

477

TK911.6
L33

离散信号与系统分析

李培芳 主编

浙江大学出版社

内容简介

本书系统地论述了离散信号与系统的基本原理和方法,着重讨论了时域离散信号的分析 and 处理。

全书共分 6 章,内容包括:信号的频域分析、抽样理论,离散系统的时域分析、 z 域分析和状态变量分析,离散傅里叶变换和快速傅里叶变换,数字滤波器。书末还附有用 MATLAB 语言编写的计算机程序以供学生上机练习之用。

本书条理清晰,叙述精炼,可作为大专院校电气、电子、控制类专业及其他相关专业的本科生教材。

图书在版编目(CIP)数据

离散信号与系统分析 / 李培芳主编. — 杭州:浙江大学出版社, 2001.1

ISBN 7-308-02625-6

I. 离... II. 李... III. ①离散信号-时域分析
②系统分析 IV. TN911.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 82807 号

责任编辑 王大根

出版发行 浙江大学出版社

(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)

(E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 浙江大学出版社电脑排版中心

印 刷 浙江大学印刷厂

经 销 浙江省新华书店

开 本 787mm×1092mm 16 开

印 张 13.5

字 数 346 千字

版 印 次 2001 年 1 月第 1 版 2001 年 1 月第 1 次印刷

印 数 0001—1000

书 号 ISBN 7-308-02625-6/TN·052

定 价 16.00 元

前 言

21 世纪将是数字化的时代,信息科学与技术正愈来愈广泛地渗透到其他众多学科领域,数字信号与系统的分析和处理几乎已成为所有工程技术人员必不可少的基本知识。因此,“信号与系统”作为研究信号与系统分析的基本理论和方法的一门基础课程,“信号与系统”已被大多数学校列入相关专业的教学计划。我校电气工程学院从 80 年代起就开始开设该课程选修课,近年则已被列为各专业的必修课程。本书便是为适应教学需要在原有讲义基础上编写而成的。本书在内容取舍上有如下特点:

1) 考虑到连续信号与系统分析的内容已在其他相关课程,如“电路原理”、“控制理论”等课程中有所涉及,并且由于随着大规模集成电路和计算机技术的飞速发展,信号与系统的研究正逐渐转向以离散信号与系统的研究为重点,因此本书以讨论离散信号与系统的分析为主。本书也以此命名。

2) 考虑到非信息类专业一般不单独设置“数字信号处理”课程,而信号处理的理论与方法对于工科学生来说至关重要,因此本书中以相当多的篇幅介绍数字信号处理方面的基础知识,使读者通过本课程学习能为进一步学习数字信号处理打下良好的基础。

3) 考虑到信号频谱分析是信号分析的最基础性内容,为了照顾到全书内容的连贯性,为学习离散信号的分析打好基础,本书第 1 章以介绍连续信号频谱分析为主。

4) 学习信号与系统分析必须强调注重实践环节,本书附录中列出了若干用 MATLAB 语言编写的计算机程序以配合教学,供学生上机练习参考。

全书共分 6 章,另有附录与各章相配合。讲授全部内容约需 50 学时,对于不同专业,可按需要对内容进行筛选。本书可作为电气、控制、仪器、测量、机械等专业本科生教材,也可供有关技术人员参考。

本书由李培芳主编,并编写第 4、5、6 章及统稿全书;童梅编写第 2、3 章,孙士乾编写第 1 章及附录。吴键曾参与本书讲义的编写工作。

本书在编写出版过程中得到了浙江大学电气工程学院领导的支持,也得到了电气工程学院电工电子教学中心老师的帮助和指导,在此一并表示感谢。

由于编者水平有限,书中不乏谬误之处,敬请读者不吝赐教。

编 者

2000 年 5 月于浙江大学

目 录

第 1 章 信号的频域分析	1
1.1 傅里叶变换的定义	1
1.2 傅里叶变换的若干性质和定理	6
1.3 调制和解调	13
1.3.1 调 制	13
1.3.2 解 调	14
1.3.3 频分复用	15
1.4 周期信号的傅里叶变换	16
1.5 无畸变传输 理想滤波器	19
1.5.1 无畸变传输	19
1.5.2 理想滤波器	20
1.5.3 可实现滤波器的约束条件	22
1.5.4 频率响应的实部虚部约束关系	23
1.6 时域信号的抽样与恢复	23
1.6.1 抽样过程与抽样定理	23
1.6.2 信号的恢复	25
习题 1	29
第 2 章 离散系统的时域分析	34
2.1 离散信号——序列	34
2.1.1 时域离散信号	34
2.1.2 典型序列	36
2.1.3 序列的运算	38
2.2 时域离散系统	41
2.2.1 时域离散系统的定义和性质	41
2.2.2 离散系统的描述	42
2.3 常系数差分方程的经典解法	44
2.3.1 迭代解法	44
2.3.2 通解与特解法	44
2.3.3 零输入响应与零状态响应法	46
2.4 离散系统的单位响应	48
2.4.1 离散系统单位响应的确定	48
2.4.2 零状态响应与单位响应的关系	49
2.5 离散系统的稳定性与因果性	49
2.5.1 离散系统稳定性的定义	49

