构的计算简图

二、杆件结构的分类

§ 1-3 平面体系的几何组成分析

一、自由度和计算自由度

二、几何不变体系的组成法则

三、几何组成分析举例

§ 1-4 静定结构内力计算回顾

一、几何组成与静定性的关系

二、静定结构的一般分析方法

三、静定结构的特性

思考题

习 题

§ 1-1 结构力学的研究对象及任务

各类工程建筑物,例如房屋、桥梁、码头、闸门、水坝等,在使用中都要承受各种荷载(如自重、风压力、水压力、货物等)的作用。建筑物中支承荷载而起骨架作用的部分称为结构(structure)。一根梁、一个柱等单个构件是最简单的结构。一般的结构都是由许多构件通过各种方式互相联结在一起而组成的。例如图 1-1 所示的厂房结构,就是由屋架、柱子、吊车梁及基础等组成的空间体系。

结构按其构件的几何形态可分为三类:

(1) **杆件结构**(framed structures) 此类结构由杆件组成。杆件的几何特征是横截面尺寸要比长度小得多,如图 1-1 所示。

(2) **板壳结构**(slab and shell structures) 此类结构由厚度远小于其长度和宽度的板或壳组成,所以也称为薄壁结构。例如楼板、薄拱坝等。

(3) **实体结构**(massive structures) 此类结构在三个方向上的尺度大致为同一量级。例

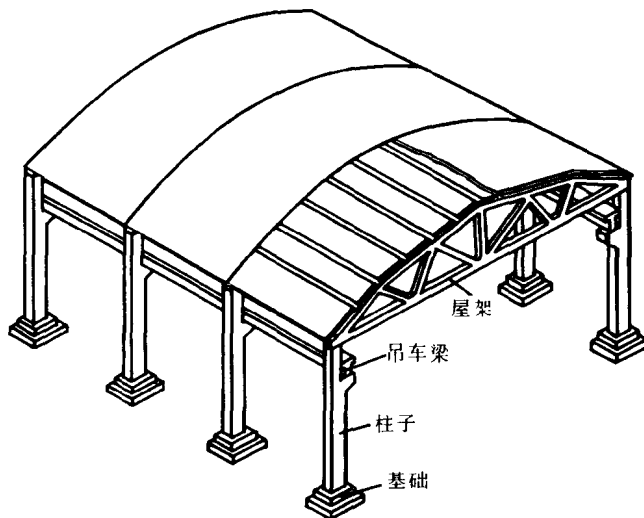


图 1-1 厂房结构

如挡土墙、重力坝等。

杆件结构可分为**平面结构**(plane structure)和**空间结构**(space structure)。在平面结构中,各杆的轴线和荷载的作用面在同一平面,否则,便是空间结构。结构静力学,通常也简称为**结构力学**(structural Mechanics),其研究对象是杆件结构,本书只限于研究平面杆件结构的静力计算问题。

结构力学的任务是研究杆件结构的组成规律和合理形式以及结构在荷载等外因作用下产生的内力和位移的计算方法,为结构的强度、刚度和稳定性设计服务。

结构力学与理论力学和材料力学既有联系又有区别。理论力学着重研究物体机械运动的基本规律;材料力学着重研究单根杆件的强度、刚度和稳定性的计算;而结构力学的研究对象则为杆件组成的体系。结构力学是一门重要的技术基础课程。掌握了结构力学的原理和方法,不仅可计算结构中的内力、位移等数据,而且可以对结构的受力性能,优缺点等问题有深入的认识,从而能对工程中有关问题作出正确的判断;并为学习后继课程,如钢木结构、钢筋混凝土结构、水工结构等专业课程以及弹性力学(主要研究板壳与实体结构)等力学课程,提供必要的力学基础。

本书主要介绍结构力学中最基本的计算原理和计算方法,这些内容是解决一般常用结构的静力计算问题所必需的。根据结构的组成和计算方法的不同,杆件结构又分为**静定结构**(statically determinate structures)和**超静定结构**(statically indeterminate structures),由于静定结构的计算只需要应用静力平衡条件,所以本工程力学系列课程将这部分内容归入《静力学基础》课程之中,本课程主要讨论超静定结构的计算。此外,结构力学现代发展的矩阵分析方法已并入《计算力学基础》课程中,本教材也不涉及这方面内容。

