

高等数学成人

自学指南

河海大学函授数学组编著

河海大学出版社

高等数学成人自学指南

河海大学函授数学组编著

河海大学出版社

高等数学成人自学指南

河海大学函授数学组编著

*

河海大学出版社出版

(江苏省南京市西康路1号)

江苏省新华书店发行

南京市江宁县彩色印刷厂印装

*

开本787×1092 1/32 印张17.25 字数338千字
1990年2月第一版 1990年2月第一次印刷

印数：1—1000册

ISBN 7—5630—0251—0/O·30

定价：5.40元

内 容 简 介

本书是编著者在多年函授教学实践的基础上，根据函授生及自学者学习《高等数学》的特殊需要编著而成的。全书包括一元微积分、向量及空间解析几何、多元微积分、级数(包括富氏级数)和微分方程等内容。

本书以问答的形式回答了读者在自学《高等数学》过程中可能遇到的各种疑难问题，旨在帮助读者加深对基本概念和基本定理的理解，掌握解题的技巧。书中列举了许多典型例题，特别是针对自学过程中容易出现的错误，进行分析指正，有些题还提供了多种解法，以利读者开拓思路，提高分析问题的能力。

本书可作为工科各专业函授、电大、夜大和自学成才学员以及在校大学生的参考书。

前 言

本书曾在一九八五年铅印成册，供我校函授学员使用。近年来，工科各专业成人教育发展很快，函授、电大、夜大、职大以及其它各类自学成才的学员都要学习高等数学，为了满足广大学员自学高等数学的需要，我们对原铅印本作了较大的修改和补充，由我校出版社再版出版。

本书是我们针对学员在自学过程中存在的问题而写的，书中以问答的形式回答了学员在自学过程中可能遇到的疑难问题。对学员在自学中容易掌握的内容，尽量少讲或不讲，对不容易掌握的基本内容，着重讲解。本书对每章重点及难点进行小结归纳并注意举例分析，目的是使学员在自学课本内容感到困难时，能从本书中得到启发和帮

助，从而使本书起到“不见面的辅导教师”的作用。

本书第一章至第十章由谈浩华编写，第十一章至十五章由周荣源编写，任荣祖教授和张延年副教授审阅了全部书稿，原北京水利水电学院丁利吾副教授提出了修改意见。

本书在整个编写过程中，得到了学校领导的大力支持，河海大学数学教研室以及函授部的同志，为本书的出版做了不少工作，在此一并表示感谢。

我们感谢原河海大学校长左东启教授为本书题写书名。

本书虽几经修改，不足之处仍在所难免，谨请读者批评指正。

编著者

一九八七年七月

目 录

第一章 函数……………(1—25)

- 问题 1 本章的教学要求和重点、难点是什么? ……(1)
- 问题 2 如何判断两个变量之间的关系是否为函数关系? ……(3)
- 问题 3 如何判断两个函数是否为相同的函数(即恒等)? ……(5)
- 问题 4 如何求函数的定义域? ……(6)
- 问题 5 请解释函数记号与函数值记号。 ……(9)
- 问题 6 如何判别函数的奇偶性? ……(11)
- 问题 7 如何判别函数的单调性? ……(12)
- 问题 8 如何判别一个函数是否为周期函数? ……(14)
- 问题 9 如何判别一个函数是否为有界函数? ……(15)
- 问题 10 如何分析函数的复合层次? ……(16)
- 问题 11 如何根据具体问题所给的条件, 建立变量之间的
函数关系式? ……(18)
- 问题 12 请小结一下函数作图的方法。 ……(21)
- 思考题

第二章 极限……………(26—51)

- 问题 1 本章的教学要求和重点、难点是什么? ……(26)
- 问题 2 请介绍一下本章在高等数学中的地位 and 作用。 ……(26)
- 问题 3 如何正确理解极限概念? ……(27)
- 问题 4 如何根据极限定义验证极限? ……(28)
- 问题 5 什么是数列收敛的必要条件和充分条件? ……(33)
- 问题 6 在理解无穷小量这个概念的时候, 要注意什么? ……(33)
- 问题 7 试问无穷小量与函数极限有何关系? ……(34)
- 问题 8 无界函数必为无穷大吗? ……(35)

问题 9 请将求极限的方法和技巧小结一下。……………(35)

问题 10 两个无穷小之商的极限等于多少? ……………(48)

思考题

第三章 函数的连续性……………(52—69)

