主　　编●秦　梦
分册主编●王金生　张素虹

1堂好课

yitanghaoke

讲 问 练 解 测

全在一堂好课

试验修订版→

shiyanxiudingban

高一数学

（下）

吉林人民出版社

1堂好课

与新教材同步

试验修订版→

shiyanxiudingban

高一数学（下）

主　编●秦　梦　　分册主编●王金生　张素虹

编　者●王金生　王朝彦　陈洁芳　樊广元

吉林人民出版社

（吉）新登字 01 号

一堂好课·高一数学·下（试验修订版）

主　　编	秦　梦	分册主编	王金生　张素虹
责任编辑	张长平　王胜利	封面设计	魏　晋
责任校对	唐晓明　王治国	版式设计	王胜利

出 版 者　吉林人民出版社（长春市人民大街 124 号　邮编 130021）
发 行 者　吉林人民出版社　　电话：0431－5678541
印 刷 者　北京市通县长陵营印刷厂

开　　本　787×1092　1/16
印　　张　6.875
字　　数　216 千
版　　次　2001 年 11 月第 1 版　　2002 年 11 月第 1 次修订版
印　　次　2002 年 11 月第 1 次印刷
印　　数　1－50100 册

标准书号　ISBN 7-206-03747-X/G·1110
定　　价　7.50 元

出版说明

编写目的

- 减轻学生负担，提高课堂效率，让每节课都成为精品课。
- 推动新教材的普及使用，为广大师生提供学习的指导方法，把握新教材的特点。
- 培养学生自学能力，提高创新意识。

编写依据

- 最新国家课程标准和考试说明。
- 最新试验（试用）修订版教材。
- 最新华东版初中物理教材。

科目设置

- 试验（试用）修订版科目，涵盖初中阶段、高中阶段的数学、物理、化学、英语、语文、历史、地理、生物八大学科。
- 单独编写华东版初二、初三物理，其他科目通用。

编写特点

- **讲、练、测，三位一体**。通过讲一题、练一题、测一题，把学习过程进行优化设计，轻松学习，事半功倍。
- **突出能力，命题新颖**。全书从选材到命题都以能力立意，设问角度新，思维价值高。
- **引导思维，突破难点**。本书精选典型题，重点指导解题方法，培养迁移能力，突出重点，能够举一反三。
- **及时反馈，因材施教**。每课或每章（单元）后设有单元拔高训练，通过自测或小考，老师和学生及时了解知识掌握的不同程度，找出原因，采取不同措施，因材施教。

适用范围

- 使用试验（试用）修订版教材的省市。
- 使用初二、初三华东版物理教材的省市。

特别致谢

本书在编写过程中得到了参与新教材试验教学一线教师的大力帮助，使我们能够充分把握新教材的特点，编写时融进了广大一线教师的教学成果及独特的教学方法、新知识、新题型，在此我们表示衷心感谢。

吉林人民出版社综合室

目 录

第四章 三角函数

4.1 角的概念的推广

重点难点考点

重点：任意角的概念，象限角的概念.

难点：把终边相同的角用集合和符号语言正确地表示出来.

考点：要学会建立适当的坐标系来讨论任意角，能在 $0°$ 到 $360°$ 范围内，找出与此范围外某一个已知角终边相同的角，并能判定其为第几象限角，能写出与任一已知角终边相同的角的集合，熟练掌握区间角、象限角、终边相同角的区间表示法，集合表示法，不等式表示法.

典型例题解析

例 1 (1)把 $-1480°$ 写成 $k\cdot 360°+\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 的形式，其中 $0°\leqslant\alpha<360°$；

(2)若 $\beta\in[-720°,0°)$ 且与(1)中 α 终边相同(它们的始边重合)，求 β.

解析 (1)$\because -1480°=360°\cdot(-5)+320°$，而 $0°\leqslant 320°<360°$，

$\therefore -1480°=(-5)\cdot 360°+320°$(这里 $k=-5,\alpha=320°$).

