科学版

大学数学习题精解系列

高等代数与解析几何习题精解

陈志杰 陈咸平 瞿森荣 林 磊 韩士安 编

- 课程学习与考研复习的理想读物
- 涉及两门课程的基本内容
- 通过典型例题教授解题技巧
- 习题中收录了研究生入学试题

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学习题精解系列

高等代数与解析几何
习　题　精　解

陈志杰　陈咸平　瞿森荣　林　磊　韩士安　编

科学出版社

2002

内 容 简 介

本书以复习思考题的形式帮助学生理解、掌握高等代数与解析几何的基本概念,以大量的例题介绍并讲解常用的各种方法、技巧与解题思路.把例题分为基本、普遍和提高三个层次,以适合不同情况的教学与学习的需要.

本书包括向量代数、行列式、线性方程组与线性子空间、矩阵、平面和直线、线性空间与欧几里得空间、曲面与曲线、线性变换、线性空间上的函数、坐标变换与点变换、多项式、若尔当典范形及其应用等内容.各章均有习题、自测题,书后附部分考研试题,并有详细的解答.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数与解析几何习题精解/陈志杰等编 .—北京:科学出版社,2002.2

(大学数学习题精解系列)

ISBN 7-03-009804-8

Ⅰ.高… Ⅱ.陈… Ⅲ.①高等代数-高等学校-解题②解析几何-高等学校-解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 073349 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年2月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2002年2月第一次印刷 印张:35 3/4
印数:1—5 000 字数:650 000

定价:39.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前　言

高等代数与解析几何是两门重要的基础课，近年来国内许多高校已经把这两门课合并在一起讲授，以加强几何与代数的互相渗透.高等代数的特点是概念抽象，证明题难以下手，而解析几何的内容似乎容易理解，但一遇到习题又错误百出.因此一般院校对这两门课都配以适当学时的习题课，通过对课堂内容的扼要分析以及典型例题的讲解，使学生在理解概念的基础上学到解题思路及方法，以提高学生计算和证明的能力.

本书涵盖了高等代数与解析几何课程的基本内容，考虑到不少学校仍分成两门课讲授，因此我们把解析几何的内容独立成章，方便读者选读.每节内容包括：内容精析、典型例题、练习三部分，内容精析介绍与该节相关理论的基本概念、命题和重要结论，以及教学中的经验和体会，有助读者理解基本理论；典型例题通过一系列例题，由浅入深地介绍典型解题方法，不少例题还附有评析，对解题的思路和技巧以及各种不同解法的优缺点加以评论分析，起到画龙点睛的作用.练习则与该节内容相配，使读者通过习题达到举一反三、熟练应用所学内容的目的.在每章的末尾有本章小结，指出本章的核心概念与方法，帮助读者抓住重点，进行复习.章尾还有自测题，供读者测试自己的掌握程度.书后附有习题的解答与提示，有些难题给出较详细的解答，供读者参考.希望读者坚持先做后看的原则，才会有较大的收获.

为了使不同层次的学生都能从本书得到收获，我们把内容大致分成两个层次：基本题面向一般水平的读者，如果这些例题和习题都弄懂了，那么这门课程的基本要求也达到了.打星号的题目面向学得较好的读者，尤其是想考研究生的读者.一般水平的读者不妨在初学时跳过去，复习时再回过头来看看，也许会有意想不到的收获.最后附华东师范大学数学系近年来的研究生入学考试试题及解答，供读者参考.

本书的第一、五、七、十章由陈咸平编写，第二、三、四章由瞿森荣编写，第六、八、九章由林磊编写，第十一、十二章由韩士安编写，陈志杰担任了编写的组织、大纲的制订以及协调统稿工作.

本书的写作得到了上海重点学科建设项目资助，特此表示感谢.

由于受作者经验和水平所限，难免出现错误，恳请读者批评指正.至于因不同作者编写风格不全相同造成的缺点，只能请读者谅解了.