§ 1-2 结构的计算简图和分类

一、结构的计算简图

在静力学基础中已经指出实际结构是很复杂的,完全按照结构的原始情况进行力学分析是不可能的,也是不必要的。因此,对实际结构进行力学计算之前,必须加以简化。略去不重要的细节,抓住其基本特点,用一个简化的图形(理想模型)来代替实际结构。这种图形叫做结构的计算简图。

计算简图的选取原则是:

- (1) 尽可能正确反映实际结构的主要力学性能,以使计算结果可靠、准确。
- (2) 必须抓住主要矛盾,忽略次要因素,力求计算简便。

结构中力学性能有关的因素主要有:结构的几何轮廓及尺寸,材料性质,各杆件之间的联结方式,杆件与基础的联结方式等。选择计算简图时,应考虑以上各方面的简化。此外,还要考虑作用在结构上的荷载的简化。

在静力学基础中,对结构杆件、支座、结点的简化已作过讨论。常见的支座简图有四种:辊轴支座(如图 1-2)、铰支座(如图 1-3)、滑移支座(如图 1-4)和固定支座(如图 1-5)。读者应该熟悉它们的表示和相应的约束反力。

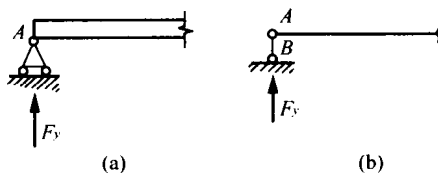


图 1-2 辊轴支座

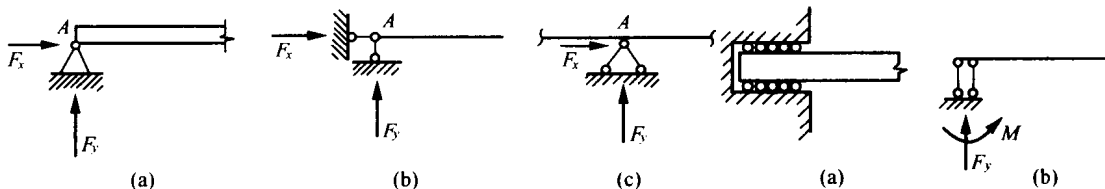


图 1-3 铰支座

图 1-4 定向支座

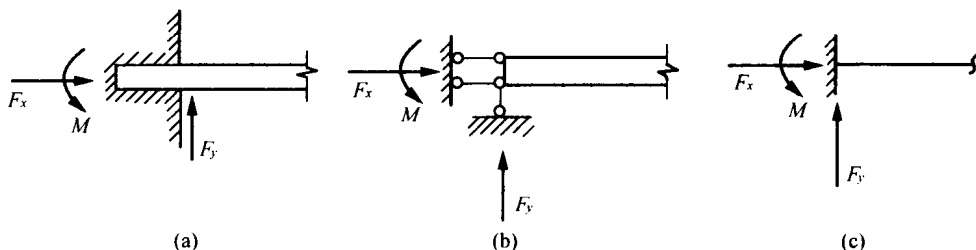


图 1-5 固定支座

常见的结点简图有铰结点如图 1-6 及图 1-8 中的 C 结点、刚结点如图 1-7 及图 1-8 中的 A 结点和 B 结点以及组合结点如图 1-8 中的 D 结点,要明确它们各自的特点。

