与人教版·全日制普通高级中学教科书（试验修订本·必修）·同步配套

新教材导学

（高中二年级·下学期用）

数学

第二册（下）

新教材研究室　编著

SHUXUE

中央民族大学出版社

与人教版·全日制普通高级中学教科书(试验修订本·必修)同步配套

新教材导学

◉高中二年级·下学期用◉

数学

第二册(下)

新教材研究室 编著

顾　问 费孝通
策　划 张正武
主　编 刘锐诚

本册主编 刘风兰
本册编者 刘风兰 雷英俊
王振国 刘国英
王凤媛

中央民族大学出版社

责任编辑：宁　玉
封面设计：燕儿飞
责任校对：陈长元　牛红玲　李福利

图书在版编目(CIP)数据

新教材导学·高二数学/刘锐诚主编．-北京：中央民族大学出版社，2002.8
ISBN 7-81056-664-4

Ⅰ.新… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学课-高中-教学 参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 053515 号

新教材导学(高中卷)

出 版 者：中央民族大学出版社
中国北京市海淀区白石桥路 27 号　邮编：100081
电话：68472815　68932751　传真：68932447
印 刷 者：北京市朝阳区飞达印刷厂
发 行 者：新华书店
开　　本：890×1194(毫米)　1/16　印张：5.75　字数：156 千字
版　　次：2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-81056-664-4/G·155
印　　数：1-5000 册
全套定价：243.90 元(本册定价：6.80 元)

开卷有益
创新求实

费孝通

二〇〇一年六月

前　言

《新教材导学》丛书是配套2000年秋季开始正式使用的人教版最新初、高中教材而编写的辅导与练习丛书。本丛书较好地体现了最新大纲的精神，而且与最新教材的内容和进度同步，既重视了基础知识和基本技能的落实，又照顾到了优等生拓宽拔高的特殊需要。整套丛书的编写强调了科学性与实用性的统一，旨在帮助学生掌握系统的基础知识，训练有效的学习方法，培养思维能力、应用能力和创新能力，全面提高学生的综合素质。

本书《数学·新教材导学》(第二册·下)主要分为“知识精讲”和“能力训练”两大部分。

一、“知识精讲”主要有三个栏目：

【重点难点】 是将本小节内容的重点和难点指出，并指出处理他们的关键所在。

【学法指导】 是将本小节所涉及到的内容、方法、定理、公式、概念等加以梳理，特别是对易错的概念、公式等加以讲评。

【巧学妙思】 主要是解决本小节内容与以往所学知识之间的联系，以及各类题型的处理方法，选择有代表性的题目做例题(有些是历年的高考试题)，进行分析、讲解，给出处理各类题型的方法、技巧，使学生的思维能力有所提高。

二、“能力训练”主要有两个栏目：

【双基过关】 提供有选择题、填空题、解答题三大类型的题，可供教师课堂上检查教学落实的情况，也可用于学生课后练习，以巩固本节内容。题型全、题目新，且大部分是基础题，符合大纲规定的教学要求的水平。

【拔高挑战】 一般配备两个习题，是本学科的综合性习题，其中有一个题以实际应用为主。本部分为学有余力的同学提供了一个提高分析能力、解题能力的机会，以期达到激发兴趣、培养能力、开发智力的目的。

各章综合检测试题以及期中和期末综合检测试题采用标准题型，便于学生进行阶段自测和考前热身。

书后集中附有训练题和检测题的参考答案及解题思路点拨，便于练习后及时反馈；也可将答案预先统一撕掉，以供老师们在课堂上统一讲用。

参加本书编写工作的全部人员都是亲自教过这套新教材（实验本）而且教学成绩优秀的教师，他们把教学这套新教材中的丰富经验融入了本书的编写工作中，更增加了本

书的实用性和科学性。

我们真诚地希望本丛书能成为广大新教材学习者的良师益友，同时也恳请广大师生批评指正。

编　者

2002 年 7 月

目　录

第九章

直线、平面、简单几何体

第一部分　空间直线和平面

§9.1　平　面

知　识　精　讲

【重点难点】

重点是平面的基本性质及其数学符号语言形式.难点是对平面的基本性质的理解.

【学法指导】

1. 平面

平面是一个只描述而不定义的最基本的概念,但数学中所说的平面在空间是无限延展的.

注意:

(1)对于平面的无限延展性,可联系直线是无限延伸的去理解.

(2)一个平面把空间分成两部分.

2. 平面的画法

当从适当的角度和距离观察桌面时,感到它们都很像平行四边形.因此,通常画平行四边形来表示平面.