(2)由(1)知，$\alpha=320°$，又 β 与 α 终边相同，故 $\beta=k\cdot 360°+320°(k\in\mathbf{Z})$

注意到 $\beta\in[-720°,0°)$，即 $-720°\leqslant\beta<0°$，可得，

$-720°\leqslant k\cdot 360°+320°<0°$，解得，$-\frac{26}{9}\leqslant k<-\frac{8}{9}$，而 $k\in\mathbf{Z}$，

故 $k=-2,-1$. 当 $k=-2$ 时，$\beta=(-2)\cdot 360°+320°=-400°$.

当 $k=-1$ 时，$\beta=-40°$.

思考：在(1)中，若要求把 $-1480°$ 写成 $k\cdot 360°+\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 的形式，其中 $k\in\mathbf{Z}$，$-90°<\alpha<0°$. 那么又应该如何表示？$-1480°=-4\cdot 360°+(-40°)$.

点评 一般地，若 β 与 α 的终边相同，则 $\beta=k\cdot 360°+\alpha$，其中 $k\in\mathbf{Z}$. α 可以是任意角. 若 β 的范围给定，可通过解不等式求出 k 的整数解. 进而求得 β 的值.

例 2 写出终边落在一、三象限角平分线上的角的集合.

解析 可充分借助于图形的直观性进行分析. 如图 4-1 所示. 终边落在一、三象限角平分线上的角可分为两大类. 一类是与 $45°$ 角的终边相同(包括 $45°$ 角)，另一类是与 $225°$ 角的终边相同(包括 $225°$ 角). 设第一类角的集合为 S_1，第二类角的集合为 S_2，依终边相同角的方法可得，

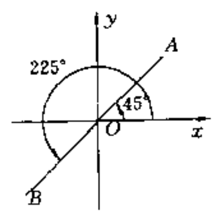

图 4 - 1

$S_1=\{\beta|\beta=k\cdot 360°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$，$S_2=\{\beta|\beta=k\cdot 360°+225°,k\in\mathbf{Z}\}$.

于是，终边落在一、三象限角平分线上的角的集合 S 等于 $S_1\cup S_2$.

即 $S=S_1\cup S_2$

$=\{\beta|\beta=2k\cdot 180°+45°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=(2k+1)\cdot 180°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\beta|\beta=k\cdot 180°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$，

当 k 为偶数时，其终边落在第一象限内，当 k 为奇数时，其终边落在三象限内.

思考：终边落在二、四象限角平分线上的角的集合如何表示？

$S=\{\beta|\beta=n\cdot 180°+135°,n\in\mathbf{Z}\}$，还可以表示为

$S=\{\beta|\beta=n\cdot180°+135°,n\in\mathbf{Z}\}$，也可以表示为 $S=\{\beta|\beta=n\cdot180°+315°,n\in\mathbf{Z}\}$.

表达形式虽然不同，但它们表示的集合完全相同，这点希望同学们引起注意.

点评 一般地，若角的终边落在过原点的一条直线上，如图 1-2 所示，且已知以 OA 为终边的一个角为 α，那么终边落在该直线上的角的集合 S 可以表示为 $S=\{\beta|\beta=k\cdot180°+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$.

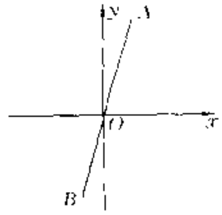

图 1-2

由此可得出下列两个重要结论：(1)终边落在 x 轴上的角的集合为 $\{\beta|\beta=k\cdot180°+0°,k\in\mathbf{Z}\}$；(2)终边落在 y 轴上的角的集合为 $\{\beta|\beta=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

例 3 试写出终边落在坐标轴上的角的集合 S.

解析 终边落在坐标轴上的角可分为两大类.第一类是终边落在 x 轴上的角的集合为 $S_1=\{\beta|\beta=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.第二类是终边落在 y 轴上的角的集合为 $S_2=\{\beta|\beta=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$.显然 $S=S_1\cup S_2$.如何把这两类角进行合并，那就需求出它们的通式.在 S_1 中，$\beta=k\cdot180°=\dfrac{2k}{2}\cdot180°=2k\cdot90°(k\in\mathbf{Z})$.

