

比例和百分法

江苏人民出版社

比例和百分法

沈 超 涂世泽編著

江苏人民出版社



內 容 提 要

这是一本数学知識讀物，适合于高小畢業及初中文化程度的讀者自学。书中对于比例和百分法的基本概念和运算法則都作了詳細的闡述，并且列举了各类問題的解法。

比 例 和 百 分 法

沈 超 涂世澤編著

*

江苏省書刊出版營業許可証出〇〇一號

江 苏 人 民 出 版 社 出 版

南 京 湖 南 路 十 三 号

江苏省新华书店发行 苏州印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印張 2 9/16 字數 49,000

一九五七年二月第一版

一九六四年八月南京第七次印刷

印數 78,001—106,000

統一書號： 13100·24

定 價：（8）二角六分

目 录

比 例

一、比	(1)
二、比例	(10)
三、成正比例的量的問題	(20)
四、成反比例的量的問題	(25)
五、兩種以上成比例的量的問題	(31)
六、連鎖比例問題	(37)
七、比例分配問題	(40)
八、混合比例問題	(45)

百 分 法

一、百分法的三类基本問題	(54)
二、比較复杂的百分法問題	(62)
三、百分数的簡捷算法	(68)
习题答案	(75)

AC 24/31

比 例

一、比

1. 比

我們在日常生活中，常用到“比較”兩個字，這兩個字是用來區分兩件或幾件東西在數量上或質量上的差別的。在數學上，兩件東西的差別是指它們數量上的區別。考察兩件東西數量上的差別有兩種方法：（1）用減法，就是說一件東西比另一件東西大（或小）多少；（2）用除法，就是說一件東西是另一件東西的幾倍（或幾分之幾）。用減法所得到的差別，叫做較（或差）；用除法得到的差別，叫做比（或商）。

現在我們談談比的意義。有甲、乙兩個同類量，求甲量是乙量的幾倍或者是乙量的幾分之幾；這個表示幾倍或幾分之幾的數，叫做這兩個同類量的比。

例如：甲金屬重 4 公斤，乙金屬重 2 公斤，則甲金屬的重量與乙金屬的重量之比是 2，也就是說，甲金屬重量是乙金屬重量的 2 倍。

又如：甲身長 5 尺，乙身長 5 尺半，則甲身長與乙身長之比為 $\frac{10}{11}$ ，也就是說，甲的身長是乙的身長的十一分之十。

事實上，所謂甲是乙的幾分之幾，就是說甲是乙的幾分之幾“倍”。在上面的例子里，甲的身長就是乙的身長的十一分

之十“倍”。在習慣上，我們只說甲的身長是乙的身長的十一分之十，而不說出“倍”這個字。

因為比就是表示一個量是另一個量的幾倍或者幾分之幾，所以兩個同類量的比就是一個數。

要問一個量是多少，總要先選擇一個同類的量來作為測量單位，然後看它是這個測量單位的多少倍數；這個倍數就叫做量的數值，它表示這個量的多寡。例如我們要測量某人的身長，就先取某一長度作為測量單位，譬如說取一尺作為測量單位，並量得某人的身長是6個一尺，那末，就說這個人的身長是6尺，也就是說，這個人的身長是6個測量單位。若以一米作為測量單位，那末，這個人的身長就是2米（因1米=3尺），即2個測量單位。所以用數來表示某件東西的大小時，這個數是由所取的測量單位而定的，象上面所說，表示某人的身長的數，在用尺作測量單位時，就是6，而用米作測量單位時，就是2。

兩個同類量的比，就是這兩個量的數值的比。而兩個數的比就是第一個數是第二個數的若干倍或者幾分之幾，也就是第一個數除以第二個數所得的商。例如4與2的比就是 $4 \div 2 = 2$ ，5與5.5的比就是 $5 \div 5.5 = \frac{10}{11}$ 。

必須注意，在求兩個同類量的比時，表示這兩個量的數，應該是用同一測量單位來測量兩個量所得的結果。如果所用的測量單位不相同，就應當先把它們化為相同的測量單位，然後再求它們的比。例如20兩（測量單位是兩）與5斤（測量單位是斤）的比不是 $\frac{20}{5} = 4$ ；應當先把5斤化為50兩（或