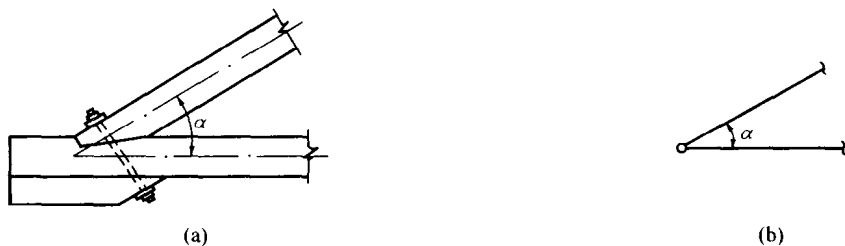


图 1-6 铰 结 点

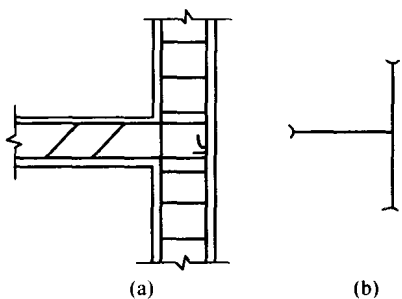


图 1-7 刚 结 点

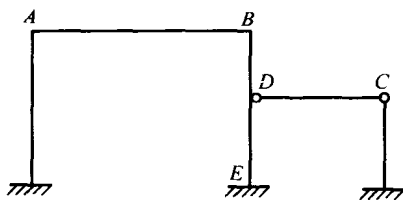


图 1-8 组 合 结 构

关于结构材料的性质,本书与材料力学一样,将物体视为变形体,并假设为连续、均匀、各向同性和完全弹性的。这一假设对金属材料在一定受力范围内是符合实际情况的;对于混凝土、钢筋混凝土、砖、石等材料带有一定程度的近似性。而木材则应注意其顺纹和横纹两个方向性质不同的特点。

关于荷载一般指主动作用于结构上的外力,如自重、水压力等,广义荷载还包括结构受到的温度变化、支座移动、材料收缩等因素。荷载的确定很重要又较复杂,通常将长期作用于结构的不变荷载称为**恒载**(dead loads),如自重、土压力;而将暂时作用于结构的短期荷载和位置可变的移动荷载称为**活载**(live loads),如风荷载、堆货、吊车荷载;缓慢加到结构上的荷载称为**静荷载**(static loads);快速加到结构上的荷载,引起不容忽略的惯性力则为**动荷载**(dynamic loads)。本教材只讨论静力荷载下的计算问题,不论何种荷载,在杆件结构计算中都可以简化为作用在杆件轴线上的力。当荷载作用范围大大小于杆长时,可简化为集中力,如车辆轮压等,否则即为分布荷载。

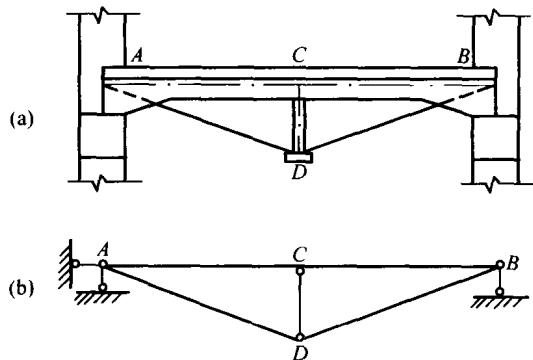


图 1-9 吊车梁及其简图

下面用一个简单例子来说明选取计算简图的方法。

图 1-9(a)所示为工业建筑中采用的一种桁架式组合吊车梁,横梁 AB 和竖杆 CD

由钢筋混凝土做成,但 CD 杆的截面面积比 AB 梁的截面面积小很多。斜杆 AD 、 BD 则为 16 锰圆钢。吊车梁两端由柱子上的牛腿支承。

支座简化: 由于吊车梁的两端仅通过较短的焊缝与柱子牛腿上的预埋钢板相联,这种构造对吊车梁支承端的转动不能起多大的约束作用,又考虑到梁的受力情况和计算的简便,所以梁的一端可简化为铰支座而另一端则简化为辊轴支座。

结点简化: 因 AB 是一根整体的钢筋混凝土梁,截面较大,故在计算简图中, AB 取为连续杆;而竖杆 CD 和钢拉杆 AD 、 BD 与杆件 AB 相比,截面都较小,它们基本上都只承受轴力,故 CD 、 AD 、 BD 的两端都可看作是铰结,其中 C 铰联在 AB 的下方。