编　者

2001 年 5 月

目 录

第一章　向 量 代 数

向量的概念来自力学、物理等学科，比如力和位移．但是把向量引进到数学中时，为了更简洁地研究它的特征和运算规则，必须作一定的取舍．比如，力有三要素：大小，方向和作用点．如图 1.1，一物体同时受两个大小相同、方向相反且作用线不在同一直线的力 F_1 和 F_2 的作用，其结果是转动，也即它们的合力(就是两个力的和)不是零．但是在数学中，向量只有大小和方向，因而可以作 $\boldsymbol{F}_1'=\boldsymbol{F}_1$，于是 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{F}_1'+\boldsymbol{F}_2'=0$．这就是说，在数学中向量可以自由地平行移动，而把它们看作同一个向量．换言之，一个向量可以用无限多条有向线段来表示它，称之为自由向量．一般几何书中所说的向量都是指自由向量．

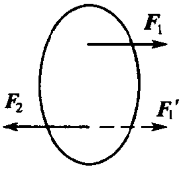

图 1.1

作了这样的改造之后，向量成为一个重要的数学概念，特别是成为几何和代数间的一个结合点，在建立了坐标系之后，几何中向量间的关系和运算转换成代数中数组间的运算，成为代数中定义向量概念的基本内容，而其基本性质又成为定义抽象的向量概念的基本公理．

§1.1　向量的线性运算

一、内容精析

只有大小没有方向的量称为标量，既有大小又有方向的量称为向量．向量用一个带箭头的有向线段表示，记为$\overrightarrow{AB}$，或 $\boldsymbol{a}$．于是可以定义向量的模，零向量，负向量．利用三角形法则或平行四边形法则可定义向量的加法，进一步得到减法及多个向量的加法法则——多边形法则(参见图 1.2)：$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{OA_n}$．

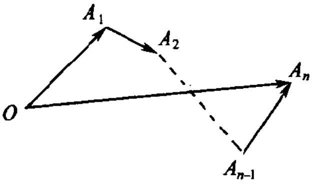

图 1.2

向量加法满足性质：

(A1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，

(A2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，

(A3) $0+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，

(A4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$.

设向量 $\boldsymbol{a}$,实数 k,可定义标量乘积 $k\boldsymbol{a}$.标量乘法满足性质:

(M1) $k(m\boldsymbol{a})=(km)\boldsymbol{a}$;

(M2) $(k+m)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{a}$;

(M3) $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$;

(M4) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

向量的加法和标量乘法统称为向量的线性运算.由三角形边长的关系可见

$$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中等号成立仅当三角形退化,即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线时成立.具体地说,右边的等号成立当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向,左边的等号成立当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向.

二、典型例题

例 1.1　设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, P 是直线 AB 上一点(见图 1.3), $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{PB}$, $k\neq-1$,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{OP}$.

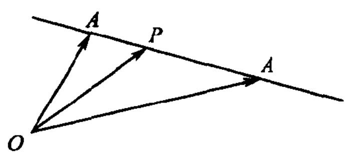

图 1.3

解一　把 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}$ 代入已知等式,得

$$\overrightarrow{OP}-\boldsymbol{a}=k(\boldsymbol{b}-\overrightarrow{OP}),$$

因此有 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}}{1+k}$.

解二　由 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{PB}=k(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})$ 可得

$$\overrightarrow{AP}=\frac{k}{1+k}\overrightarrow{AB},$$

代入 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$,又 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,于是

$$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}+\frac{k}{1+k}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}}{1+k}.$$

例中点 P 称为线段 AB 的定比为 k 的分点,所得公式称为定比分点公式.特别当点 P 是 AB 中点时, $k=1$,故 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$.

评析　此类题要求用已知向量来表示未知向量,常用上述两种解法.解一是列出已知向量与未知向量的方程,再解这方程;解二则利用三角形法则或多边形法则,把未知向量 $\overrightarrow{OP}$ 写成 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$,而 $\overrightarrow{AP}$ 可利用已知等式用 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 表示,于是得解.

例 1.2　设△ABC 中, D,E 是 AB,AC 中点(见图 1.4),用向量方法证明, $DE=\dfrac{1}{2}BC$ 且 $DE/\!/BC$.