问题 1 本章的教学要求和重点、难点是什么? ……………(52)

问题 2 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的三种定义是什么? 三种定义有无实质性的区别? 各有什么用处? ……………(52)

问题 3 请小结一下间断点的分类。……………(54)

问题 4 如何考察函数 $y=f(x)$ 在指定点 x_0 处的连续性? …(55)

问题 5 什么叫函数的左连续与右连续? ……………(61)

问题 6 研究函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的连续性与研究函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的极限有什么不同之处? ……(61)

问题 7 在学习闭区间上连续函数的基本性质时, 应该注意些什么? ……………(63)

问题 8 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续且 $f(x_0) > 0$ 应如何求证, 存在 $\delta > 0$, 使 x 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内时, 有 $f(x) > 0$ 。……………(67)

问题 9 请介绍一下函数、极限和函数连续性在高等数学中的地位和作用。……………(68)

思考题

第四章 导数与微分……………(70—107)

问题 1 为什么要引出导数与微分的概念? ……………(70)

问题 2 本章的教学要求和重点、难点是什么? ……………(70)

问题 3 在学习函数的导数定义时, 应该注意什么问题? …(71)

问题 4 如何讨论分段函数 $y=f(x)$ 在分段点 x_0 处的可导性? ……………(74)

问题 5 求函数的导数, 都要根据导数定义计算吗? ……(78)

问题 6 请举例说明导数的初步应用……………(92)

问题 7 学习微分这一节时要掌握哪几点? ……………(99)

思考题

第五章 中值定理……………(108—130)

- 问题 1 中值定理在高等数学中的地位和作用怎样? …… (108)
- 问题 2 本章的教学要求、重点和难点是什么? …… (108)
- 问题 3 本章的几个定理为什么叫中值定理? …… (109)
- 问题 4 学习中值定理时, 应该注意些什么? …… (109)
- 问题 5 拉格朗日中值公式有哪几种形式? …… (114)
- 问题 6 中值定理有哪些应用? …… (115)
- 问题 7 有了微分近似公式, 为什么还要引出泰勒中值公式?
…………… (119)
- 问题 8 在问题 7 中指出: 可以把一个非多项式函数, 例如
 $y = \sin x$, 用一个多项式函数来近似代替, 这样做是不
是把问题复杂化了? …… (120)
- 问题 9 举例说明非多项式函数用多项式函数近似表达的方法。
…………… (121)
- 问题 10 三次多项式 $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 2$ 能否展开为 $(x-1)$ 的
三阶、四阶泰勒公式? …… (122)
- 问题 11 将多项式函数 $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 2$ 展开成 $(x-1)$
的多项式有什么意义? …… (123)
- 问题 12 如何利用泰勒公式计算 $\sin \frac{5}{16}\pi$ 的近似值, 使它精确到
 10^{-2} ? …… (123)
- 问题 13 罗必塔法则 中的记号 “ $\frac{0}{0}$ ”、“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”、“ $\infty - \infty$ ”、
“ $0 \cdot \infty$ ”、“ 0^0 ”、“ 1^∞ ”及“ ∞^0 ”应如何理解? …… (124)
- 问题 14 应用罗必塔法则时, 应注意什么问题? …… (125)

思考题

第六章 导数的应用……………(131—150)

- 问题 1 本章的教学要求是什么? …… (131)
- 问题 2 函数的单调性与导数的关系怎样? …… (131)
- 问题 3 函数的单调性有哪些方面的应用? …… (133)

- 问题 4 关于函数的极值部分应掌握哪些要点? (137)
- 问题 5 在学习函数曲线的凹凸性与拐点这部分内容时,应着重掌握哪些要点? (139)
- 问题 6 如何求解最大值与最小值问题? (141)
- 问题 7 请小结一下利用导数作函数 $y = f(x)$ 图形的一般步骤。 (145)
- 问题 8 函数曲线的曲率一节的要点是什么? (147)

思考题

第七章 不定积分 (151—191)

- 问题 1 为什么要引出不定积分的概念? (151)
- 问题 2 本章的教学要求、重点和难点是什么? (151)
- 问题 3 学习本章应注意些什么? (152)
- 问题 4 什么是第一类换元积分法? (157)
- 问题 5 在什么情况下宜采用第一类换元积分法? (159)
- 问题 6 什么叫第二类换元积分法,第二类换元积分法有哪几种常采用的代换? (164)
- 问题 7 什么叫分部积分法?哪些类型的积分可选用分部积分法?在分部积分法中, u 、 dv 应如何选取? (171)
- 问题 8 学习有理函数的积分和三角函数有理式的积分时,应注意些什么? (176)
- 问题 9 请综合举例。 (179)
- 问题 10 请将本章内容小结一下。 (188)