將20兩化為2斤),然後求得它們的比是 $\frac{2}{5}$ 。

若 a 與 b 表示兩個數,而 a 與 b 的比是一個數 q ,我們就可以寫做 $a:b=q$,這個“ $:$ ”是“比”的符號。 a 叫做比的前項, b 叫做比的后項, q 叫做比值。在兩個數相比時,哪個是前項,哪個是后項,是不能寫顛倒的。例如 a 與 b 的比要寫成 $a:b$,不可寫成 $b:a$;而 b 與 a 的比則寫做 $b:a$,不可寫成 $a:b$ 。兩數相比的比值,就是用后項除前項所得的商。如果把比和除法對照起來講,那末比的前項就是除式中的被除數(或分數中的分子),后項就是除數(或分母),比值就是商(或分數值)。

在除法中,若被除數與除數相等,則商為1;若被除數小於除數,則商小於1;若被除數大於除數,則商大於1。因此,就 $a:b$ 來說,若 $a=b$,則 $a:b=1$;若 $a<b$,則 $a:b<1$;若 $a>b$,則 $a:b>1$ 。反過來,若 $a:b=1$,則 $a=b$;若 $a:b<1$,則 $a<b$;若 $a:b>1$,則 $a>b$ 。

在除法中,被除數可為任何數,而除數不能為0(如果除數為0,則除法無意義);所以,對於 $a:b$ 來說, a 也可為任何數,而 b 則不能為0(如果 b 為0,則這個比 $a:b$ 無意義)。

兩個同類量的比的比值是一個不名數。

〔注〕 在實際的應用中,我們也常常在需要引入新量的情況下,用到兩個不同類量的比。這時,所求得的比就是一個名數,而它的單位則是我們按照所引入的新量的實際意義來給定的(注意:象這樣的單位的“給定”並不是任意的,而必須是有着它的實際意義的)。

例如：速度是單位時間內的位移，我們也可以說位移與時間之比就是速度。譬如說，一個物體作等速運動，在 5 秒內行經 20 厘米，我們就得到 20 厘米與 5 秒的比，也就是 20 和 5 兩個數的商（ $=4$ ），再用速度的單位“厘米/秒”來表示，於是，得速度為 4 厘米/秒，讀作速度為每秒 4 厘米。

又如：物理學中的物質比重是單位體積的重量。求物質重量與它的體積之比，就得到它的比重。譬如說，某金屬 8 立方厘米重 154.4 克，我們就得到它的比重為 19.3 克/立方厘米（ $\frac{154.4}{8}=19.3$ ），讀作比重為每立方厘米 19.3 克。

但是，不是任意兩個不同類的量都能相比，譬如說“3 張桌子與 2 支鋼筆的比”，就是毫無實際意義的。

在甲金屬重 4 公斤，乙金屬重 2 公斤的例子中，它們的重量之比是 $2:1$ 。但是它們的實際重量的公斤數是這個比的兩項的二倍。所以如果知道甲、乙二量的比是 $a:b$ ，則甲、乙二量的數值實際上不一定是 a 與 b ，而往往是它們的 r 倍，即甲量的數值是 ar ，乙量的數值是 br 。例如：父子二人年齡之比為 $5:2$ ，他們的年齡之和是 56 歲，求他們二人的年齡。

這個問題，可設父年為 $5r$ 歲，子年為 $2r$ 歲，則有：

$$5r + 2r = 56, \text{ 或 } 7r = 56, \text{ 即 } r = 8.$$

因此，就可得到父年為 $5r = 40$ 歲，子年為 $2r = 16$ 歲。

練 習 一

- (1) 兩個數的比是 $3:2$ ，它們的差是 20，求這兩個數。
- (2) 水中氫和氧重量的比是 $1:8$ ，54 公斤的水，含有氫

和氧各多少公斤？

2. 比的性質

比既然是兩數相除所得的商，故除法所具有的性質也是比所具有的。現在說明比的性質如下：

〔1〕在除法中，被除數 = 除數 $\times$ 商；因此，若 $a : b = q$ ，則 $a = bq$ 。譬如 $15 : 3 = 5$ ，則 $15 = 3 \times 5$ 。就是說，比的前項等于它的后項与比值的乘積。

〔2〕在除法中，被除數 $\div$ 商 = 除數；因此，若 $a : b = q$ ，則 $a : q = b$ 。譬如 $15 : 3 = 5$ ，則 $15 : 5 = 3$ 。就是說，比的前項与比值的比等于它的后項。

〔3〕在除法中，若被除數扩大（或縮小）若干倍，除數不变，則商也扩大（或縮小）相同的倍數；因此，若 $a : b = q$ ，則 $(am) : b = (qm)$ ，或 $\frac{a}{n} : b = \frac{q}{n}$ 。譬如 $24 : 3 = 8$ ，則 $(24 \times 2) : 3 = (8 \times 2)$ ，或 $\frac{24}{4} : 3 = \frac{8}{4}$ 。就是說，比的前項扩大（或縮小）若干倍，它的后項不变，則比值也扩大（或縮小）相同的倍數。