证明　$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.故

$$DE \parallel BC,$$

且

$$DE=|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}BC.$$

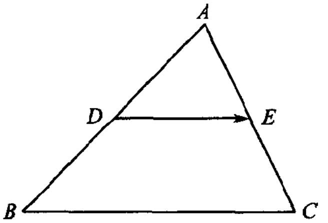

图 1.4

评析　本题证法要点是弄清所要证的结论等价于向量关系式$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,证明了这一点,一切就迎刃而解了.

例 1.3　设△ABC 中三条中线 AD,BE,CF,求证:

(1)$\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}$能构成三角形;

(2)设△ABC 重心是 G,则对任意点 O,$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

证明　(1)$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA},$$

$$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

相加,得$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=0$,故$\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}$能构成一个三角形.

(2)由(1)可得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}&=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CF}\\&=-\frac{2}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF})=0,\end{aligned}$$

所以

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC})=3\overrightarrow{OG},$$

立得结论.

评析　本题(1)是利用已知条件$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$,再把要证的等式$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=0$左边每一向量用$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}$表示出来;(2)是把要证的等式变成$(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG})=0$,即$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$,而此式与(1)的结果只差一个因数$\left(-\frac{2}{3}\right)$.

例 1.4　设 O 是正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心,求证

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=0.$$

证一　由图 1.5 易见$\overrightarrow{OA_{i-1}}+\overrightarrow{OA_{i+1}}=\lambda\overrightarrow{OA_i}$,其中$|\lambda|<2$,因此

$$\begin{aligned}2(\overrightarrow{OA_1}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})&=(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3})+(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4})+\cdots\\&\quad+(\overrightarrow{OA_{n-1}}+\overrightarrow{OA_1})+(\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OA_2})\\&=\lambda(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OA_1}),\end{aligned}$$

故$(2-\lambda)(\overrightarrow{OA_1}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})=0$,再因$2-\lambda\neq0$,可得结论.

证二　假设$\overrightarrow{OA_1},\cdots,\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{a}\neq0$,由于$\overrightarrow{OA_2},\cdots,\overrightarrow{OA_n},\overrightarrow{OA_1}$分别是$\overrightarrow{OA_1},\cdots,\overrightarrow{OA_{n-1}},\overrightarrow{OA_n}$逆时针旋转$\frac{2\pi}{n}$而得,由加法的定义,$\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OA_1}$等于$\boldsymbol{a}$逆时针旋转$\frac{2\pi}{n}$所得的向量$\boldsymbol{a}'$,当然$\boldsymbol{a}'\neq\boldsymbol{a}$,但$\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA_1}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{a}$,矛盾.故$\boldsymbol{a}=0$.

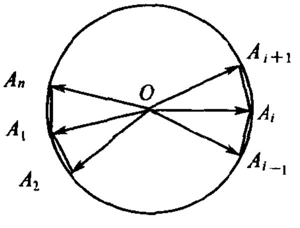

图 1.5

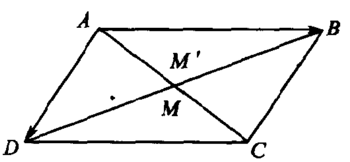

图 1.6

例 1.5　用向量方法证明平行四边形对角线互相平分.

证明　设平行四边形 $ABCD$,AC 的中点为 M,BD 的中点为 M'(见图 1.6).记$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$.则由例 1.1 的特例可知

$$\overrightarrow{AM'}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

另一方面,$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.故$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM'}$,可见 M 与 M' 重合,也即 AC,BD 互相平分.

评析　本题思路基于几何中常见的同一法,只是把证明两点重合转化成证明两向量相等.

例 1.6　设 M 是平行四边形 $ABCD$ 的中心,证明:对任意点 O,有

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}.$$

证明　由例 1.1,$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$,$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$.相加后整理即可.

练　习　1.1

1. 在$\triangle OAB$中,点 M,N 是边 AB 的三等分点,设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,试用 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 表示

$\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}$.

2. 在△ABC 中,设 AD 是角平分线,试用$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$表示 $\overrightarrow{AD}$.