思考题

第八章 定积分 (192—233)

- 问题 1 本章的教学要求及重点、难点是什么? (192)
- 问题 2 定积分是从哪一类具体问题中抽象出来的? (192)
- 问题 3 如何根据定积分的定义求定积分的值? (194)
- 问题 4 “定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的值就是由函数 $y = f(x)$ 的曲线

- 以及直线 $x = a$ 、 $y = 0$ 、 $x = b$ 所围成图形的面积”，这种说法对吗？…………… (197)
- 问题5 请举例说明定积分性质的应用。…………… (198)
- 问题6 为什么能把定积分 $\int_0^x f(t)dt$ 看作是 x 的函数？… (202)
- 问题7 应用牛顿莱布尼兹公式时，应注意什么？…………… (206)
- 问题8 应用定积分的换元法时，应注意什么？…………… (207)
- 问题9 如何求解有关定积分的证明题？…………… (210)
- 问题10 如何求解含有绝对值的定积分？…………… (213)
- 问题11 如何应用分部积分法计算定积分 $\int_a^b f(x)dx$ ？… (214)
- 问题12 学习广义积分时应注意什么？…………… (215)
- 问题13 综合举例。…………… (219)
- 问题14 请将一元微积分小结一下。…………… (231)

思考题

第九章 定积分的应用……………(234—267)

- 问题1 本章的教学要求是什么？…………… (234)
- 问题2 什么样的量可用定积分表达？…………… (234)
- 问题3 如何将一个实际问题表达为定积分？…………… (235)
- 问题4 请扼要说明定积分在几何上的应用。…………… (235)
- 问题5 请扼要说明定积分在物理学上的简单应用。…………… (255)

思考题

第十章 空间解析几何与向量代数……………(268—309)

- 问题1 本章的教学要求和重点、难点是什么？…………… (268)
- 问题2 在学习向量部分内容时，应注意什么？…………… (269)
- 问题3 将向量写成坐标表达式有什么意义？…………… (275)
- 问题4 如何判别两个向量是否垂直？…………… (281)
- 问题5 如何判别两个向量是否平行？…………… (281)
- 问题6 如何判别三个向量是否共面？…………… (283)
- 问题7 在自学过程中，如何抓住平面和直线

	这两节的要点?	(284)
问题 8	在自学有关平面和直线的内容时, 还要注意些什么?	(287)
问题 9	请将二次曲面小结一下.	(298)
思考题		
第十一章 多元函数微分法及其应用		
(310—349)		
问题 1	多元函数微分学的要点和重点是什么?	(310)
问题 2	二元函数的几何意义是什么?	(311)
问题 3	如何判断二元函数极限是否存在?	(313)
问题 4	求多元函数的导数为什么仍是采用一元函数的求导方法? 对多元函数而言, 偏导数存在与函数连续的关系怎样?	(315)
问题 5	多元函数的偏导数的与函数的全微分的关系怎样?	(318)
问题 6	求多元复合函数的导数时要注意些什么?	(320)
问题 7	如何求隐函数的导数?	(326)
问题 8	请简述曲线的切线和法平面以及曲面的切平面和法线并举例说明之.	(337)
问题 9	如何求二元函数的极值?	(341)
思考题		
(349—350)		
第十二章 重积分		
(351—395)		
问题 1	试说一下重积分的教学要求	(351)
问题 2	二重积分和定积分有什么异同?	(352)
问题 3	如何计算二重积分? 计算二重积分的一般步骤是什么? 要注意些什么?	(353)
问题 4	极坐标除前面讲过的作用外, 还有没有别的作用?	(368)
问题 5	如何改换二次积分的积分次序?	(370)
问题 6	如何计算三重积分?	(377)

问题 7 一个三重积分,在什么情况下采用柱面坐标积分方便,又在什么情况下采用球面坐标计算方便?