在 S_2 中，$\beta=k\cdot180°+90°=\dfrac{2k+1}{2}\cdot180°=(2k+1)\cdot90°(k\in\mathbf{Z})$.

故 S 中的元素可以表示为 $\beta=n\cdot90°(n\in\mathbf{Z})$.

所以 $S=S_1\cup S_2=\{\beta|\beta=n\cdot90°,n\in\mathbf{Z}\}$.

在上式中，当 n 为偶数时，终边落在 x 轴上；当 n 为奇数时，终边落在 y 轴上.希望同学们能准确把握 n 的值与 β 角的终边的位置关系.

点评 要想准确恰当简捷地表示角的集合，首先要正确划分角的分类，熟练掌握各种类型角的表示方法及合与拆的基本技能.其次要熟记常见或常用类型的角的表示.这样才能举一反三，融汇贯通.

例 4 如果 α 是第一象限的角，问 $\dfrac{\alpha}{2}$ 是第几象限的角？

解析 第一象限的角可表示为 $k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}$.

所以 $k\cdot180°<\dfrac{\alpha}{2}<k\cdot180°+45°,k\in\mathbf{Z}$.

显然 k 取偶数与奇数，$\dfrac{\alpha}{2}$ 所在的象限是不同的，这时应根据 k 的奇偶性进行分类讨论.

当 k 为偶数时，令 $k=2n(n\in\mathbf{Z})$，则上式可变为

$n\cdot360°<\dfrac{\alpha}{2}<n\cdot360°+45°,n\in\mathbf{Z}$.

逆向思维可知角 $\dfrac{\alpha}{2}$ 的终边一定落在区间 $(0°,45°)$ 内，故 $\dfrac{\alpha}{2}$ 此时为第一象限的角.

当 k 为奇数时，令 $k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$，则上式可变为

$n\cdot360°+180°<\dfrac{\alpha}{2}<n\cdot360°+225°,n\in\mathbf{Z}$.

逆向思维可知角 $\dfrac{\alpha}{2}$ 的终边一定落在区间 $(180°,225°)$ 内，故 $\dfrac{\alpha}{2}$ 此时为第三象限的角.

思考：若 α 是第一象限的角，那么 $\dfrac{\alpha}{3}$ 是否是第一象限的角呢？

点评 学习首先要学会抽象、概括、总结，才能更深刻地理解和掌握其内在的规律，才能提高自身的数学素养.现把在本例中 α 与 $\dfrac{\alpha}{2}$ 所在的区域用阴影表示，你能发现什么样的规律性呢？如图 1-3 和图 1-4 所示，试根据此来总结一下当 α 分别是第二、三、四象限的角时，$\dfrac{\alpha}{2}$ 分别是第几象限的角.并用阴影来表示.

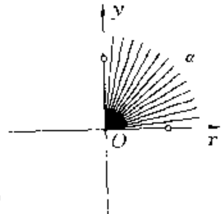

图 1-3

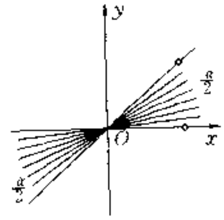

图 1-4

例 5 在直角坐标系中，角 α 的顶点在坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，若 α 的终边过函数 y

$=-2^x$ 与 $y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$ 的两图像的交点，求满足条件的角 α 的集合.

解析　由题设知，函数 $y=-2^x$ 与 $y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$ 的图像的交点在角 α 的终边上. 设此交点的坐标为 $P(x,y)$，则 $y<0$，$x<0$（$\because -x>0$），

∴角 α 为第三象限的角.