2.5.2 离散系统稳定性的充要条件.....	50
2.5.3 线性时不变系统因果性的充要条件.....	51
习题 2	52
第 3 章 离散系统的 z 域分析	57
3.1 从拉氏变换到 Z 变换	57
3.1.1 Z 变换的定义	57
3.1.2 Z 变换的收敛域	58
3.2 常用序列的 Z 变换	59
3.3 Z 变换的几个定理	60
3.4 Z 逆变换	65
3.4.1 幂级数展开法	65
3.4.2 部分分式展开法	66
3.4.3 反演积分法	67
3.5 利用 Z 变换解差分方程	68
3.6 离散系统的系统函数	69
3.6.1 系统函数的定义	69
3.6.2 系统稳定性的判别法	70
3.7 离散系统的频率响应	71
3.7.1 频率响应的导出	71
3.7.2 频率响应的特点	72
3.8 系统频率响应的几何确定法	73
3.9 双边 Z 变换	75
3.10 Z 变换与傅氏变换和拉氏变换的关系	77
3.10.1 序列的 Z 变换与其傅氏变换、拉氏变换的关系	77
3.10.2 连续时间信号的拉氏变换与其抽样序列的 Z 变换间的关系	78
3.10.3 泊松求和公式	80
3.11 含抽样——保持环节的混合系统	80
3.12 一般的混合系统分析	84
3.13 修正 Z 变换	87
3.14 输出为连续函数的混合系统	90
附表 3.1 Z 变换的几个定理	92
附表 3.2 离散序列 $x(k)$ 的 Z 变换 $X(z)$	93
附表 3.3 从 $H(s)$ 到 $H(z)$ 的变换	94
附表 3.4 从 $H(s)$ 到 $H(z, \lambda)$ 的变换	94
习题 3	95
第 4 章 离散系统的状态变量分析	100
4.1 从差分方程到状态方程	100
4.2 状态方程的 z 域解	104

4.3	系统函数矩阵	106
4.4	状态方程的时域解	107
4.5	利用特征值解状态方程	109
4.6	非线性离散系统的平衡状态和稳定性	111
4.7	线性离散系统的状态反馈	112
4.8	非线性离散系统的状态反馈	113
4.9	混合系统的状态空间分析	114
	习题 4	117
第 5 章	离散傅里叶变换与快速傅里叶变换	120
5.1	傅里叶变换的可能形式	120
5.1.1	连续时间与离散频率的傅里叶变换	120
5.1.2	连续时间与连续频率的傅里叶变换	120
5.1.3	离散时间与连续频率的傅里叶变换	121
5.2	离散傅里叶级数(DFS)	122
5.3	离散傅里叶变换(DFT)	124
5.3.1	离散傅里叶变换的定义	124
5.3.2	离散傅里叶变换的性质	125
5.4	DFT 与 Z 变换和傅里叶变换的关系	132
5.4.1	DFT 与 Z 变换和傅里叶变换的关系	132
5.4.2	对 $X(z)$ 取样点数的限制	133
5.4.3	$X(z)$ 的内插公式	134
5.5	用 DFT 进行连续信号频谱分析	136
5.5.1	连续非周期信号的频谱分析	136
5.5.2	连续周期信号的频谱分析	142
5.6	快速傅里叶变换(FFT)	144
5.6.1	按时间抽取(DIT)FFT 算法	144
5.6.2	FFT 算法的规律和特点	148
5.6.3	按频率抽取(DIF)FFT 算法	149
5.6.4	离散傅里叶反变换(IDFT)快速算法	151
	习题 5	152
第 6 章	数字滤波器	157
6.1	模拟滤波器	157
6.1.1	巴特沃兹(BW)滤波器	158
6.1.2	切比雪夫(CB)滤波器	161
6.1.3	其他类型模拟滤波器的设计——频率变换法	164
6.2	数字滤波器的类型	166
6.3	IIR 数字滤波器的设计	168
6.3.1	概 述	168

6.3.2 IIR 数字滤波器的设计——脉冲响应不变法	169
6.3.3 IIR 数字滤波器的设计——双线性变换法	173
6.4 FIR 数字滤波器的设计	176
6.4.1 FIR 数字滤波器的设计——窗函数法	176
6.4.2 FIR 数字滤波器的设计——频率取样法	182
6.5 数字滤波器的结构	184
6.5.1 IIR 数字滤波器的结构	184
6.5.2 FIR 数字滤波器的结构	188
6.6 IIR 与 FIR 滤波器的比较	191
习题 6	191

附录 MATLAB 程序

1. 离散信号的绘制	196
2. 卷积和的计算	197
3. Z 逆变换	198
4. 离散系统的频率响应	199
5. 快速傅里叶变换	201
6. 数字滤波器的单位(脉冲)响应	203
7. 数字滤波器的单位阶跃响应	204
8. BW 型模拟滤波器的设计	205
9. IIR 数字滤波器的设计——脉冲响应不变法	206
10. FIR 数字滤波器的设计——窗函数法	208
11. 系统函数、状态方程及其转换	209