问题 8 请简单谈一下重积分的简单应用..... (389)

思考题..... (395—395)

第十三章 曲线积分与曲面积分..... (396—440)

问题 1 这一章主要应掌握什么?..... (396)

问题 2 曲线积分与定积分、重积分有何区别?..... (396)

问题 3 两类曲线积分的区别是什么?..... (397)

问题 4 如何计算曲线积分?..... (399)

问题 5 请举例说明曲线积分的几何意义和物理意义是什么?
..... (417)

问题 6 两类曲面积分有什么区别?..... (422)

问题 7 如何计算曲面积分?..... (423)

思考题..... (439—440)

第十四章 级数..... (441—498)

问题 1 级数有什么重要性?级数中哪些是重要概念以及基本的方法?..... (441)

问题 2 什么叫常数项级数的和?数项级数的收敛和发散的定義以及收敛的必要条件在审敛中有何用处?..... (443)

问题 3 级数收敛定义及审敛法则的研究和阐述。..... (447)

问题 4 如何判别任意项级数的敛散性?条件收敛与绝对收敛有多大区别?..... (457)

问题 5 在自学幂级数这一节时,主要应掌握哪几点? (461)

问题 6 如何求一个幂级数的和函数?..... (466)

问题 7 如何将一个已知函数 $f(x)$ 展开成幂级数?..... (471)

问题 8 幂级数有哪些应用?..... (478)

问题 9 富里哀级数是如何从实际问题中抽象出来的? (481)

问题 10 若周期函数 $f(t)$ 能展开成三角级数,则富氏系数 a_0 、 a_n 和 b_n 应如何确定?..... (484)

问题11 $f(x)$ 具备什么条件, 式 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$= f(x)$? 即 $f(x)$ 应满足什么条件, 就可以展成富里哀级数? (485)

问题12 如何求在 $[0, l]$ 上的正弦级数或余弦级数, 其收敛情况如何简便判定? 若一函数既能展成幂级数又能展成富氏级数, 则它们之间有何异同之处? (492)

思考题 (497—498)

第十五章 微分方程 (499)

问题1 什么是微分方程? 在本章中有哪些重要内容? (499)

问题2 请指出下列各方程的名称, 並就此解释有关微分方程的概念:

问题3 列方程比较困难, 是否能举一、二个例子来说明, 初始条件的含义又是什么? (500)

问题4 请解释一下通解、特解等概念. 在求解微分方程时要注意些什么? (501)

问题5 能否用不定积分法求解全微分方程? (514)

问题6 请将可降阶的高阶方程小结一下. (517)

问题7 学习线性微分方程解的结构有何意义? (521)

问题8 能否举几个最后归结为微分方程解的简单综合题呢? (530)

问题9 关于尤拉方程、方程级数解以及常系数线性方程组应掌握些什么? (533)

思考题 (538—539)

第一章 函 数

问题1 本章的教学要求和重点、难点是什么？

答：有关函数的一些基本知识，大家已在中学里学习过了，但函数是高等数学的主要研究对象，有关它的一些基本知识，在学习高等数学的过程中经常会用到，因此，本课程对这一章的教学要求，是复习和提高，对其中特别重要的部分，通过复习，要求达到透彻的理解，熟练地掌握，具体地讲就是要求：

1. 深入理解函数概念的含义，会熟练地使用函数和函数值记号，会求函数的定义域；

2. 熟练地掌握五类基本初等函数的定义、解析式、定义域、值域和图形，以及它们的基本性质，如有界性、奇偶性、周期性和单调性；

3. 会熟练地分析复合函数的复合层次，会正确分析初等函数的结构；

4. 掌握反函数及分段函数的概念。

本章重点：在概念方面，一是函数概念，二是初等函数和分段函数。在计算方面是求函数值，求定义域，分析初等函数的结构和复合层次。

本章难点：函数及函数值记号的正确应用；对实际问题建立变量之间的函数关系式。

〔例1〕点 $x_0 = -2$ 以3为半径的邻域，用区间 $[-5, 1]$ 表示，为什么不对？

答：邻域是这样定义的：满足不等式 $|x - x_0| < \delta$ 的一切实数的集合，叫做点 x_0 的 δ 邻域。而绝对值不等式 $|x - x_0| < \delta$ 等价于不等式 $-\delta < x - x_0 < \delta$ ，即 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ ，用区间表示为 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 。从定义可见，邻域是个开区间。点 $x_0 = -2$ 以 3 为半径的邻域，用不等式表示为 $|x - (-2)| < 3$ ，即 $|x + 2| < 3$ ，亦即 $-5 < x < 1$ ，用区间表示为 $(-5, 1)$ 。所以写作闭区间 $[-5, 1]$ 就不对了。