又 $y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)=\log_2(-x)$，$y=-2^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数，于是存在反函数 $f^{-1}(x)=\log_2(-x)$，∴ $y=-2^x$ 与 $y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$ 互为反函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称，故它们的交点 P 必在直线 $y=x$ 上，又 P 在第三象限. ∴ $\alpha=k\cdot360^\circ+225^\circ(k\in\mathbf{Z})$.

即角 α 的集合是 $\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+225^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

点评　确定两图像交点的位置是本题的关键.

综合能力训练

一、选择题

1. 若角 α、β 的终边相同，则 $\alpha-\beta$ 的终边在（　　）.

A. x 轴的正半轴　　B. y 轴的正半轴　　C. x 轴的负半轴　　D. y 轴的负半轴

2. 终边与坐标轴重合的角 θ 的集合是（　　）.

A. $\{\theta|\theta=k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$　　B. $\{\theta|\theta=k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\left\{\theta\middle|\theta=\frac{k}{2}\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\right\}$　　D. $\{\theta|\theta=k\cdot180^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

3. 角 α 与 $k\cdot180^\circ+\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 的终边一定（　　）.

A. 相同　　B. 互为反向延长线　　C. 相同或相反　　D. 关于坐标轴对称

4. 若 $\alpha+\beta=k\cdot180^\circ(k\in\mathbf{Z})$，则 α 和 β 的终边一定（　　）.

A. 关于 x 轴对称　　B. 关于 y 轴对称　　C. 关于坐标轴对称　　D. 关于原点对称

5. 若 2θ 角的终边在第三象限，则 θ 角的终边在（　　）.

A. 一或二象限　　B. 一或三象限　　C. 二或四象限　　D. 三或四象限

6. 已知集合 $M=\{x|x=k\cdot45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=k\cdot90^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{x|x=k\cdot180^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，那么（　　）.

A. $P\subsetneqq N\subsetneqq M$　　B. $P=N\subsetneqq M$　　C. $P\subsetneqq N=M$　　D. $P=N=M$

7. 若 α 是第四象限角，则 $180^\circ-\alpha$ 是（　　）.

A. 第一象限角　　B. 第二象限角　　C. 第三象限角　　D. 第四象限角

8. 如果 $-90^\circ<\alpha<\beta<90^\circ$，那么 $\alpha-\beta$ 的取值范围是（　　）.

A. $(-90^\circ,0^\circ)$　　B. $(-90^\circ,90^\circ)$　　C. $(-180^\circ,0^\circ)$　　D. $(-180^\circ,180^\circ)$

9. 如果角 α 的顶点在原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，角 α 的终边上一点 $P(x,y)$ 落在直线 $y=-\sqrt{3}x$ 上（$x^2+y^2\neq0$），那么 α 的集合是（　　）.

A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot180^\circ+150^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$　　B. $\{\alpha|\alpha=k\cdot180^\circ+120^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+120^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$　　D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+150^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

二、填空题

1. 若角 α、β 的终边关于二、四象限的角平分线对称，且 $\alpha=-60^\circ$，则 $\beta=$______.

2. 若 θ 角的终边与 288° 角的终边相同，则在 $[0^\circ,360^\circ]$ 内终边与 $\frac{\theta}{4}$ 角的终边相同的角是______.

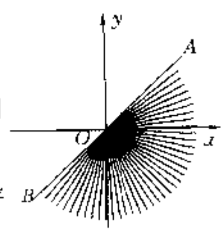

图 4-5

3. 如图 4-5 所示，终边落在阴影部分（包括两条边界射线 OA、OB，其中 AB 是一、三象限的角平分线）的角的集合为______.

4. 已知 $A=\{$锐角$\}$，$B=\{\beta|0^\circ\leqslant\beta\leqslant90^\circ\}$，$C=\{$第一象限角$\}$，$D=\{$小于 90° 的角$\}$，

给出下列四个命题：

(1)$A\subsetneqq B$；(2)$A\subsetneqq D\subsetneqq B\subsetneqq C$；(3)$A=C$；(4)$B$、$C$、$D$ 任意两个集合都互不包含.

其中正确命题的序号是________.