注意:

(1)所画的平行四边形表示它所在的整个平面,需要时可把它延展出来.有时根据需要也用其他平面图形(如三角形等)表示平面.

(2)当平面是水平放置时,通常把平行四边形的锐角画成$45°$,横边画成邻边的2倍长.画直立平面时,要有一组对边为铅垂线.

(3)当一个平面的一部分被另一个平面遮住时,应把被遮部分的线段画成虚线或不画,这与平面几何中添加的辅助线应画成虚线不同.

3. 平面的表示方法

平面通常用一个希腊字母α、β、γ等来表示,如平面α,平面β,平面γ等;也可用表示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示,如平面AC.

4. 平面的基本性质

公理1: 如一条直线上的两点在一个平面内,则这条直线上所有的点都在这个平面内.

注意:

(1)这时说直线在平面内,或说平面经过直线.

(2)公理1的数学符号表示:$A\in l$,$B\in l$,$A\in\alpha$,$B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$.

(3)"$\in$"、"$\subset$"是借用集合中符号,读法上仍用几何语言.

(4)点A不在l上,点A不在平面α内,直线l不在平面α内分别表示为:$A\overline{\in} l$,$A\overline{\in}\alpha$,$l\not\subset\alpha$.

公理2: 如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他公共点,且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.

注意:

(1)对于不重合的两个平面,只要它们有公共点,它们就是相交的位置关系,交集是一条直线.

(2)符号表示:$P\in\alpha\cap\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l$且$P\in l$.

公理3: 经过不在同一条直线上的三点,有且只有一个平面.

注意:

(1)过一点、两点或一直线上三点都可以有无数个平面,过不在同一直线上的四点不一定有平面.

(2)"有"是说明图形存在,即存在性;"只有一个"说明图形惟一,即惟一性.本公理强调的是存在和惟一两方面,因此"有且只有一个"必须完

整地使用,不能仅有"只有一个"来代替"有且只有一个",否则就未表达存在性.

(3)符合某一条件的图形既然存在且只有一个,说明图形是确定的.因此"有且只有一个"和"确定"是同义词.

(4)过 A、B、C 三点的平面又可记为"平面 ABC".

推论1:经过一条直线和这条直线外的一点,有且只有一个平面.

符号表示:$A\notin a\Rightarrow$ 有且只有一个平面 α,使 $A\in\alpha$,$a\subset\alpha$.

推论2:经过两条相交直线,有且只有一个平面.

符号表示:$a\cap b=P\Rightarrow$ 有且只有一个平面 α,使 $a\subset\alpha$,$b\subset\alpha$.

推论3:经过两条平行直线,有且只有一个平面.

符号表示:$a\parallel b\Rightarrow$ 有且只有一个平面 α,使 $a\subset\alpha$,$b\subset\alpha$.

5. 平面的基本性质小结:

名　　称	作　　用
平面基本性质1(公理1)	判定直线在平面内的依据
平面基本性质2(公理2)	两个平面相交的依据
平面基本性质3(公理3及推论)	空间确定平面的依据

【巧学妙思】

1. 平面基本性质的简单应用

利用平面的基本性质可以解决一些基本判断与填空题,注意公理1~3及推论1~3成立的前提条件.

[例1]判断正误:

①三点确定一个平面.

②一条直线和一个点确定一个平面.

③若四点不共面,则每三点一定不共线.

④凡是四边形都是平面图形.

⑤如果两个平面有三个公共点,那么这两个平面重合.

⑥三条线段组成的折线一定共面.

分析:

①错(应不共线三点).②错(应线外一点).③对(其逆否命题为:若三点共线,则四点共面).④错(有空间四边形).⑤错(可以相交).⑥错(可能不共面).

[例2]填空题:

①三条直线两两相交,能确定____个平面.

②四条直线两两相交,每两条相交直线确定一个平面,共确定平面的个数是____.

③空间不共面5个点,其中有4个点在同一平面内,据公理3它们最多确定平面个数是____.

分析:

①1个或3个.(当三条线共面时为1个平面,当三条直线两两确定一个平面时,可确定3个平面).

②1或4或6(1个或6个同上,当三条线共面时,第四条直线与它们分别确定三个平面,共确定4个平面).

③最多为7个.

2. 如何证明几条线交于一点?几条线共面?(简称共点线与 共面线问题)

(1)证明几条线交于一点,一般是由两条线找出一个交点,再证明此点在其他线上.证明此点在其他线上的方法,通常用公理2.