参考书目	211
------------	-----

第1章 信号的频域分析

1.1 傅里叶变换的定义

对于非周期时间信号 $f(t)$, 常用傅里叶变换(简称傅氏变换)进行分析. 如果函数 $f(t)$ 在时间 t 的无限区间内满足狄里赫利条件, 则其傅氏变换

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1.1-1)$$

存在, 它将时域函数 $f(t)$ 变换为频域函数 $F(j\omega)$, 其物理意义为信号 $f(t)$ 的频谱密度, 它在频域反映了信号的基本特征.

傅氏逆变换的定义是

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (1.1-2)$$

式(1.1-1)和(1.1-2)分别简写为 $\mathcal{F}[f(t)] = F(j\omega)$ 和 $\mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)] = f(t)$, 或写成对应形式 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$.

利用公式 $e^{jx} = \cos x + j\sin x$, 由式(1.1-1)得

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt \\ &= R(\omega) + jI(\omega) \end{aligned} \quad (1.1-3)$$

可见 $F(j\omega)$ 的实部 $R(\omega)$ 是 ω 的偶函数, $F(j\omega)$ 的虚部 $I(\omega)$ 是 ω 的奇函数.

在式(1.1-3)中用 $-\omega$ 代替 ω , 可得

$$F(-j\omega) = R(\omega) - jI(\omega) = F^*(j\omega) \quad (1.1-4)$$

符号 $*$ 表示共轭, 即 $F(-j\omega)$ 和 $F(j\omega)$ 互为共轭函数.

由共轭函数性质 $F(j\omega) \cdot F^*(j\omega) = |F(j\omega)|^2$ 可得函数 $F(j\omega)$ 的模为

$$|F(j\omega)| = [F(j\omega)F(-j\omega)]^{\frac{1}{2}} \quad (1.1-5)$$

而 $F(j\omega)$ 的幅角是

$$\arg F(j\omega) = \arctan \frac{I(\omega)}{R(\omega)} \quad (1.1-6)$$

由式(1.1-5)和(1.1-6)知 $F(j\omega)$ 的模 $|F(j\omega)|$ 是 ω 的偶函数, 而 $F(j\omega)$ 的幅角 $\arg F(j\omega)$ 是 ω 的奇函数. $\arg F(j\omega)$ 也记成 $\angle F(j\omega)$. $|H(j\omega)|$ 和 $\arg F(j\omega)$ 分别称为信号 $f(t)$ 的幅频特性和相频特性.

下面导出几个时间函数的傅氏变换.

1. 单边指数函数

$$f(t) = e^{-\alpha t} \mathbf{1}(t) \quad (1.1-7)$$

如图 1.1-1(a) 所示, 其中 $\alpha > 0$. $\mathbf{1}(t)$ 是单位阶跃函数, 定义为

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (1.1-8)$$

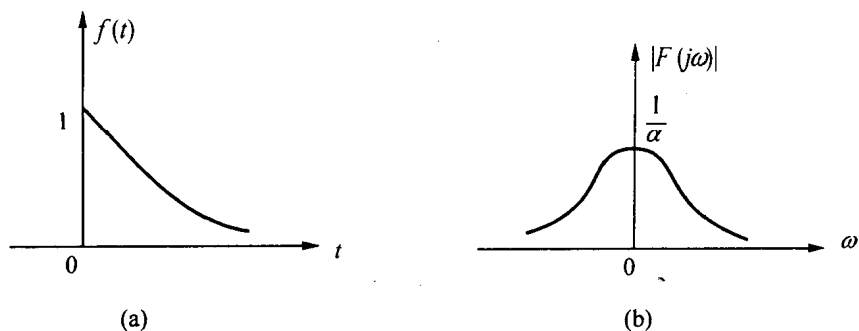


图 1.1-1 单边指数函数及其频谱

将式(1.1-7)代入式(1.1-1)得

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha} \mathbf{1}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

即有

$$e^{-\alpha} \mathbf{1}(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad (1.1-9)$$

其幅频特性和相频特性分别为

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}, \angle F(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\alpha}$$

幅频特性示于图 1.1-1(b) 中.