5. 若角 α 与角 β 的终边互相垂直，那么 $\alpha-\beta=$________.

6. 如果集合 $A=\{\alpha|k\cdot 360°+30°<\alpha<k\cdot 360°+150°,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{\beta|k\cdot 360°-90°<\beta<k\cdot 360°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$，那么 $A\cup B=$________________；$A\cap B=$________________.

三、解答题

1. 写出在 $-720°$ 到 $720°$ 之间与 $-1020°$ 终边相同的角.
2. 已知 $0°<\theta<360°$，θ 角的 7 倍的终边和 θ 角的终边相同，求 θ 角.
3. 已知直线 l 是过原点的一条直线，α 是终边落在 l 上的一个已知角，试求终边落在 l 上的角的集合.

4.2 弧度制

重点难点考点

重点：准确理解弧度的意义，能正确地进行弧度与角度的换算.

难点：弧度的概念及其与角度的关系.

考点：在正确理解弧度意义的基础上，熟记特殊角的弧度数，快速正确地进行角度与弧度的换算；掌握弧度制下的弧长公式，会利用弧度解决某些简单的实际问题.

典型例题解析

例 1 已知某扇形的中心角为 $120°$，半径 $R=3$. 求扇形的周长和面积.

解析 设扇形的中心角为 α rad，则 $\alpha=\frac{\pi}{180°}\times120°=\frac{2\pi}{3}$ rad，

所以圆心角所对的弧长 $l=|\alpha|\cdot R=\frac{2\pi}{3}\cdot R=2\pi$.

故扇形的周长 $C=2\pi+6$. 面积 $S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\cdot2\pi\cdot3=3\pi$.

点评 在引入弧度制后，扇形的弧长公式为 $l=|\alpha|R$. 面积公式为 $S=\frac{1}{2}l\cdot R$，这些公式比采用角度制时的相应公式要简单，需要注意的是当所给的角为"度"时，先要换算成弧度，然后再利用公式进行计算.

例 2 若圆心角 θ 所对的弦长等于其所在圆半径的 $\sqrt{3}$ 倍，试求 θ 角的弧度数(正角).

解析 如图 4-6 所示，AB 为 θ 角所对的弦，要想求得 θ 的弧度数，不妨先求得 θ 的角度. 然后再进行弧度换算. 过圆心 O 作 $OC\perp AB$，垂足为 C，由圆的性质可知，C 是 AB 的中点，$\angle AOC=\frac{\theta}{2}$，且在直角三角形 ACO 中，有 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{AC}{R}=\frac{AB}{2R}=\frac{\sqrt{3}R}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

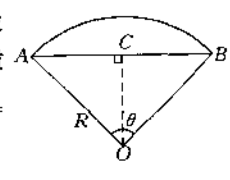

图 4-6

$\therefore\frac{\theta}{2}=60°=\frac{\pi}{3}$ rad，故 θ 的弧度数为 $\frac{2\pi}{3}$.

点评 求弧度数适当转化为求角度数. 当熟练掌握它们之间的计算关系后，可直接求弧度数.

例 3 已知 $\alpha=1690°$.

(1)把 α 写为 $2k\pi+\beta$，$k\in\mathbf{Z}$，$\beta\in[0,2\pi)$ 的形式；

(2)求 θ，使 θ 与 α 的终边相同，且 $\theta\in(-4\pi,-2\pi)$.

解析 本题显然应有把角度制化为弧度制的要求，注意用公式 $1°=\frac{\pi}{180}$ rad.