(2)证明几条线共面,一般先由空间确定平面的条件(公理3及推论)作一平面;再证其余的线在此面内.若能证明直线上有两点在面内,则用公理1,说明直线在面内;若只能证明直线上一点在面内,一般情况则用反证法证明此线在面内.

[例3]已知如图9-1,四边形 $EFGH$ 的四个顶点分别在空间四边形 $ABCD$ 各边上,且 EF 不平行 GH,$EH\parallel FG$.求证:EF、DB、HG 三线共点.

分析:

此例属于共点线问题.

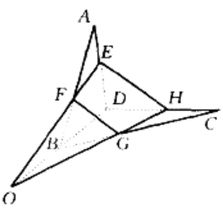

图9-1

证明:

$\because EH\parallel FG$,$\therefore E$、H、F、G 四点共面

又 $\because EF$ 不平行 GH

$\therefore EF$、GH 相交于一点 O

$\because O\in EF$,$EF\subset$ 面 ABD

$\therefore O\in$ 面 ABD　同理 $O\in BCD$,

$\because$ 面 $ABD\cap$ 面 $BCD=BD$

$\therefore O\in BD$,即 EF、DB、HG 三线共点

[例 4]已知 $a // b // c$，d 与 a、b、c 分别相交于 A、B、C 点，如图 9－2 所示．求证：a、b、c、d 共面．

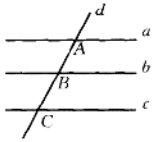
图 9－2

分析：

此例属于共面线问题．

证明：

$\because a // b \quad \therefore a$、$b$ 可确定一个平面 α．

$\because A \in a, B \in b, \therefore A \in \alpha, B \in \alpha$，故 $d \subset \alpha$．

假设 $c \not\subset \alpha$，$\because b // c$

$\therefore$ 过 b、c 再确定一个平面 β，同理可证 $d \subset \beta$．此时 b、d 两相交直线既在 α 内又在 β 内．这与两相交直线确定一个平面矛盾．$\therefore c \subset \alpha$．故 a、b、c、d 共面．

能力训练

【双基过关】

一、选择题(单选)

1．点 P 在直线 a 上，而直线 a 在平面 α 内，可记为 (　　)

A．$P \subset a, a \in \alpha$　B．$P \in a, a \subset \alpha$

C．$P \subset a, a \subset \alpha$　D．$P \in a, a \in \alpha$

2．一直线和直线外不在同一直线上的三点所确定的过该直线的平面有 (　　)

A．1 个　B．2 个　C．3 个　D．至多 3 个

3．已知命题“直线 l 上两点 A、B 在平面 α 内”，那么与此命题不等价的命题是 (　　)

A．$l \subset \alpha$

B．平面 α 过直线 l

C．直线 l 上只有这两个点在 α 内

D．直线 l 上所有的点都在 α 内

4．三条平行线所确定的平面个数是 (　　)

A．三个　B．两个

C．一个　D．一个或三个

5．空间交于一点的四条直线最多可以确定平面 (　　)

A．4 个　B．5 个

C．6 个　D．7 个

6．空间不共面四点，确定平面 (　　)

A．1 个　B．2 个

C．3 个　D．4 个

7．空间三个平面如果每两个都相交，那么它们的交线的条数是 (　　)

A．一条　B．两条

C．三条　D．一条或三条

8．三个平面将空间分成的部分为 n，则 n 的值为 (　　)

A．4　B．4、6

C．4、6、7　D．4、6、7、8

二、填空题

9．三条直线可以确定三个平面，这三条直线的公共点数是_____个．

10．三角形、四边形、正六边形、圆，其中一定是平面图形的有_____个．

11．直线 $l_1 // l_2$，l_1 上取三点，l_2 上取两点，由这五个点能确定平面_____个．

12．AB、$AD \subset \alpha$，CB、$CD \subset \beta$，$E \in AB$，$F \in BC$，$G \in CD$，$H \in DA$，若直线 EH 与 FG 相交于 P，则 P 点必在直线_____上．

三、解答题

13．求证：两两相交且不共点的四条直线必共面．

14．如图 9－3所示，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，O_1 为上底面的中心，过顶点 A，B_1，D_1 作一平面，此平面与对角线 A_1C 交于 P 点．

求证：P 点必在线段 AO_1 上．

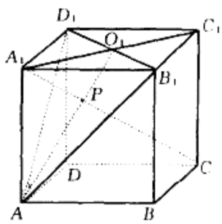
图 9－3

【拔高挑战】

15. 在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N 分别是 AA_1、D_1C_1 的中点，过 D、M、N 三点的平面与正方体的下底面相交于直线 l.