〔4〕在除法中，若除數扩大（或縮小）若干倍，被除數不变，則商反而縮小（或扩大）相同的倍數；因此，若 $a : b = q$ ，則 $a : (bm) = \frac{q}{m}$ ，或 $a : \frac{b}{n} = (qn)$ 。譬如 $24 : 8 = 3$ ，則 $24 : (8 \times 2) = \frac{3}{2}$ ，或 $24 : \frac{8}{2} = (3 \times 2)$ 。就是說，比的后項扩大（或縮小）若干倍，它的前項不变，則比值反而縮小（或扩大）相同的倍數。

〔5〕在除法中，被除數与除數同时扩大（或縮小）相同的倍數，則商不变；因此，若 $a : b = q$ ，則 $(am) : (bm) = q$ ，

或 $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = q$ 。譬如 $24 : 8 = 3$ ，則 $(24 \times 2) : (8 \times 2) = 3$ ，
 或 $\frac{24}{2} : \frac{8}{2} = 3$ 。就是說，比的前項和后項同乘以或除以相同的
 某數，則比值不變。

性質〔5〕告訴我們，如果比的前項和后項有公約數，可以
 把這個公約數約去。例如 $24 : 18$ 可以寫作 $4 : 3$ 。

如果比的前項和后項是分數，根據這個性質，可以用它們
 的最小公分母乘各項，就能化成整數的比。例如 $\frac{3}{5} : \frac{1}{4}$ ，用
 公分母 20 乘這兩項，就可以化成 $12 : 5$ 。

所以這個性質在化簡比的時候是常常應用到的。

練 習 二

將下列各比化成最簡的兩個整數的比，並求它們的比值：

(1) $15 : 10$

(2) $24 : 36$

(3) $(-42) : (-28)$

(4) $34 : (-51)$

(5) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$

(6) $1\frac{1}{4} : 2\frac{2}{3}$

3. 反 比

對於一個比 $a : b$ 來說，它的前、后兩項的倒數之比
 $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ 叫做它的反比。用 ab 來乘 $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ 的兩項，則得 $b : a$ ，所
 以 $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ 也可以寫成 $b : a$ 。因此，可以說，如果把一個比
 $(a : b)$ 的后項作前項，前項作后項，則所成的比 $(b : a)$ 就是原
 來的比 $(a : b)$ 的反比（當然 $a : b$ 也是 $b : a$ 的反比）。因為
 $a : b = \frac{a}{b}$ ， $b : a = \frac{b}{a}$ ，所以，當兩個比互為反比時，它們的比

值就互为倒数。例如 $8:4=2$ ，而它的反比 $4:8=\frac{1}{2}$ 。

练 习 三

写出下列各比的反比，并求出它们的比值：

(1) $5:2$

(2) $14:21$

(3) $\frac{5}{7}:\frac{3}{8}$

(4) $2\frac{3}{8}:3\frac{5}{6}$

4. 連 比

如果甲量与乙量的比是 $a:b$ ，乙量与丙量的比是 $b:c$ ，则表示甲、乙、丙三个量的比，也可以写成 $a:b:c$ 。在这样的写法里， $a:b:c$ 就叫做甲、乙、丙三个量的連比。例如甲金属重 4 公斤，乙金属重 3 公斤，丙金属重 2 公斤，则甲、乙、丙三种金属重量的連比为 $4:3:2$ 。也就是说，甲、乙之比为 $4:3$ ，乙、丙之比为 $3:2$ ，甲、丙之比为 $4:2$ 。

若甲、乙的比为 $a:b$ ，乙、丙的比为 $b:c$ ，丙、丁的比为 $c:d$ ，则甲、乙、丙、丁四个量的連比为 $a:b:c:d$ 。所以，三个或三个以上的量的比可以写成連比的形式。

所谓甲、乙、丙三个量的比是 $8:6:4$ ，就是说甲、乙的比是 $8:6$ ，乙、丙的比是 $6:4$ ；它们的前后项都有公约数 2，约去这个公约数，则甲、乙的比为 $4:3$ ，乙、丙的比为 $3:2$ ，得甲、乙、丙的連比是 $4:3:2$ 。所以，連比中的各项可以用同一数来除，而它们的关系不变。同样情形，連比中的各项也可以用同一数来乘，而它们的关系不变。即：

$$(am):(bm):(cm)=a:b:c \quad (m \neq 0)$$

或 $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} : \frac{c}{n} = a : b : c \quad (n \neq 0)$