(1)由题设知，$\alpha=1690°=\frac{\pi}{180}\cdot1690=\frac{169}{18}\pi=8\pi+\frac{25}{18}\pi$，而$\frac{25}{18}\pi\in[0,2\pi)$．

$\therefore\alpha=4\cdot2\pi+\frac{25}{18}\pi$，其中$k=4$，$\beta=\frac{25}{18}\pi$．

(2)由(1)可知，$\theta=2k\pi+\frac{25}{18}\pi(k\in\mathbf{Z})$，

又$\theta\in(-4\pi,-2\pi)$，可得，$-4\pi<2k\pi+\frac{25}{18}\pi<-2\pi(k\in\mathbf{Z})$，

解得　$k=-2$，$\therefore\theta=-4\pi+\frac{25}{18}\pi=-\frac{47}{18}\pi$．

点评　只有熟练地掌握角度与弧度的换算公式，才能快速准确地求解．另外求具有限制范围的角θ，可转化为求不等式的整数解问题．这种转化的思想应不断体会，逐步领悟，才能有所进步．

例4　一个扇形的周长为C，问当它的圆心角θ取何值时，此扇形的面积最大，最大值是多少？

解析　设此扇形的弧长为l，半径为R，圆心角为θ，则有$2R+l=C$，$\theta=\frac{l}{R}$．

$$\begin{aligned}\therefore S&=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}R(C-2R)\\&=-R^2+\frac{1}{2}CR=-\left(R^2-2\times\frac{1}{4}CR+\frac{1}{16}C^2\right)+\frac{1}{16}C^2\\&=\frac{1}{16}C^2-\left(R-\frac{1}{4}C\right)^2.\end{aligned}$$

$\therefore$当且仅当$R=\frac{1}{4}C$时，S有最大值，其最大值为$\frac{1}{16}C^2$，此时$C=2R+l=\frac{1}{2}C+l$．

$$\therefore l=\frac{1}{2}C,\ \therefore\theta=\frac{l}{R}=\frac{\frac{1}{2}C}{\frac{1}{4}C}=2(\text{rad}).$$

即当$\theta=2$ rad时，面积S有最大值，其最大值$S_{\max}=\frac{1}{16}C^2$．

点评　本题最关键的问题是建立关于S的模函数，化为一元二次函数的最值问题求解．

综合能力训练

一、选择题

1. 下列终边相同的角是(　　)．

A. $k\pi+\frac{\pi}{2}$与$k\cdot90°(k\in\mathbf{Z})$　　B. $(2k+1)\pi$与$(4k\pm1)\pi(k\in\mathbf{Z})$

C. $k\pi+\frac{\pi}{6}$与$2k\pi\pm\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$　　D. $\frac{k\pi}{3}$与$k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$

2. 若角α与β的终边互为反向延长线，则α与β的关系是(　　)．

A. $\alpha=-\beta$　　B. $\alpha=-2\pi+\beta$

C. $\alpha=\pi-\beta$　　D. $\alpha=(2k+1)\pi+\beta(k\in\mathbf{Z})$

3. 如果角α与角$x+\frac{\pi}{4}$也具有同一条终边，角β与角$x-\frac{\pi}{4}$也具有同一条终边，那么α与β间的关系是(　　)．

A. $\alpha+\beta=0$　　B. $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$

C. $\alpha-\beta=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$　　D. $\alpha-\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

4. 已知2 rad的圆心角所对的弦长为2，那么这个圆心角所对弧的弧长是(　　)．

A. 2　　B. $\sin2$　　C. $\frac{2}{\sin1}$　　D. $2\sin1$

5. 已知扇形的周长是6 cm，面积为2 cm²，则扇形的中心角的弧度数是(　　)．

A. 1　　B. 4　　C. 1 或 4　　D. 2 或 4

6. 小于 $\frac{\pi}{2}$ 的角是这个角为第一象限角的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

1. 在半径为 r 的 $\odot O$ 中，半径 OP 绕圆心 O 沿顺时针方向旋转了三周半，由此所形成的圆心角的弧度数为________.
2. 用弧度制来表示终边在坐标轴上的角的集合为________.
3. 圆的半径是 6 cm，则 15°的圆心角所对的弧长是________，扇形的面积是________.
4. 时间经过 5 小时 15 分钟，则时针转了________ π rad，分针转了________ π rad.
5. 半径为 2 m 的圆中，120°的圆心角所对的圆弧长为________ m.
6. 把角 $-\frac{25}{6}\pi$ 写成 $2k\pi+\alpha$，其中 $k\in\mathbf{Z}$，$\alpha\in[0,2\pi)$ 的形式后，那么 $k=$________，$\alpha=$________.