①画出 l 的位置；

②设 $l\cap A_1B_1=P$，求线段 PB_1 的长.

§9.2 空间直线

知识精讲

【重点难点】

异面直线的概念是学生比较生疏的内容，也是本小节的重点和难点.

【学法指导】

1. 空间两条直线的位置关系

在初中几何里已经介绍了空间两条直线有以下三种位置关系：

相交直线—有且仅有一个公共点；

平行直线—在同一平面内，没有公共点；

异面直线—不同在任何一个平面内，没有公共点.

注意：

空间两条不重合的直线有三种位置关系，若从无公共点的角度看，可分为两类：

①有且仅有一个公共点——相交直线；

②没有公共点——$\begin{cases}\text{平行直线,}\\ \text{异面直线.}\end{cases}$

若从是否共面的角度看，也可分为两类：

①在同一平面内——$\begin{cases}\text{相交直线,}\\ \text{平行直线.}\end{cases}$

②不同在任一平面内——异面直线.

2. 平行直线

(1)**公理 4**：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

符号表示：设 a、b、c 为直线，

$$\left.\begin{array}{l}a\parallel b\\ c\parallel b\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel c$$

a、b、c 三条直线两两平行，可以记为 $a\parallel b\parallel c$.

注意：

平行的传递性在初中几何中也讲过，只是当时将直线 a、b、c 限制在同一平面内，本小节中则对此作了推广——a、b、c 可以不共面，而是两两共面.

(2)**等角定理**：如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行且方向相同，那么这两个角相等.

(3)**推论**：如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等.

注意：

①对于平面图形得出的结论，有些可以推广到立体图形，但是，并非所有关于平面图形成立的结论，对于立体图形仍然适用. 因此，一般地说，要把关于平面图形的结论推广到立体图形，必须经过证明.

②今后可用等角定理来证明空间两角相等.

3. 异面直线

(1)异面直线的定义：

把不同在任何一个平面内的两条直线叫异面直线.

注意：

①画在两个平面内的两条直线不一定是异面直线，它们的关系可能有：相交、平行和异面三种情况. 如图 9－4 所示：

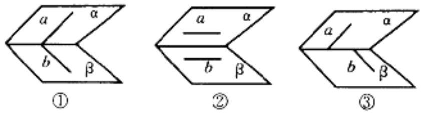

图 9－4

②显然，两条异面直线既不平行又不相交.

(2)异面直线的画法：

利用辅助平面为衬托，突出不共面的特征如图 9－5.

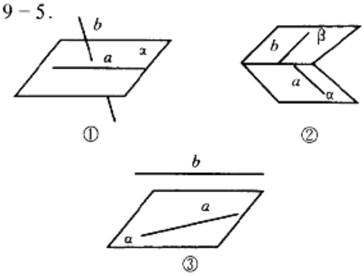

图 9－5

(3)异面直线所成的角：

直线 a、b 是异面直线. 经过空间任意一点 O，作直线 a'，b'，使 $a' \parallel a$，$b' \parallel b$，我们把直线 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a 和 b 所成的角. 如图 9－6：

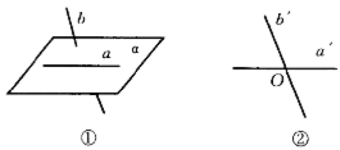

图 9－6

注意：

①这个角的大小与 O 点位置无关，这由等角定理的推论得来的，角的大小只和 a，b 的相对位置有关.

②一般将 O 点选在直线 a 或 b 上.

③通过画平行线的方式，使两条异面直线移到同一平面的位置上，是研究异面直线所成角时使用的方法.

(4)异面直线垂直的概念：

如果两条异面直线所成的角是直角，我们就说这两条异面直线垂直.

注意：

异面直线 a 和 b 互相垂直，也记作 $a \perp b$，此时它们所成角为 $90°$，因此，异面直线所成的角的范围是 $(0°, 90°]$.

(5)两异面直线的距离：

与两异面直线都垂直且相交的直线叫两异面直线的公垂线. 两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段(公垂线段)的长度，叫两条异面直线的距离.

注意：

对于任意两条异面直线，它们的公垂线有且只有一条. 因此，它们的公垂线段也是存在且惟一的. 即：对于任意两条异面直线，它们间的距离是惟一确定的.

【巧学妙思】

1. 如何判断(证明)两直线为异面直线？

(1)用反证法；

(2)用结论：过平面外一点与平面内一点的直线，和平面不经过该点的直线是异面直线.