再用各杆件的轴线代替各杆件,则得图 1-9(b)所示的计算简图。图中 A 、 B 、 D 为铰结点, C 为组合结点。这个简图保证了主要杆件横梁 AB 的受力性能(有弯矩、剪力和轴力);对其余三杆,保留了主要内力为轴力这一特点,而忽略了较小的弯矩和剪力的影响。对于支座,保留了主要的竖向支承作用,忽略了转动约束的作用。实践证明,分析时取这样的计算简图是合理的,它既反映了结构的变形和受力特点,又能使计算比较简单。

图 1-10 ~ 图 1-13 给出了其他一些结构的计算简图。在后面的章节中还将说明从某些实际结构到计算简图的简化过程。在最后一章还要对计算简图作补充讨论。

二、杆件结构的分类

在静力学基础中,我们已经知道杆件结构按其受力性能可分为以下几类: 梁(如图 1-10)、拱(如图 1-11)、刚架(如图 1-12)、桁架(如图 1-13)和组合结构(如图 1-9)等。应能正确区分各类结构、识别受弯杆还是桁杆。

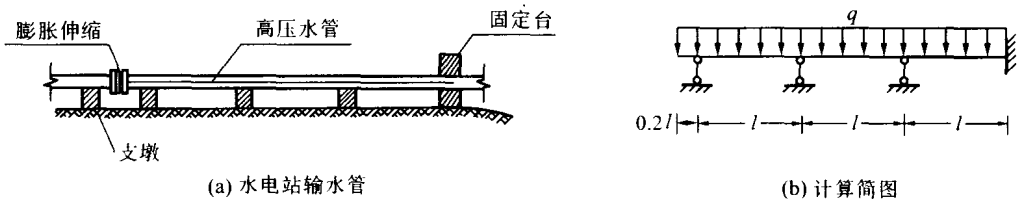


图 1-10 水电站输水管及其计算简图

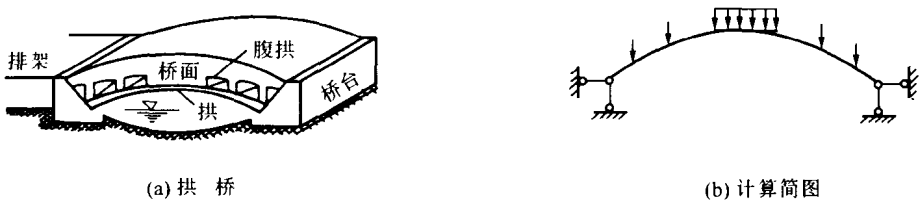


图 1-11 拱桥及其计算简图

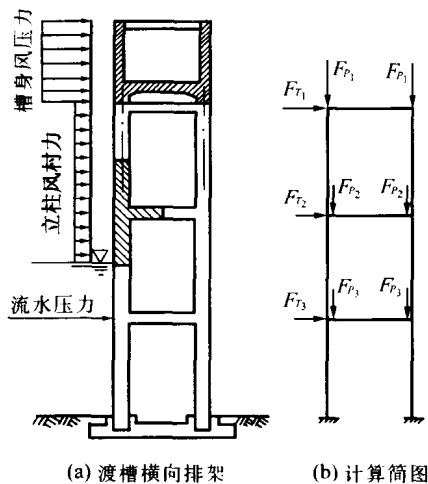


图 1-12 渡槽横向排架及其计算简图

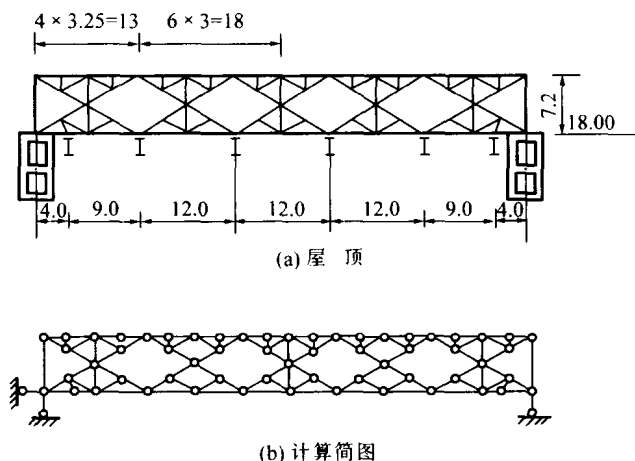


图 1-13 屋顶及其计算简图(单位长度为 m)