2. 双边指数函数

$$f(t) = e^{-\alpha} \mathbf{1}(t) - e^{\alpha} \mathbf{1}(-t) \quad (1.1-10)$$

如图 1.1-2(a) 所示. 利用式(1.1-9) 得到其傅氏变换为

$$F(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{\alpha - j\omega} = -\frac{j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (1.1-11)$$

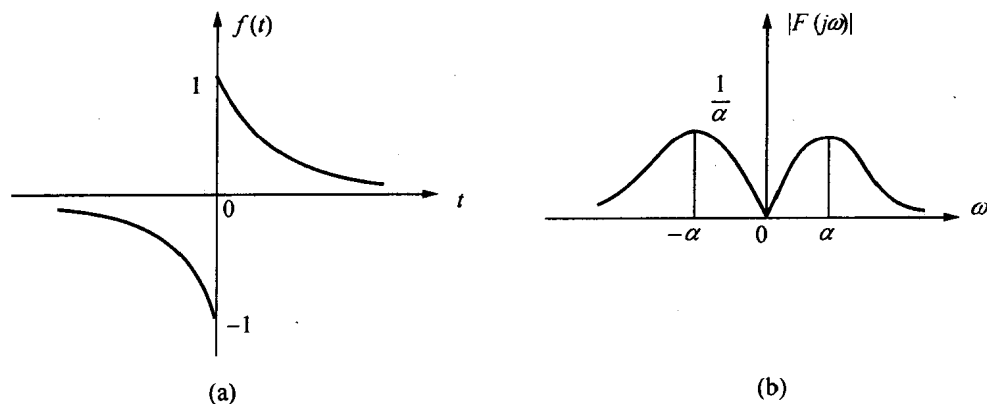


图 1.1-2 双边指数函数及其频谱

图 1.1-2(b) 中给出了幅频特性.

3. 符号函数

符号函数定义为

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t = 0) \\ -1 & (t < 0) \end{cases} \quad (1.1-12)$$

符号函数 $\operatorname{sgn}(t)$ 不满足绝对可积条件, 但可将它看作图 1.1-2(a) 中双边指数函数当 $\alpha \rightarrow 0$ 时的极限情况, 从而得

$$F(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega} \quad (\omega \neq 0)$$

故

$$\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \quad \omega \neq 0 \quad (1.1-13)$$

$\operatorname{sgn}(t)$ 及其频谱如图 1.1-3 所示。

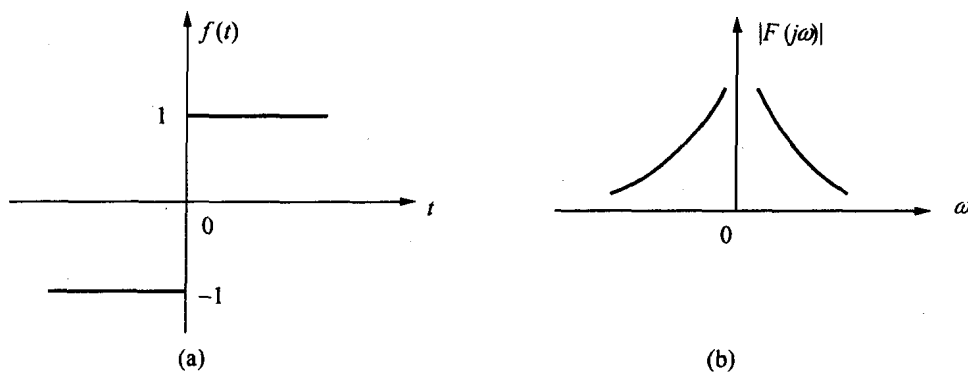


图 1.1-3 符号函数及其频谱

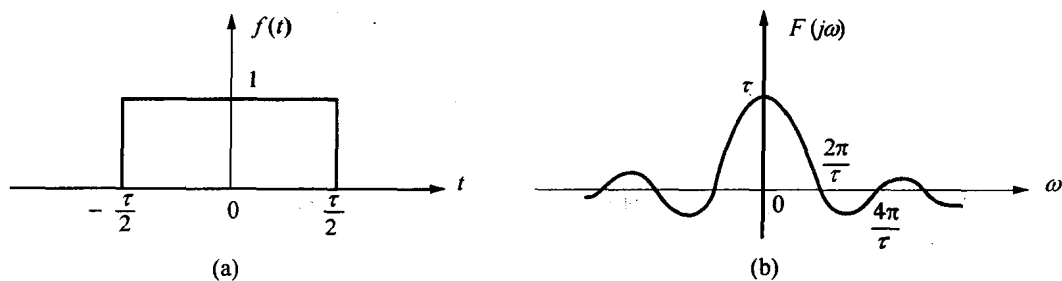


图 1.1-4 门函数及其频谱

4. 门函数

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & (|t| < \frac{\tau}{2}) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (1.1-14)$$

其傅里叶变换为

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} (e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}) = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2}$$

定义函数 $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$, 则上式可写成

$$F(j\omega) = \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

即

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (1.1-15)$$

$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$ 及其频谱如图 1.1-4 所示.