(3)也可通过找既不平行也不相交的直线来判断两直线为异面直线.

[例 1]选择题

①在空间两条直线都与第三条直线垂直，则此两直线的位置关系是(　　)

A. 平行　B. 相交

C. 异面　D. 以上情况都有可能

②正方体的一条对角线与正方体的棱可组成(　　)对异面直线.

A.2　B.3　C.6　D.12

③与两异面直线都相交的两条直线它们的位置关系是(　　)

A. 异面　B. 相交

C. 平行　D. 异面或相交都有可能

分析：

①在空间垂直于同一条直线的两直线可能平行、相交或异面. 故选 D.

②通过找不平行与不相交的直线共有 6 对异面直

线.选 C.

③与两异面直线都相交的两条直线可能相交或异面.选 D.

[例 2]设 A、B、C、D 为空间四点,且 AB 与 CD 异面,如图 9-7.

试证:① AD 与 BC 异面. ② AC 与 BD 异面.

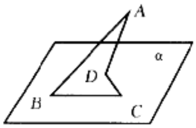

图 9-7

证明:

(反证法)①设 AD 与 BC 共面,则 A、B、C、D 四点在同一平面内. $\therefore AB$、CD 共面这与已知矛盾.

$\therefore AD$、BC 异面.

②同理可证

2. 平行公理及等角定理的应用.

用平行公理可以证明两条直线平行;用等角定理可以证明两个角相等.

[例 3]如图 9-8,两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 的对应顶点的连线 AA'、BB'、CC' 交于同一点 O,且 $\frac{AO}{OA'}=\frac{BO}{OB'}=\frac{CO}{OC'}=\frac{2}{3}$

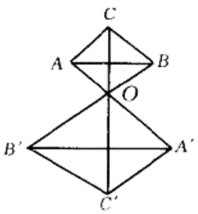

图 9-8

①求证: $AB /\!/ A'B'$, $AC /\!/ A'C'$, $BC /\!/ B'C'$

②求 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}$ 的值.

证明:

$\because AA'$ 与 BB' 交于点 O,且 $\frac{AO}{OA'}=\frac{BO}{OB'}=\frac{2}{3}$

$\therefore AB /\!/ A'B'$ 同理 $AC /\!/ A'C'$, $BC /\!/ B'C'$

$\because A'B' /\!/ AB$, $AC /\!/ A'C'$ 且 AB 和 $A'B'$, AC 和 $A'C'$ 方向相反,

$\therefore \angle BAC=\angle B'A'C'$,同理 $\angle ABC=\angle A'B'C'$

因此 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ 且 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AO}{OA'}=\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

3. 如何求异面直线所成角?

若能证明两异面直线垂直,则它们所成的角为 90°;若两异面直线不垂直,一般应将它们所成的角作出来,作的方法通常有:在一条直线上取合适一点,过这点作另一条的平行线;在空间选一点作两条平行线.可借助平行四边形或三角形的中位线来作平行线.

计算时,若角在直角三角形中,则用直角三角形的边角关系来解决;一般三角形中,常用余弦定理来计算.

[例 4] S 是正三角形 ABC 所在平面外的一点如图 9-9, $SA=SB=SC$,且 $\angle ASB=\angle BSC=\angle CSA=90°$, M、N 分别是 AB 和 SC 的中点.求异面直线 SM 与 BN 所成角.

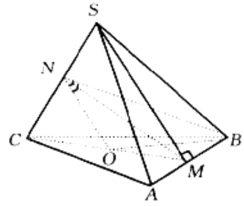

图 9-9

解法一:

连 CM,取 CM 中点 O,连 NO,则 $NO /\!/ SM$,连 BO, $\therefore \angle BNO$ 为异面直线 SM 与 BN 所成角.设 $SA=SB=SC=a$,故 $AC=AB=BC=\sqrt{2}a$

则在 Rt $\triangle BSN$ 中: $NB=\sqrt{SB^2+NS^2}=\sqrt{a^2+(\frac{1}{2}a)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$

又 $NO=\frac{1}{2}SM=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{4}a$ 在 Rt$\triangle BOM$ 中: $BO=\sqrt{OM^2+MB^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{4}a$.在 $\triangle NOB$ 中,

$\cos\angle ONB=\frac{ON^2+NB^2-OB^2}{2\times ON\times NB}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

$\therefore \angle ONB=\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$ 即异面直线 SM 与 BN 所成角为 $\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$

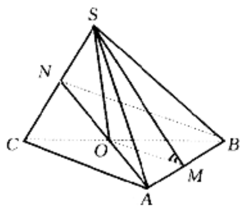

图 9-10

解法二:

连 AN 取 NA 中点 O，连 OM、SO，则$\angle OMS$ 为异面直线 SM 与 BN 所成角.同解法一求解.