3. 在平行四边形 $ABCD$ 中,点 M,N 是 BC,CD 的中点,

(1)设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}$;

(2)设$\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{e}_1,\overrightarrow{AN}=\boldsymbol{e}_2$,试用 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 表示$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$.

4. 设 D,E,F 是△ABC 三边中点,O 是任意点,证明

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}.$$

5. 设平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$,证明

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD_1}=2\overrightarrow{AC_1}.$$

*6. 设空间四边形 $ABCD$,点 E,F,G,H 依次是AB,BC,CD,DA 的中点,用向量方法证明 $EFGH$ 是平行四边形.

*7. 设梯形 $ABCD$ 中,$AB/\!/CD$,AD,BC 中点为 E,F,用向量方法证明:$EF/\!/AB$,且 $EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$.

§1.2 向量的共线,共面与线性关系

一、内容精析

本节讨论几何空间中向量的共线、共面的概念,从此可建立坐标.但它们的作用不止这一点,更重要的是它们可以统一起来,进一步抽象成向量的线性相关和线性无关的概念,这正是代数中关于向量的较抽象的概念之一,不少初学代数者对此感到困难.读者不妨在这儿多作一点思考,当在代数中学到相关概念时再仔细体会两者的联系,相信会对代数的学习大有裨益.

命题 1 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线,且 $\boldsymbol{a}\neq 0$,则存在惟一的实数 k,使 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$.

命题 2 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是存在不全为零的实数k,m,使得 $k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=0$.

命题 3 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线的充要条件是若$k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=0$ 成立,必有 $k=m=0$.

命题 1′ 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面,且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,则存在惟一的实数 k,m,使得 $\boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$.

命题 2′ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是存在不全为 0 的实数 k,m,l,使得 $k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}+l\boldsymbol{c}=0$.

命题 3′ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面的充要条件是若$k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}+l\boldsymbol{c}=0$ 成立,必有 $k=m=l=0$.

从命题 2,2′,3,3′,可得线性相关,线性无关的定义:

设 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是向量,$k_1,\cdots,k_n$ 是实数,称 $\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n$ 是$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的线性组合,$\boldsymbol{b}$ 可由$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性表示.若存在不全为 0 的 $k_1,\cdots,k_n$,使

$k_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n=0$,称 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性相关,否则,称 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性无关.于是

$$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{ 共线}\Leftrightarrow\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{ 线性相关};$$
$$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{ 共面}\Leftrightarrow\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{ 线性相关}.$$

命题 1″　设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面,则对任意的 $\boldsymbol{d}$,存在惟一的实数 k,m,l,使得 $\boldsymbol{d}=k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}+l\boldsymbol{c}$.

由于空间中 4 个以上的向量都线性相关,从命题 1,1′,1″可归纳出一个结论:

若向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 线性无关,$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s,\boldsymbol{b}$ 线性相关,则 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 惟一地线性表示.

有的书中讲到线性流形的概念,这儿也简述其几何意义,以供参考.

设空间中点 $A_1,\cdots,A_n$,称点集 $LM(A_1,\cdots,A_n)=\{M\mid\overrightarrow{OM}=k_1\overrightarrow{OA_1}+\cdots+k_n\overrightarrow{OA_n},k_1+\cdots+k_n=1\}$ 为点 $A_1,\cdots,A_n$ 所张成的线性流形.可证:直线 AB 就是 $LM(A,B)$.此外还有

若 $M_1,M_2\in LM(A_1,\cdots,A_n)$,则 $LM(M_1,M_2)\subseteq LM(A_1,\cdots,A_n)$.

可见:

当点 $A_1,\cdots,A_n$ 共线时,$LM(A_1,\cdots,A_n)$就是 $A_1,\cdots,A_n$ 所在的直线;

当点 $A_1,\cdots,A_n$ 共面时,$LM(A_1,\cdots,A_n)$就是 $A_1,\cdots,A_n$ 所在的平面;

当点 $A_1,\cdots,A_n$ 不共面时,$LM(A_1,\cdots,A_n)$就是整个空间.