§ 1-3 平面体系的几何组成分析

杆件结构是由若干杆件互相联接所组成的体系,并与地基联接成一整体,用来承受荷载的作用。体系受到任意荷载作用后,在不考虑材料应变的条件下,若能保持其几何形状和位置不变者,称为**几何不变体系**(geometrically stable systems),如图 1-14(a)所示即为这类体系的一个例子。可是另有一类体系,如图 1-14(b)所示的例子,尽管只受到很小的荷载 F_P 作用,也将引起几何形状的改变,这类体系称为**几何可变体系**(geometrically unstable systems)。显然,结构必须是几何不变的,几何可变体系是不能作为结构来采用的。



图 1-14 平面杆件体系

对体系几何组成的性质和规律进行的分析称为**几何组成分析**(geometric constitution analysis or kinematic analysis)。作这种分析的目的在于:判别某一体系是否几何不变,从而决定它能否作为结构;研究几何不变体系的组成规则,以保证所设计的结构能承受荷载而维持平衡;同时也为正确区分静定结构和超静定结构以及进行结构的内力计算打下必要的基础。

本书只讨论平面杆件体系的几何组成分析。

一、自由度和计算自由度

1. 自由度

一个点在平面内,可有两种独立的运动方式。例如图 1-15(a)中 A 点到 A' 点位置可以分解为水平和竖直两个方向的独立运动,或者说,一个点在平面内的位置需由两个独立坐标来确定。如 A 点坐标为 (x, y) , A' 点坐标为 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 。因此,我们说一个点在平面内具有两个自由度(degrees of freedom)。

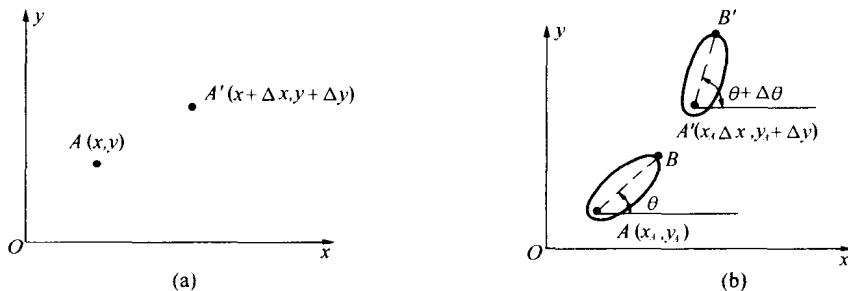


图 1-15 点和刚片的位置

一个刚片在平面内可有上下、左右两个方向移动和绕某点转动三种独立运动方式。例如图 1-15(b)中刚片 AB 到 $A'B'$ 位置的运动,或者说,它在平面内的位置需由三个独立坐标来确定。如 AB 的坐标 (x_A, y_A, θ_A) 和 $A'B'$ 位置的坐标 $(x_A + \Delta x, y_A + \Delta y, \theta_A + \Delta \theta_A)$ 。因此,我们说一个刚片在平面内有三个自由度。

一般说,一个体系有几个独立运动方式,即有几个自由度。换句话说,一个体系的自由度等于这个体系运动时可以独立改变的坐标数目或确定该体系位置所需的独立坐标数目。凡是自由度没有全部受到约束的体系,即有自由度的体系都是几何可变体系。

2. 约束

对运动起限制作用的装置称为约束(constraints or restrains)。显然,约束能减少体系的自由度,能减少一个自由度的装置相当于一个约束。例如图 1-16(a)用一根链杆将刚片与基础相连,则刚片将不能沿链杆方向移动,减少了一个自由度,故一根链杆相当于一个约束。如果再加一根链杆如图 1-16(b),则刚片又减少了一个自由度,此时,它就只能绕 A 点作转动而丧失了自由移动的可能。这两根链杆实际上是一个铰支座,因此一个铰支座相当于两个约束,即相当于两根链杆的约束。又如用一铰将两刚片在 A 点相连如图