解法三：

取 SB 中点 O，BM 中点 G，SN 中点 H，连 OG、OH，计算$\cos\angle HOG$，连 SG，$SG^2=BG^2+BS^2-2BG\cdot BS\cdot\cos\angle SBG$，再求 $HG^2=HS^2+GS^2$

但要注意 $\cos\angle HOG=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ $\therefore$异面直线所成角仍为 $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

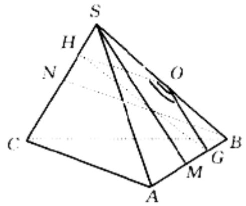

图 9-11

4. 如何求异面直线的距离？

首先找出两异面直线的公垂线段(必须与两异面直线都垂直且相交)，再计算其长.

[**例 5**]如图，P 是$\triangle ABC$ 所在平面外的一点，M、N 分别是 AB 和 CP 中点，已知 $PA=BC$，$PB=AC$，求证：MN 是 AB 和 PC 的公垂线.

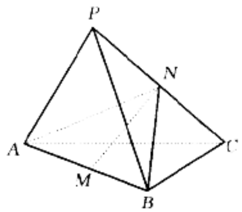

图 9-12

证明：

连 AN、BN，在$\triangle APC$ 和$\triangle BCP$ 中 $PA=BC$，$AC=BP$，$PC=PC$，$\therefore\triangle APC\cong\triangle BCP$

$\therefore\angle APN=\angle BCN$，在$\triangle APN$ 和$\triangle BCN$ 中，$PN=NC$，$AP=BC$

$\therefore\triangle APN\cong\triangle BCN$

$\therefore AN=NB$，又 M 为 AB 中点 $\therefore NM\perp AB$

同理可证 $MN\perp PC$

又 $MN\cap PC=N$，$MN\cap AB=M$

$\therefore MN$ 是 AB 和 PC 的公垂线.

能力训练

【双基过关】

一、选择题

1. 下列命题中正确的是 ( )

A. 若 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，则 a、b 是异面直线.

B. 若 $a\subset\alpha$，$b\not\subset\alpha$，则 a、b 是异面直线.

C. 若 $a\cap b=\phi$，则 a、b 是异面直线.

D. 不同在任何一个平面内的两直线叫异面直线.

2. 分别和两条异面直线平行的两条直线的位置关系是 ( )

A. 一定平行 B. 一定相交

C. 一定异面 D. 相交或异面

3. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，异面直线 CD_1 和 BC_1 所成的角的度数是 ( )

A. $45°$ B. $60°$

C. $90°$ D. $120°$

4. $l_1/\!/l_2$，a、b 与 l_1、l_2 都垂直，则 a、b 的关系是 ( )

A. 平行 B. 相交

C. 异面 D. 以上三种都可能

5. 空间四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$，且 $AC=BD$，E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 中点，则四边形 $EFGH$ 是 ( )

A. 菱形 B. 矩形

C. 梯形 D. 正方形

6. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，表面的对角线与 AD_1 成 $60°$的有 ( )

A. 4 条 B. 6 条

C. 8 条 D. 10 条

7. 如果两条相交直线与两条直线分别平行，这两组直线所成的角相等，那么这两个角 ( )

A. 同是钝角

B. 同是直角

C. 同是锐角

D. 同是锐角或直角

8. 空间四边形 $ABCD$ 的各边与两条对角线的长都为 1，点 P 在边 AB 上移动，点 Q 在 CD 上

移动,则点 P 和 Q 的最短距离为 ( )

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题

9. 分别在两个相交平面内的两条直线的位置关系是______.

10. 过已知直线 l 外一点 A,作和 l 垂直的直线有______条.

11. 长方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中,$\angle BAB_1=\angle B_1A_1C_1=30°$,则 AB 与 A_1C_1 所成角为______,AA_1 与 B_1C 所成角是______,AB_1 与 A_1C_1 所成角的余弦值是______.

12. 如图 9-13,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$AC=b$,$BC=a$,P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外一点,$PB\perp AB$,M 是 PA 的中点,$AB\perp MC$,异面直线 MC 与 PB 间的距离为______.

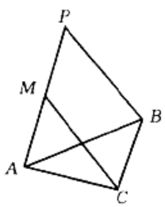

图 9-13

三、解答题

13. 在空间四边形 $ABCD$ 中,E、F 分别为 AB、BC 的中点,求证:EF 与 AD 为异面直线.

14. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E、F 分别为 BB_1、CC_1 的中点,求 AE、BF 所成角的余弦值

【拔高挑战】

15. 空间四边形 $ABCD$ 中,$AB=AD=2$,$BC=CD=1$,AD 和 BC 成 $60°$ 角,E、F 分别为 AB、DC 中点,求 AB 和 CD 所成的角及 EF 的长.

§9.3 直线与平面平行的判定和性质

知识精讲

【重点难点】

在直线和平面的位置关系中,平行关系不仅应用较多,同时又是学习平面和平面位置关系的基础,所以直线和平面平行的判定和性质是本小节的一个重点,直线和平面平行的判定定理和性质定理的应用是一个难点.

【学法指导】

1. 直线和平面的位置关系

一条直线和一个平面的位置关系有且只有以下三种:

(1)直线在平面内——有无数个公共点;

(2)直线和平面相交——有且只有一个公共点;

(3)直线和平面平行——没有公共点.

注意:

①把直线和平面相交或平行的情况统称直线在平面外.

②直线 a 在平面 α 内时，应把 a 画在表示平面 α 的平行四边形内；直线 a 在平面 α 外时，应把直线 a 或它的一部分画在表示平面 α 的平行四边形外，如图 9－14 所示

③直线 a 与平面 α 相交于点 A，规定记作 $a\cap\alpha=A$；直线 a 与平面 α 平行；记作 $a\parallel\alpha$；a 在 α 内，记作 $a\subset\alpha$.

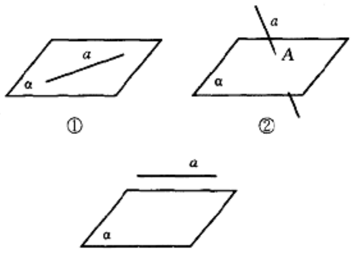

图 9－14

2. 直线和平面平行的判定

判定直线和平面平行，除依据定义外，还有以下判定定理.

直线和平面平行的判定定理，如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

注意：

①直线和平面平行的判定定理，是通过线线平行来判定线面平行.这里所说的线线，是指平面内的一条直线和平面外的一条直线.此定理用符号表示，即 $\left.\begin{array}{l}a\not\subset\alpha\\ b\subset\alpha\\ a\parallel b\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel\alpha$

②应用此定理时，要注意 3 个条件必须齐备.

3. 直线和平面平行的性质

直线和平面平行的性质定理：如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行.

注意：

①直线和平面平行的性质定理，是由线面平行推出线线平行.这里所说的线线，是指与平面平行的一条直线和过这条直线的平面与已知平面的交线.

②此定理用符号来表示.即 $\left.\begin{array}{l}a\parallel\alpha\\ a\subset\beta\\ \alpha\cap\beta=b\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel b$

③要防止将此定理误解为“一条直线平行于一个平面，就平行于这个平面内的一切直线”.

④有了以上性质定理，便可以根据直线与平面平行来解决直线间的平行问题.

【巧学妙思】

1. 如何证明平面外一条直线与平面平行?

判定(证明)直线与平面平行的方法：

①定义法.(说明直线与平面无公共点)

②判定定理法：只需证明此直线与平面内一条直线平行即可.

[例 1]正方体 AC_1 中，$AP=B_1Q$，N 是 PQ 中点，M 是正方形 ABB_1A_1 的中心，求证：①$MN\parallel$ 面 B_1D_1，②$MN\parallel A_1C_1$

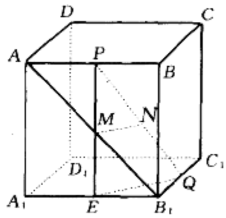

图 9－15

分析：

N 是 PQ 中点，M 为对角线中点，找平行线借助三角形的中位线.

证明：

①连 PM 交 A_1B_1 于 E，连 AB_1 则必过 M.在 $\triangle APM$ 和 $\triangle B_1EM$ 中，$\angle PAM=\angle EB_1M$，$\angle AMP=\angle B_1ME$，$AM=MB_1$，$\therefore\triangle APM\cong B_1EM$.

$\therefore AP=EB_1$，$PM=ME$.即 M 为 PE 中点，又 N 为 PQ 中点

$\therefore MN\parallel EQ$，而 $EQ\subset$ 面 B_1D_1.$\therefore MN\parallel$ 面 B_1D_1

②$\because EQ\parallel A_1C_1$，$\therefore$ 由平行公理得：$MN\parallel A_1C_1$.