设空间中向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,称向量集合 $L(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=\{k_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n\mid k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{R}\}$为 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 张成的线性子空间.如果把一个点与这点的位置向量等同起来,则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 张成的线性子空间 $L(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$就是其中所有向量的终点的集合$\{P\mid\overrightarrow{OP}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{b},k_1,k_2\in\mathbb{R}\}$,若记$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则这点集正是 $LM(O,A,B)$.这就是说当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线时,$L(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$就是过原点的平面.上述讨论当然可以推广到高维向量空间中 n 个向量的情况,读者可以把直线,平面作为背景来想象线性流形和线性子空间的形状.

二、典型例题

例 2.1　设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,证明 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ 共面.

证明　因为

$$1\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(-1)\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+1\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=0,$$

且 1,-1,1 不全为零,故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ 线性相关,所以共面.

例 2.2　设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,证明向量 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 也不共线.

证明 设有 k,m 使 $k\boldsymbol{c}+m\boldsymbol{d}=0$,即

$$k(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+m(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=0,$$

整理可得

$$(k+2m)\boldsymbol{a}+(2k-3m)\boldsymbol{b}=0,$$

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,即线性无关,由定义,

$$\begin{cases}k+2m=0,\\2k-3m=0,\end{cases}$$

解得 $k=m=0$,故 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 线性无关,即不共线.

例 2.3 设 A,B,C 三点不共线,证明点 M 在平面 ABC 上的充要条件是存在实数 k_1,k_2,k_3,使得

$$\overrightarrow{OM}=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC},且\ k_1+k_2+k_3=1.$$

证明 ($\Rightarrow$)$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$不共线,$\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$共面,故存在实数 k,m,使$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}$,对任意定点 O,有

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+m(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}),$$

即

$$\overrightarrow{OM}=(1-k-m)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC},$$

令 $k_1=1-k-m,k_2=k,k_3=m$,有 $k_1+k_2+k_3=1$.

($\Leftarrow$)设$\overrightarrow{OM}=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}$,注意到 $k_1=1-k_2-k_3$,有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}&=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=(1-k_2-k_3)\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\\&=k_2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+k_3(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=k_2\overrightarrow{AB}+k_3\overrightarrow{AC},\end{aligned}$$

可见$\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$共面,即 M 在平面 ABC 上.

例 2.4 证明:不同三点 A,B,C 共线的充要条件是存在不全为 0 的实数 k_1,k_2,k_3,使得

$$k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}=0,且\ k_1+k_2+k_3=0.$$

证明 ($\Rightarrow$)A,B,C 共线,即$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$线性相关,故存在不全为零的 k,m,使 $k\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}=0$,即

$$k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+m(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=0,$$

$$(-k-m)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}=0.$$

记 $k_1=-k-m,k_2=k,k_3=m$,有 k_1,k_2,k_3 不全为零,且 $k_1+k_2+k_3=0$.

($\Leftarrow$)设 $k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}=0$,不妨设 $k_2\neq0$,以 $k_1=-k_2-k_3$ 代入上式,整理即得

$$k_2\overrightarrow{AB}+k_3\overrightarrow{AC}=0,$$

由于 $k_2\neq0$,$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$线性相关,故 A、B、C 共线.

评析 以上例题都是利用向量线性相关,线性无关的定义,读者宜细心体

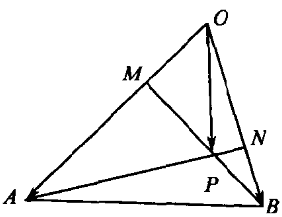

图 1.7

会其方法，这对于今后在代数中同类概念的论证很有好处.

*例 2.5　已知△OAB，记$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，点 M,N 在 OA,OB 上，AN 和 BM 交于点 P，若$\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}$，试把$\overrightarrow{OP}$分解成 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线性组合.

解　设$\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MB}=x(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$，$\overrightarrow{NP}=y\overrightarrow{NA}=y(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})$，则

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}=\lambda\boldsymbol{a}+x(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(1-x)\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b},$$
$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}=\mu\boldsymbol{b}+y(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})=y\boldsymbol{a}+\mu(1-y)\boldsymbol{b}.$$

由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，故分解是惟一的，所以

$$\begin{cases}\lambda-\lambda x=y\\ \mu-\mu y=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu},\\ y=\dfrac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu},\end{cases}$$

所以$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu}\boldsymbol{a}+\dfrac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu}\boldsymbol{b}$.