5. 冲激函数

冲激函数 $\delta(t)$ 定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & (t = 0) \\ 0 & (t \neq 0) \\ \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (1.1-16)$$

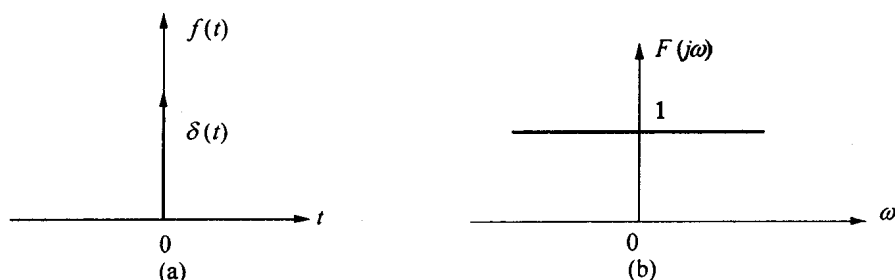


图 1.1-5 冲激函数及其频谱

$\delta(t)$ 是一种广义函数,其傅里叶变换为

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

即

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (1.1-17)$$

$\delta(t)$ 及其频谱如图 1.1-5 所示. $\delta(t)$ 的频谱是均匀的,故称白色频谱.

6. 指数衰减正弦函数

$f(t) = e^{-\alpha} \sin \omega_0 t \cdot \mathbf{1}(t)$, 见图 1.1-6.

将 $f(t)$ 代入式(1.1-1) 得

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha} \sin \omega_0 t \cdot \mathbf{1}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} \sin \omega_0 t dt \\ &= \frac{\omega_0}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

即

$$e^{-\alpha} \sin \omega_0 t \cdot \mathbf{1}(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_0^2} \quad (1.1-18)$$

幅值频谱如图 1.1-6(b) 所示.

同理可得指数衰减余弦函数的傅氏变换,有

$$e^{-\alpha} \cos \omega_0 t \cdot \mathbf{1}(t) \leftrightarrow \frac{\alpha + j\omega}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_0^2} \quad (1.1-19)$$

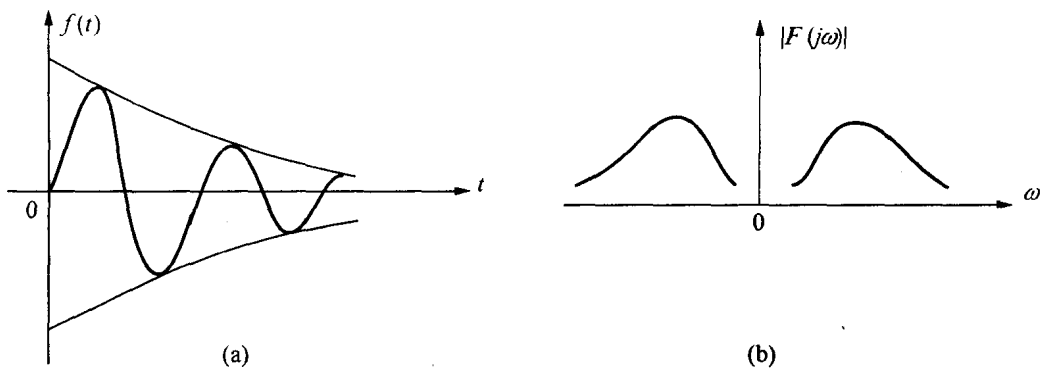


图 1.1-6 指数衰减正弦函数及其频谱

7. 三角形脉冲函数

如图 1.1-7 所示, 三角形脉冲函数 $f(t)$ 定义为

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau} & (|t| \leq \tau) \\ 0 & (|t| > \tau) \end{cases} \quad (1.1-20)$$

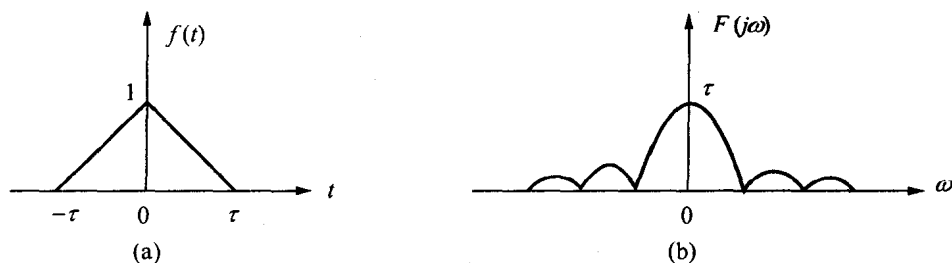


图 1.1-7 三角形脉冲及其频谱

可知 $f(t)$ 是偶函数. 在求取三角形脉冲函数的傅氏变换前先推导关于偶函数和奇函数的傅氏变换的特点. 由式(1.1-1), 有

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$$

当 $f(t)$ 是实偶函数时, 上式第二项为零, 故有

$$F(j\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t dt \quad (1.1-21)$$

当 $f(t)$ 是实奇函数时, 上式第一项为零, 故有

$$F(j\omega) = -2j \int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t dt \quad (1.1-22)$$

将式(1.1-20)代入式(1.1-21), 得

$$F(j\omega) = 2 \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \cos\omega t dt = 2 \left[\frac{1}{\omega} \sin\omega t - \frac{1}{\tau} \left(\frac{t}{\omega} \sin\omega t + \frac{1}{\omega^2} \cos\omega t \right) \right] \Big|_{t=0}^{t=\tau}$$

$$= \frac{2}{\tau\omega^2}(1 - \cos\omega\tau) = \tau \frac{\sin^2(\frac{\omega\tau}{2})}{(\frac{\omega\tau}{2})^2} = \tau \text{sinc}^2(\frac{\omega\tau}{2}) \quad (1.1-23)$$

可见 $F(j\omega)$ 恒为正, 如图 1.1-7(b) 所示.