例如: $12 : 9 : 6 = 4 : 3 : 2 \quad 1 : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = 12 : 8 : 9$

如果甲、乙之比为 $5 : 3$ ，乙、丙之比为 $4 : 1$ ，要写成甲、乙、丙的连比，可用下面的方法：

因为两个比都含有乙，把两个比中表示乙的数 3 和 4 换成它们的最小公倍数 12，在第一个比中，前、后项各用 4 乘得 $20 : 12$ ；在第二个比中，前、后项各用 3 乘得 $12 : 3$ 。于是，得甲、乙、丙的连比为 $20 : 12 : 3$ 。

如果甲、乙之比为 $4 : 3$ ，丙、甲之比为 $2 : 5$ ，要写成甲、乙、丙的连比，就把两个比中表示甲的数 4 和 5 换成它们的最小公倍数 20。于是，第一个比变为 $20 : 15$ ，第二个比变为 $8 : 20$ ，得甲、乙、丙的连比为 $20 : 15 : 8$ 。

如果甲、乙之比为 $2 : 3$ ，乙、丙之比为 $4 : 5$ ，丙、丁之比为 $6 : 7$ ，要求甲、乙、丙、丁的连比，可先求甲、乙、丙的连比得 $8 : 12 : 15$ 。再将甲、乙、丙的连比 $8 : 12 : 15$ 与丙丁的比 $6 : 7$ 中表示丙的数 15 和 6 换成它们的最小公倍数 30。于是，得甲、乙、丙、丁的连比为 $16 : 24 : 30 : 35$ 。

要求五个量、六个量等等的连比，同样可以按照这个方法来做。

若甲金属重 8 公斤，乙金属重 6 公斤，丙金属重 4 公斤，它们的重量的连比为 $4 : 3 : 2$ 。但是，它们的实际重量的公斤数是连比中各项的数的二倍，由此可知，若几个量的连比为 $a : b : c : \dots$ ，实际上表示各量的数，就分别是连比中各项

的数的 r 倍，也就是說，它們实际上是 ar 、 br 、 cr 、……。例如：在几何上，我們知道三角形三个內角之和是 180° ，如果在 $\triangle ABC$ 中，知道 $\angle A$ 、 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的比是 $3:4:2$ ，那末，在求这三个角时，我們可以設 $\angle A = (3r)^\circ$ ， $\angle B = (4r)^\circ$ ， $\angle C = (2r)^\circ$ ，于是，得：

$$3r + 4r + 2r = 180$$

即 $r = 20$

这就求得 $\angle A = (3r)^\circ = 60^\circ$ ， $\angle B = (4r)^\circ = 80^\circ$ ，
 $\angle C = (2r)^\circ = 40^\circ$ 。

練 习 四

- (1) 把 600 按照 $4:5:6$ 的連比分成三份。
- (2) 將 675 分成三份，使它們成 $\frac{1}{2}:\frac{3}{4}:\frac{5}{6}$ 的連比。
- (3) 在制磁器的混合土內，含白土、砂土和石膏的比为 $25:2:1$ ；7 斤这样的混合土內含白土、砂土和石膏各若干斤？
- (4) 某种銅、錫和鎳的合金，三种成分的比为 $1:2:2$ ，要制造这种合金 200 斤，这三种金屬各用多少斤？
- (5) 分 125 为四份，使第一份与第二份之比为 $2:3$ ，第二份与第三份之比为 $4:5$ ，第三份与第四份之比为 $6:11$ 。
- (6) 三輛載重汽車运磚的数量之比：第一輛与第二輛为 $3\frac{1}{2}:2\frac{1}{3}$ ，第二輛与第三輛为 $1\frac{1}{2}:1\frac{1}{5}$ 。三輛車共运磚 2772 块，問每輛車各运磚若干块？

二、比 例

1. 比 例

某本書的頁數為400頁，另一本書的頁數為200頁，它們的頁數之比為 $400:200=2$ 。某本書價1元，另一本書價5角，它們的價格之比為 $10:5=2$ 。這兩個比的比值都是2，所以它們是相等的。把它們寫成一個等式： $400:200=10:5$ ，這個等式叫做比例式，或者簡稱比例。所以，所謂比例，就是兩個相等的比所組成的等式。