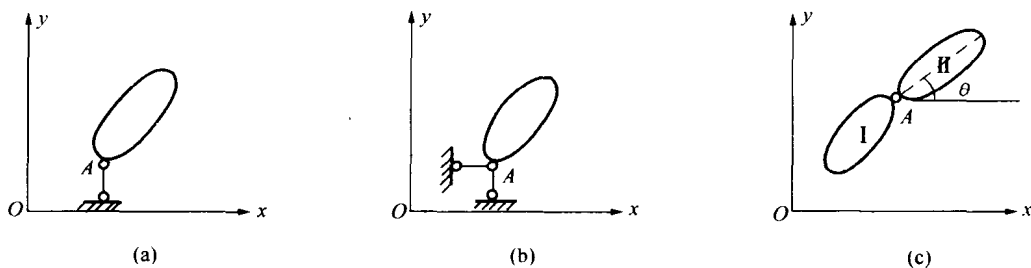


图 1-16 约束

1-16(c), 那么, 刚片 I 仍有三个自由度, 而刚片 II 因 A 点位置随刚片 I 的位置而定, 只保留了绕 A 转动的一个自由度, 故体系的总自由度从 $2 \times 3 = 6$ 个变为 4 个, 减少了两个。故一个单铰(联结两个刚片的铰)相当于两个约束, 也相当于两根链杆的约束作用。反之, 两根链杆也就相当于一个单铰的作用。当两刚片在 A 点刚接起来(即加一刚结点), 那么两刚片变成了一个刚片, 只有 3 个自由度, 故刚性连接相当于 3 个约束。类似地, 固定支座也相当于 3 个约束。

下面对两个链杆约束相当于一个铰的情况作进一步讨论。如图 1-17 所示, 若将刚片 I 和 II 用两根不平行的链杆 AB 和 CD 联结, 设刚片 I 固定不动, 则 A、C 两点将为固定; 当刚片 II 运动时, 其上 B 点将沿与 AB 杆垂直的方向运动, 而其上 D 点则沿与 CD 杆垂直的方向运动, 故刚片 II 运动时将绕 AB 与 CD 两杆延长线的交点 O 而转动。同理, 若刚片 II 固定不动, 则刚片 I 也将绕 O 点而转动。我们称 O 点为刚片 I 和 II 的相对转动瞬心。此情形就像把刚片 I 和 II 用圆柱铰在 O 点相联结的情形一样, 这进一步证实了**两根链杆的作用相当于一个铰**。不过现在这个铰的位置是在链杆的轴线延长线上, 且其位置随链杆的转动而改变, 与一般的铰(称为实铰)不同, 所以把这种铰称为虚铰或瞬铰。

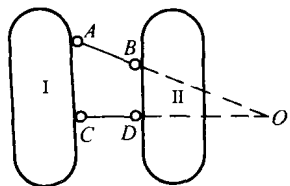


图 1-17 刚片的联系

一个平面体系, 通常都是若干个刚片加入某些约束所组成的。加入约束的目的是为了减少体系的自由度。如果在组成体系的各刚片之间恰当地加入足够的约束, 就能使刚片与刚片之间不可能发生相对运动, 从而使该体系成为几何不变的体系。但是, 当增加的约束并没有减少体系的自由度, 则称该约束为多余约束。例如在图 1-16(b) 的 A 点再加一链杆, 则此链杆并没有进一步减少刚片的自由度, 故它为多余约束。一个体系尽管有了足够数量的约束, 但由于约束安排不当, 体系仍可能是几何可变的。

3. 计算自由度

由以上的讨论可知平面体系的自由度 N 可按式计算

$$N = \text{各刚片的自由度总和} - (\text{全部约束数} - \text{多余约束数})$$

因为要预先确定多余约束个数一般是困难的, 故通常先计算体系的计算自由度 W :

$$W = \text{各刚片的自由度总和} - \text{全部约束数}$$

对于平面一般体系, 设刚片数为 m , 单铰数为 h , 支座链杆数为 r ,

则

$$W = 3m - 2h - r$$

当体系中有复铰(联系两个以上刚片的铰)时应折算成相当数目的单铰计算。

对于全部由链杆组成的铰接体系, 设铰结点总数为 j , 内部链杆数为 b , 支座链杆数为 r , 则

$$W = 2j - b - r$$

当体系有多余约束时, 计算自由度数并不等于自由度数。而计算自由度 $W \leq 0$ 并不代表自由度 $N = 0$, 即不能保证体系是几何不变的。也就是说, $W \leq 0$ 只是体系几何不变的必要条件, 因此, 为了确定体系的几何不变性还必须研究几何不变体系的组成规律。