8. 钟形脉冲

$f(t) = Ae^{-(\frac{t}{\tau})^2}$, 如图 1.1-8(a) 所示, 又称为高斯脉冲, 在随机系统中很有用. 它的傅氏变换为

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-(\frac{t}{\tau})^2} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-(\frac{t}{\tau})^2} \cos\omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-(\frac{t}{\tau})^2} \sin\omega t dt \end{aligned} \quad (1.1-24)$$

式中: 第一项的被积函数为 t 的偶函数, 第二项的被积函数为 t 的奇函数为零, 故有

$$F(j\omega) = 2 \int_0^{\infty} Ae^{-(\frac{t}{\tau})^2} \cos\omega t dt = A \sqrt{\pi} \tau e^{-(\frac{\omega\tau}{2})^2} \quad (1.1-25)$$

图 1.1-8(b) 所示为其频谱曲线.

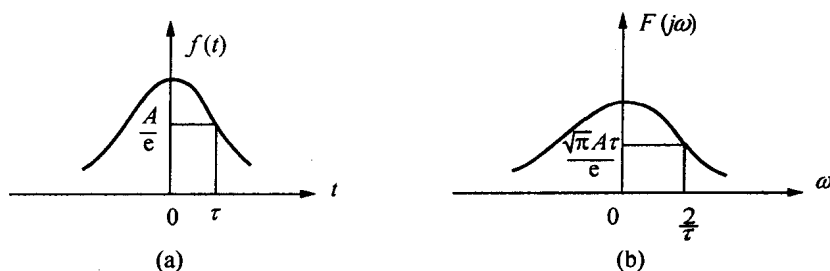


图 1.1-8 钟形脉冲及其频谱

1.2 傅里叶变换的若干性质和定理

1. 对称性

$$\text{设 } f(t) \leftrightarrow F(f), \text{ 则 } F(t) \leftrightarrow f(-f) \quad (1.2-1)$$

证: 将式(1.1-1)和式(1.1-2)中的 ω 写成 $2\pi f$, 则

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.2-2)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{j2\pi ft} df \quad (1.2-3)$$

上面两式具有对称形式. 如将式(1.2-2)中的 t 改为 $-f$, 而 f 改为 t , 则(1.2-2)式变为

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-f) e^{j2\pi ft} df \quad (1.2-4)$$

将式(1.2-4)与(1.2-3)相比较, 可知 $f(-f)$ 的逆变换是 $F(t)$, 故有

$$F(t) \leftrightarrow f(-f).$$

利用对称性可以方便地求得某些函数的傅氏变换及反变换.

例 1.2-1 求常量 $f(t) = 1$ 的傅氏变换.

解:从式(1.1-13)知 $f(t) = \delta(t) \leftrightarrow 1$, 由对称性有 $f(t) = 1 \leftrightarrow \delta(-f)$, 但因 $\delta(t)$ 是偶函数, 故

$$f(t) = 1 \leftrightarrow \delta(f) = \delta\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \quad (1.2-5)$$

2. 线性

设有 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$.

则有

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega) \quad (1.2-6)$$

只要将 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 代入式(1.1-1)中并将结果乘上系数后相加即可证明式(1.2-6).

例 1.2-2 求 $\mathcal{F}[1(t)]$.

解:根据单位阶跃函数和符号函数的定义,可有如下关系式

$$1(t) = \frac{1}{2}[1 + \text{sgn}(t)] \quad (1.2-7)$$

由(1.2-5)和(1.1-13)可得

$$1(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\delta\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) + \frac{2}{j\omega}\right] = \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \quad (1.2-8)$$

3. 时移性

设 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则

$$f(t \pm t_0) \leftrightarrow e^{\pm j\omega t_0} F(j\omega) \quad (1.2-9)$$

证:在式(1.1-1)中令 $t' = t \pm t_0$, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t \pm t_0) e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-j\omega(t' \mp t_0)} dt' = e^{\pm j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-j\omega t'} dt' \\ &= e^{\pm j\omega t_0} F(j\omega) \end{aligned}$$

式(1.2-9)表明,在时域中信号沿时间轴右移,即延时 t_0 , 其在频域中所有频率分量相应落后一相位 ωt_0 而其幅度保持不变. 这一结果是十分明显的,因为欲使右移后的信号与原信号波形完全相同,其频谱中的所有分量也都应该右移 t_0 , 所以各频率分量的相位相应落后 ωt_0 弧度,即应乘以因子 $e^{-j\omega t_0}$. 同理,若信号沿时间轴左移 t_0 (超前),则频谱中所有分量都应超前 ωt_0 弧度,即应乘以因子 $e^{j\omega t_0}$.