〔例 2〕 不等式 $\frac{1}{1+x} \geq 1$ 的如下解法：

两端同乘式 $1+x$ 得 $1 \geq 1+x$ ，故 $x \leq 0$ ，为什么不

答：在解不等式时，要记住不等式的性质。就本题而言，当 x 是实数时，式 $1+x$ 的值可能是正也可能是负，所以应该分两种情况进行讨论：

当 $1+x > 0$ ，即当 $x > -1$ 时，用式 $1+x$ 乘 $\frac{1}{1+x} \geq 1$ 的两端得 $1 \geq 1+x$ ， $x \leq 0$ ，故得解为 $-1 < x \leq 0$ ，用区间表示为 $(-1, 0]$ 。

当 $1+x < 0$ 时，式 $\frac{1}{1+x}$ 的值为负，它不可能大于等于 1，故此时不等式无意义。

综上所述，所给不等式的解应该是 $(-1, 0]$ 。

〔例 3〕 式 $|\frac{1}{x} + 2|$ 一定大于式 $|\frac{1}{x}|$ ，即不等关系 $|\frac{1}{x} + 2| > |\frac{1}{x}|$ 一定成立吗？

答：不一定成立。例如当 $x = -0.01$ 时， $|\frac{1}{x} + 2|$ 的值为 $|\frac{1}{-0.01} + 2| = |-100 + 2| = |-98| = 98$ ，而 $|\frac{1}{x}|$ 的值为 $|\frac{1}{-0.01}| = |-100| = 100$ ，此时式 $|\frac{1}{x} + 2|$ 显然不大于式 $|\frac{1}{x}|$ 。

关于绝对值的运算，有四个定理，即

$$\textcircled{1} |a + b| \leq |a| + |b|;$$

$$\textcircled{2} |a - b| \geq |a| - |b|;$$

$$\textcircled{3} |ab| = |a||b|;$$

$$\textcircled{4} |\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$$

根据定理①能得到关系式 $|\frac{1}{x} + 2| \leq |\frac{1}{x}| + 2$ ，

根据定理②能得到关系式 $|\frac{1}{x} + 2| = |\frac{1}{x} - (-2)| \geq |\frac{1}{x}| - 2$ 或关系式 $|\frac{1}{x} + 2| = |2 - (-\frac{1}{x})| \geq 2 - |\frac{1}{x}|$ ，而得不到关系式 $|\frac{1}{x} + 2| > |\frac{1}{x}|$

大家在进行绝对值运算时，必须严格遵守以上四个定理。

问题 2 如何判断两个变量之间的关系是否为函数关系？

答：根据函数定义，只要看这两个变量的数值之间是否存在确定的对应关系。如果两个变量的数值之间存在确定的对应关系，就可以肯定这两个变量之间的关系为函数关系。

〔例1〕 在图1—1中,以坐标原点 O 为圆心,作一个半径 $R = 1$ 的单位圆。设任意大小的角 α 的终边和单位圆周交于一点 $A(x, y)$ 。试问变量 y 与变量 α 之间是否构成函数关系?为什么?

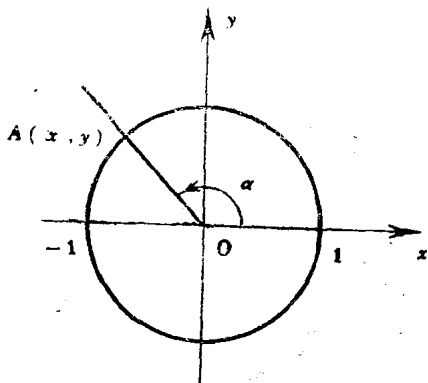


图 1—1

答: 构成函数关系。因为对于任一个 α 值($-\infty < \alpha < +\infty$), 有确定的 y 值和它对应。此函数就是正弦函数, 记作 $y = \sin\alpha$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。

〔例2〕 试问表达式 $y = \arcsin(1 + e^x)$ 中的 x 和 y 之间是否构成函数关系?

答: 不构成函数关系。因为对任意的 x 恒有 $(1 + e^x) > 1$, 因此, 对任一 x 值, 得不到确定的 y 值与其对应。

〔例3〕 若 y 是 x 的函数, 则当 x 变化时, y 也一定跟着变化。这种说法对吗?

答: 不对。因为函数定义中只要求: 当 x 取定义域中的一个数值时, y 有确定值与它对应, 并没有要求 x 变化时 y 也跟着变化。