二、几何不变体系的组成法则

下面讨论无多余约束的几何不变体系的基本组成规律。

1. 三刚片法则

三个刚片用不在同一直线上的三个铰两两相联,则所组成的体系是几何不变的。

如图 1-18(a)所示,刚片 I、II、III 用不在同一直线上的 A、B、C 三个铰两两相联。若将刚片 I 固定不动(例如看做是基础),则刚片 II 将只能绕 A 点转动,其上 C 点必在半径为 AC 的圆弧上运动,而刚片 III 则只能绕 B 点转动,其上 C 点又必在半径为 BC 的圆弧上运动。因 C 点不可能同时在两个不同的圆弧上运动,故知各刚片之间不可能发生相对运动,所以这样组成的体系是几何不变的。

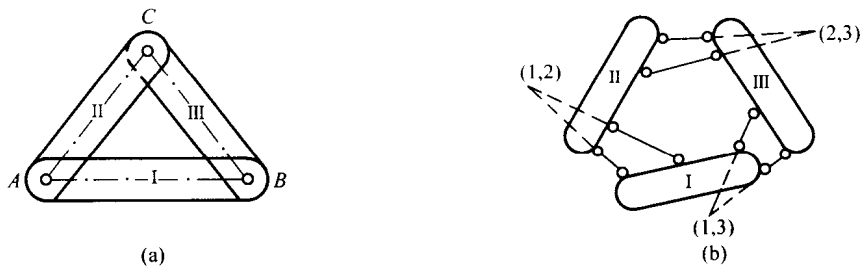


图 1-18 三刚片体系

由于两根链杆的作用相当于一个铰,故可将任一个铰换为两根链杆所构成的虚铰,只要三个虚铰不共线,便可知,如图 1-18(b)所示的体系也是几何不变的。

三刚片法则(rule of three rigid body)也可称为三角形法则,它是最基本的组成法则,下面两个组成法则可以从它演变而得。

值得指出,三刚片法则中有个限制条件,即要求三个铰(实铰或虚铰)不在同一直线上。否则,若像图 1-19 所示的三个铰共线的体系,将是一种特殊的几何可变体系。此时 C 点位于以 AC 和 BC 为半径的两个圆弧的公切线上,故在这一瞬间, C 点可沿此公切线作微小的移动,不过在发生一微小移动后,三个铰就不再位于一直线上,运动也就不再发生。这种在某一瞬时可以产生微小运动的体系,称为瞬变体系,它是几何可变体系的一种特殊情况。

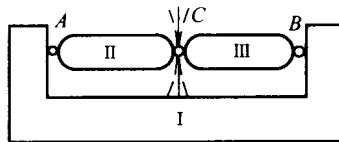


图 1-19 三铰共线体系

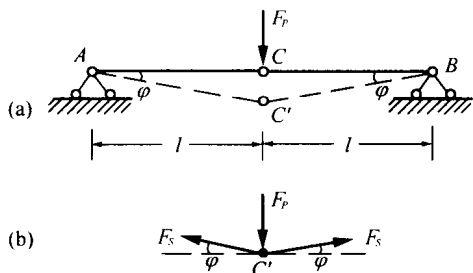


图 1-20 瞬变体系

虽然瞬变体系看来只在某一瞬时产生微小的相对运动,随后即成为几何不变的,但是,进一步考察其受力情况则将发现,即使是在很小的荷载作用下,其内力也会接近无穷大。如图 1-20(a)所示瞬变体系,设外力 F_P 作用于 C 点,由图 1-20(b)所示脱离体的平衡条件 $\sum F_Y = 0$ 可得

$$F_S = \frac{F_P}{2 \sin \varphi}$$

因为 φ 为一无穷小量,所以

$$F_S = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{F_P}{2 \sin \varphi} = \infty$$