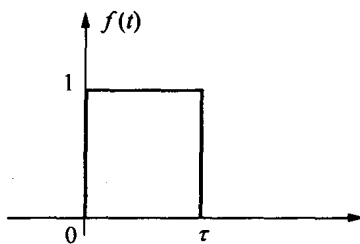


图 1.2-1 矩形脉冲

例 1.2-3 求图 1.2-1 所示矩形脉冲的傅氏变换.

解:此波形由窗口函数右移 $\frac{\tau}{2}$ 构成,因此有

$$\Pi\left[\frac{t - \frac{\tau}{2}}{\tau}\right] \leftrightarrow e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} \frac{1}{j\omega} (e^{j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau}{2}}) = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega \tau}) \quad (1.2-10)$$

作为校验,此函数也可看作为两个阶跃函数之差,即 $1(t) - 1(t - \tau)$, 由式(1.2-8)可得,其对应傅氏变换为

$$1(t) - 1(t - \tau) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) - e^{-j\omega \tau} \left[\frac{1}{j\omega} + \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \right]$$

根据 δ 函数的定义,在 $\omega \neq 0$ 时, $\delta\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = 0$, δ 函数具有筛分性质,即 $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$.

由此可得

$$1(t) - 1(t - \tau) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}(1 - e^{-j\omega\tau})$$

4. 频移性

设 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则

$$f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \leftrightarrow F[j(\omega \mp \omega_0)] \quad (1.2-11)$$

证: 由式(1.1-1) 知, 式(1.2-11) 左边函数的傅氏变换为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{\pm j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega \mp \omega_0)t} dt = F[j(\omega \mp \omega_0)]$$

式(1.2-11) 表明, 将信号 $f(t)$ 乘以因子 $e^{j\omega_0 t}$ 或 $e^{-j\omega_0 t}$, 频谱函数将相应沿 ω 轴右移 ω_0 或左移 ω_0 .

例 1.2-4 求函数 $e^{j\omega_0 t}$, $\cos\omega_0 t$, $\sin\omega_0 t$ 的傅氏变换.

解: 由式(1.2-5) 知 $1 \leftrightarrow \delta(f)$, 利用频移性公式(1.2-11), 有

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow \delta\left(\frac{\omega - \omega_0}{2\pi}\right) = \delta(f - f_0) \quad (\text{其中}, \omega_0 = 2\pi f_0) \quad (1.2-12)$$

$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \quad (1.2-13)$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \leftrightarrow \frac{1}{2j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] \quad (1.2-14)$$

5. 尺度变换

(1) 时间尺度变换

设 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) \quad a \neq 0 \quad (1.2-15)$$

证: 若 $a > 0$, 令 $x = at$, 则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega \frac{x}{a}} d\left(\frac{x}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\frac{\omega}{a}x} dx = \frac{1}{a} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

若 $a < 0$, 令 $x = at$, 则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t} dt &= \int_{+\infty}^{-\infty} f(x)e^{-j\omega \frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{a} dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} f(x)e^{-j\frac{\omega}{a}x} dx = - \frac{1}{a} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

综合两种情况, 对于实常数 $a \neq 0$, 有

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

特别当 $a = -1$ 时, 有

$$f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega) \quad (1.2-16)$$

式(1.2-15) 表明, 函数 $f(at)$ 表示函数 $f(t)$ 在时间坐标轴上压缩(或时间尺度扩展)了 a 倍, 而相应的频谱函数在频率坐标轴上展宽(或频率尺度压缩)了 a 倍, 同时其幅度减小了 $|a|$ 倍. 也就是说, 在时域中信号占据时间的压缩对应于在频域中信号占有频带的扩展, 或者反之. 在图 1.2-2 中画出了 $a = 2$ 时的频谱图.