顯然，組成比例，必須有四個數（由它們構成了相等的兩個比）；這時，這四個數之間的關係，叫作成比例。例如：已知 $a:b=c:d$ ，我們就可以說， a 、 b 、 c 、 d 四數成比例。必須注意：在念出 a 、 b 、 c 、 d 四數成比例時，應該按照這四數在比例式中的先後順序依次念出；例如把“ a 、 b 、 c 、 d 成比例”，念作“ a 、 b 、 d 、 c 成比例”，或者“ b 、 a 、 c 、 d 成比例”，都是不對的。

對於比和比例這兩個概念，應該加以區分：兩數的比，是表示兩個數之間的倍數關係（即第一個數是第二個數的幾倍或者幾分之幾），而“比例”卻是一個等式，它表示由四個數構成的兩個比是相等的；因此，任意兩數可以相比（只要後項不為0就可以了），但並非任意四數都可以成比例。例如： $30:15=2$ ， $4:3=\frac{4}{3}$ ，它們的比值不相等；因此30、15、4、3這四個數就不能成比例。很明顯，對於30、15、4這三數來說，第四個數必須是2，它們才可以成比例，即 $30:15=4:2$ 。由

此可知，如果給定了三個數，則和它們成比例的第四個數也就確定的。這裡，還應該注意：在由給定了的三個數來求出和它們成比例的第四個數時，所給的三個數也是有一定的順序的。例如：依次給定的三個數，如果是12、4、9，和它們成比例的第四個數就是3，寫作比例式： $12:4=9:3$ 。如果所給定的三個數依次是4、12、9，則第四個數就必須是27，寫作比例式： $4:12=9:27$ 。同樣的，如果所給定的三個數依次是9、12、4，則第四個數就一定是 $\frac{16}{3}$ ，寫作比例式 $9:12=4:\frac{16}{3}$ 。可以看出，所給定的三個數如果在次序上有了改變，則所得到的第四個數也就會不同。

因為 $a:b=\frac{a}{b}$ ， $c:d=\frac{c}{d}$ ，所以比例式 $a:b=c:d$ 常常寫成 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 。在比例式 $a:b=c:d$ 中， a 叫做第一項， b 叫做第二項， c 叫做第三項， d 叫做第四項。 a 與 d 又叫做外項， b 與 c 又叫做內項。第四項 d 叫做前三項 a 、 b 、 c 的第四比例項。應當注意，講到第四比例項，必須把前三項依次讀出來，如果僅說 d 是第四比例項，或者把前三項順序顛倒而說成 d 是 b 、 a 、 c 的第四比例項，都是不對的。

如果比例式中的兩個內項相等，如 $a:b=b:c$ ，這樣的比例叫做連比例。 b 叫做 a 、 c 的比例中項， c 叫做 a 、 b 的第三比例項（也就是說 c 是 a 、 b 、 b 的第四比例項）。

2. 比例的性質

比例式中的四個數，既然有一定的關係，所以它們的順序不能任意更動。但是，我們也可以按一定的規則來更動它們

的順序，而不破壞它們成比例的關係。這些規則，我們叫做比例的性質。

〔性質1〕 在所有的比例 $a:b=c:d$ 中，兩外項的乘積都等於兩內項的乘積，即 $ad=bc$ 。

因為 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，兩端同乘以兩個分母的公分母 bd ，得：

$$\frac{a}{b} \times bd = \frac{c}{d} \times bd, \quad \text{即 } ad = bc.$$

利用這個性質，我們由比例中任何三項，就可以求得其餘一項。例如，知道 $a:b=c:d$ 中的 $a=8$ ， $b=4$ ， $d=3$ ，那麼：

$$c = \frac{ad}{b} = \frac{8 \times 3}{4} = 6$$

在連比例 $a:b=b:c$ 中，有：

$$b^2 = ac$$

因此，知道連比例 a 、 b 、 c 中的任何兩數，就可求得其餘一數。例如，已知 $a=4$ ， $b=6$ ，則：

$$c = \frac{b^2}{a} = \frac{6^2}{4} = 9$$

又如，已知 $a=8$ ， $c=2$ ，則：

$$b^2 = ac = 8 \times 2 = 16$$

所以 $b=4$ 或 -4

〔性質2〕 若一對數的乘積等於另一對數的乘積，則這四個數可以組成一個比例式，它的兩個外項是兩對數中的一對，它的兩個內項則是另一對。

假設 $ad=bc$ ，兩端同除以 bd ，則得：

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}, \quad \text{或} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

即 $a:b=c:d$