评析　已知两向量不共线，要把与它们共面的向量分解成它们的线性组合，常用待定系数法，具体步骤是

(1)引入两个待定参数；

(2)把所求向量表成已知向量与参数的两种表达式；

(3)由向量分解的惟一性，分解式的系数相等，可得一个关于参数的方程组；

(4)解方程组求出参数，代入(2)中分解式即得.

*例 2.6　证明契维定理：设点 D,E,F 在△ABC 的边 BC,CA,AB 上，且 $AF:FB=k_2:k_1$，$BD:DC=k_3:k_2$，$CE:EA=k_1:k_3$. 则 AD,BE,CF 交于一点 M，且对任意点 O，有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}}{k_1+k_2+k_3}.$$

证明　由题设可知$\overrightarrow{AF}=\dfrac{k_2}{k_1+k_2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{k_3}{k_1+k_3}$，$\overrightarrow{BD}=\dfrac{k_3}{k_2}\overrightarrow{DC}$. 设 BE，CF 交于点 M，则由例 5，有

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\dfrac{k_2}{k_1+k_2}\left(1-\dfrac{k_3}{k_1+k_3}\right)}{1-\dfrac{k_2}{k_1+k_2}\cdot\dfrac{k_3}{k_1+k_3}}\overrightarrow{AB}+\frac{\dfrac{k_3}{k_1+k_3}\left(1-\dfrac{k_2}{k_1+k_2}\right)}{1-\dfrac{k_2}{k_1+k_2}\cdot\dfrac{k_3}{k_1+k_3}}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{k_2\overrightarrow{AB}+k_3\overrightarrow{AC}}{k_1+k_2+k_3}.$$

又由§1.1例1,有

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\frac{k_3}{k_2}\overrightarrow{AC}}{1+\frac{k_3}{k_2}}=\frac{k_2\overrightarrow{AB}+k_3\overrightarrow{AC}}{k_2+k_3}.$$

所以$\overrightarrow{AM}=\frac{k_2+k_3}{k_1+k_2+k_3}\overrightarrow{AD}$,故$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AM}$共线,也即 A,M,D 三点共线,而 M 是BE,CF 交点,故 AD,BE,CF 交于点M.

对任意点 O,

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{k_2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+k_3(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})}{k_1+k_2+k_3}$$
$$=\frac{k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}}{k_1+k_2+k_3}.$$

评析 要证明三线共点,只要证两线交点在第三线上,于是就转化成三点共线问题,而用向量方法只需证明两向量相关.本例的结果可用于证明三角形的三中线共点,三角平分线共点.

练 习 1.2

1.设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,试判断向量 $\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 是否共线.

2.设向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 不共面,证明三向量 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{c}=-7\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$ 共面,并把其中一个向量用另两个向量线性表示.

3.证明:任意不同的四点 A,B,C,D 共面的充要条件是存在不全为零的实数k_1,k_2, k_3,k_4,使得

$$k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}+k_4\overrightarrow{OD}=0,\text{且 } k_1+k_2+k_3+k_4=0.$$

*4.用向量法证明:$\triangle ABC$ 的三条角平分线交于一点M,且对任一点 O 有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c},$$

其中 a,b,c 是边BC,CA,AB 的长.

*5.在$\triangle ABC$ 中,E,F 是AC,AB 上的点,且 $CE=\frac{1}{3}CA,AF=\frac{1}{3}AB$,设 BE 与CF 交于 G,证明

$$GE=\frac{1}{7}BE,\quad GF=\frac{4}{7}CF.$$

*6.设$\triangle ABC$,点 D,E,F 在边 BC,CA,AB 上,且$\overrightarrow{AF}=k_1\overrightarrow{FB},\overrightarrow{BD}=k_2\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CE}=k_3\overrightarrow{EA}$,若 $k_1k_2k_3=-1$,证明 D,E,F 三点共线.