由尺度变换特性可知, 信号的持续时间与信号的占有频带成反比. 若要压缩信号的持续时

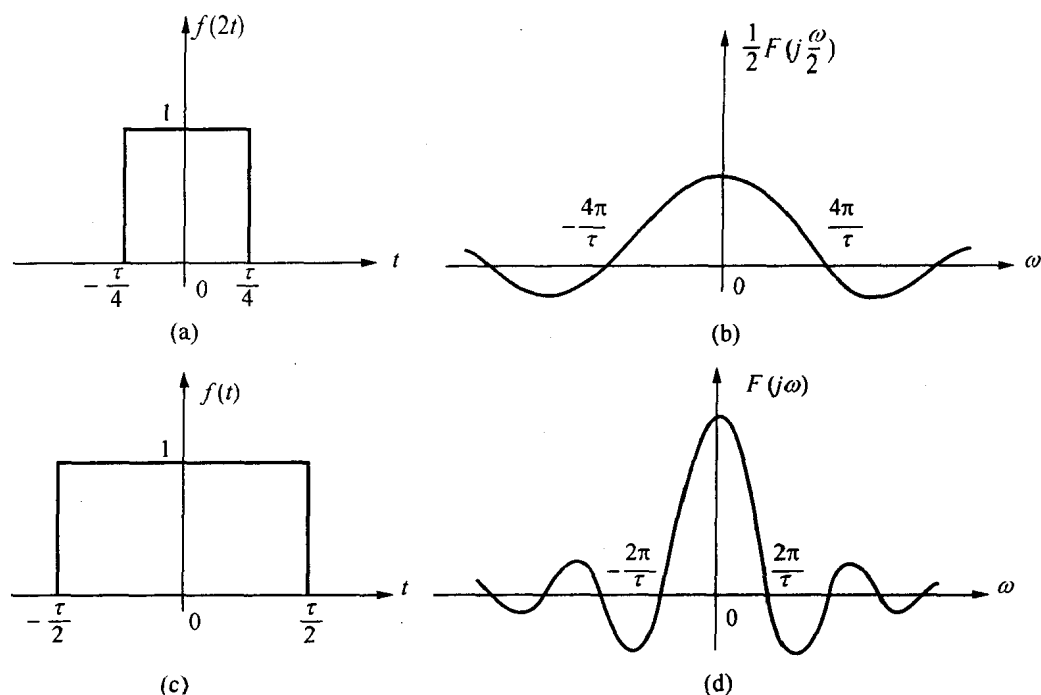


图 1.2-2 时间尺度变换

间以提高通信速度(每秒内所传送的脉冲数),则不得不以展宽频带宽度为代价.因此,通信技术中,通信速度和占用频带宽度是不可避免的矛盾.

(2) 频率尺度变换

在式(1.2-15)中用系数 $\frac{1}{a}$ 代换 a ,则可得

$$\frac{1}{|a|} f\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow F(ja\omega) \quad (1.2-17)$$

例 1.2-5 已知 $f(t) = 1 \leftrightarrow \delta(f) = \delta\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$,将频域自变量改为 ω ,即将 $\delta\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ 改为 $\delta(\omega)$,则由式(1.2-17)知 $a = 2\pi$,故

$$\frac{1}{2\pi} f\left(\frac{t}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} \leftrightarrow \delta(\omega)$$

即

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (1.2-18)$$

比较式(1.2-5)和式(1.2-18)可知

$$\delta\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = 2\pi\delta(\omega) \quad (1.2-19)$$

又由式(1.2-8)和式(1.2-19)可立即推得

$$1(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (1.2-20)$$

仿照式(1.2-19),也可将式(1.2-12) ~ 式(1.2-14)改为

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow \delta\left(\frac{\omega - \omega_0}{2\pi}\right) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (1.2-21)$$

$$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (1.2-22)$$

$$\sin \omega_0 t \leftrightarrow \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (1.2-23)$$

式(1.2-21)中的等式 $\delta(\frac{\omega - \omega_0}{2\pi}) = \delta(f - f_0) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ 也可用傅氏逆变换的方法证明:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\delta(f - f_0)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi f_0 t} df \\ &= e^{j2\pi f_0 t} = e^{j\omega_0 t}, \omega_0 = 2\pi f_0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega - \omega_0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

故式(1.2-21)得证。同理,可证式(1.2-22)和式(1.2-23)。

6. 卷积定理

设有两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$, 它们的卷积积分定义为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

(1) 时域卷积定理

设 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$, 则

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) F_2(j\omega) \quad (1.2-24)$$

$$\begin{aligned} \text{证: } F[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \end{aligned}$$

令 $t' = t - \tau$, 上式成为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t') e^{-j\omega(t'+\tau)} dt' \right] d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] F_2(j\omega) = F_1(j\omega) F_2(j\omega)$$

即时域中两个函数的卷积对应频域中它们频谱的乘积。

例 1.2-6 求 $\frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$ 的傅氏逆变换。

解: 由式(1.1-7), $e^{-\alpha} \mathbf{1}(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}$, 根据时域卷积定理, 有

$$\frac{1}{(\alpha + j\omega)^2} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha} \mathbf{1}(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \mathbf{1}(t - \tau) d\tau$$

注意到 $\tau < 0$ 时, $\mathbf{1}(\tau) = 0$, $\tau > t$ 时, $\mathbf{1}(t - \tau) = 0$, 所以

$$\frac{1}{(\alpha + j\omega)^2} \leftrightarrow e^{-\alpha t} \int_0^t d\tau = te^{-\alpha t} \mathbf{1}(t)$$

也即

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}\right] = te^{-\alpha t} \mathbf{1}(t) \quad (1.2-25)$$

(2) 频域卷积定理

设 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$,

$$\text{则 } f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\eta) F_2(j\omega - j\eta) d\eta \quad (1.2-26)$$

证: 由傅氏逆变换定义

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{F_1(\omega) * F_2(\omega)}{2\pi}\right] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega') F_2(\omega - \omega') d\omega' \right] e^{j\omega t} d\omega$$