2. 线面平行性质定理的应用：

利用线与面平行的性质定理可以解决线与线平行的问题.

[例 2]如果一条直线与两个相交的平面都平行，那么这条直线与这两个平面的交线平行.

证明:

在平面 α 内取一点 $Q(Q\notin b)$,在 β 内取一点 $P(P\notin b)$,设过点 Q 和直线 a 的平面为 α',过点 Q 与直线 a 的平面为 β',且 $\alpha'\cap\alpha=d$,$\beta\cap\beta'=c$.

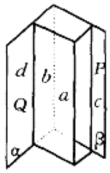

图 9-16

$\because a/\!/\alpha$ $\quad\therefore a/\!/d$,$\because a/\!/\beta$ $\quad\therefore a/\!/c$,$\therefore c/\!/d$

又 $d\subset\alpha$,$\therefore c/\!/\alpha$,$\because\alpha\cap\beta=b$,$c\subset\beta$,$\therefore c/\!/b$

$\therefore a/\!/b$

[例 3]如图 9-17:两个全等的正方形 $ABCD$ 和 $ABEF$ 所在平面交于 AB,$M\in AC$,$N\in FB$,且 $FN=AM$,求证:$MN/\!/$面 BCE

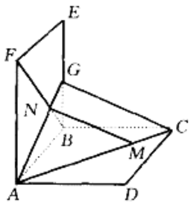

图 9-17

证法一:

连结 AN 并延长交 EB 于 G,连 CG,则 $\dfrac{AN}{NG}=\dfrac{FN}{NB}$

$\because FN=AM$,$NB=CM$

$\therefore\dfrac{AN}{NG}=\dfrac{AM}{CM}$

$\therefore MN/\!/CG$,又 $MN\not\subset$面 BCE,$CG\subset$面 BCE.

$\therefore MN/\!/$面 BCE.

证法二:

分别过 N、M 作 $NG/\!/AB$,$MH/\!/AB$,则 $NG/\!/MH$,连 GH,则 $\dfrac{NG}{FE}=\dfrac{BN}{BF}$,$\dfrac{MH}{AB}=\dfrac{MC}{AC}$,$\because EF=AB$,$BN=CM$,$BF=AC$ $\quad\therefore NG=MH$ $\quad\therefore MNGH$ 是平行四边形.$\therefore MN/\!/GH$.$\therefore MN/\!/$面 BCE.

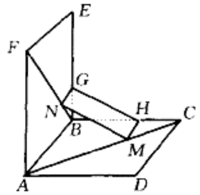

图 9-18

能 力 训 练

【双基过关】

一、选择题(单选)

1. 若一条直线和平面内的一条直线平行,则该直线 ( )

A. 必与该平面无公共点.

B. 必与该平面不相交

C. 必不在该平面内

D. 该直线与这平面平行

2. 有如下一些说法:

①若直线 $a/\!/b$,$b\subset$平面 α,则 $a/\!/\alpha$;

②若直线 $a/\!/\alpha$,$b\subset\alpha$,则有 $a/\!/b$;

③若直线 $a/\!/b$,直线 $a/\!/\alpha$,则 $b/\!/\alpha$;

④若直线 $a/\!/\alpha$,$b/\!/\alpha$,则有 $a/\!/b$

其中正确的是 ( )

A. ①④ B. ①③

C. ② D. 均不正确

3. 一条直线若同时平行于两个相交平面,则这条直线与这两个平面交线的位置关系是 ( )

A. 异面 B. 相交

C. 平行 D. 相交或平行

4. 下列命题正确的是 ( )

A. 过一点作一直线的平行平面有无数多个;

B. 过平面外一点,做一平面的平行直线有无数多条;

C. 过一点作一直线的平行直线有无数条

D. 过两条平行线中的一条的任一平面均与另一条直线平行.

5. 如果 $l/\!/\alpha$,则 l 平行于 α 内的 ( )

A. 全部直线

B. 过 l 的平面与 α 的交线

C. 任一直线

D. 惟一确定的直线

6. 过直线 l 外两点,作与 l 平行的平面,这样的平面 ( )

A. 能作出无数个

B. 只能作出一个

C. 不能作出

D. 上述情况都有可能

7. 梯形 $ABCD$ 中,$AB/\!/CD$,$AB\subset$平面 α,$CD\not\subset$平面 α,则直线 CD 与平面 α 内的任一直线 m 的位置关系是 ( )

A. 平行

B. 平行或异面

C. 平行或相交

D. 平行、异面或相交

8. 直线 $a/\!/$平面 α,且它们之间的距离为 d,则到