三、解答题

1. 一个半径为 r 的扇形，若它的周长等于弧所在的半圆的长，那么扇形的圆心角是多少弧度？是多少度？扇形的面积是多少？
2. 在扇形 AOB 中，$\angle AOB=90°$，$\overset{\frown}{AB}=l$，求此扇形的内切圆的面积.
3. 已知 $\frac{\pi}{3}<\alpha+\beta<\frac{4\pi}{3}$，$\frac{-2\pi}{3}<\alpha-\beta<-\frac{\pi}{3}$，求 $2\alpha-\beta$ 的范围.

4.3　任意角的三角函数

重点难点考点

重点：任意角的正弦、余弦、正切的定义(包括这三种三角函数的定义域和函数值在各象限的符号)，以及这三种函数的第一组诱导公式.

难点：利用与单位圆有关的有向线段，将任意角 α 的正弦、余弦、正切函数值分别用它们的几何形式表示出来.

考点：利用三角函数的定义确定三角函数值的符号，求三角函数值及定义域，进行一般地化简、求值、证明.

典型例题解析

例 1　角 α 终边上一点 P 的坐标为 $(4t,-3t)$，求 α 的各三角函数值(其中 $t\neq 0$).

解析　点 P 所在的象限由 t 的符号确定，所以应对 t 进行讨论. 再利用三角函数的定义求各三角函数值. 据题意，有 $x=4t$，$y=-3t$，所以由 $|OP|=r$ 得，$r=\sqrt{(4t)^2+(-3t)^2}=\sqrt{25t^2}=5|t|$.

(1)当 $t>0$ 时，α 是第四象限角.

如图 4-7 所示，由三角函数的定义可得，

$\sin\alpha=\frac{y}{r}=-\frac{3t}{5|t|}=-\frac{3t}{5t}=-\frac{3}{5}$，

$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{4t}{5|t|}=\frac{4t}{5t}=\frac{4}{5}$，

$\tan\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{3t}{4t}=-\frac{3}{4}$.

同理可求得，$\csc\alpha=-\frac{5}{3}$，$\sec\alpha=\frac{5}{4}$，$\cot\alpha=-\frac{4}{3}$.

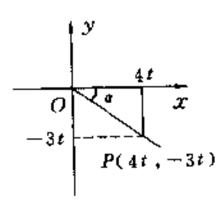

图 4-7

(2)当 $t<0$ 时，α 是第二象限的角. 如图 4 - 8 所示.

由三角函数的定义可求得，

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，$\csc\alpha=\frac{5}{3}$，$\sec\alpha=-\frac{5}{4}$，$\cot\alpha=-\frac{4}{3}$.

思考：在上题中，为什么要求 $t\neq0$ 呢？

点评 由于三角函数值与其终边上点的位置无关，只与角的大小有关，所以只要给定终边上一点的坐标，就可求得它的所有三角函数值. 另外，若坐标中含有参数，就需对参数进行分类讨论. 分类的基本原则就是不重不漏.

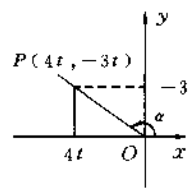

图 4 - 8

例 2 已知集合 $E=\{\theta|\cos\theta<\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$，$F=\{\theta|\tan\theta<\sin\theta\}$，那么 $E\cap F$ 是什么样的区间？

解析 由正弦线，余弦线的定义可知：

一、三象限角平分线上方对应 $\cos\theta<\sin\theta$，

$\therefore E=\left\{\theta\left|\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}\right.\right\}$，又 $\because F=\{\theta|\tan\theta<\sin\theta\}$，可知 θ 应在第二象限或第四象限.

$\therefore E\cap F=\left\{\theta\left|\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right.\right\}=\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

点评 三角函数线具有直观性. 对于比较三角函数值之间的大小问题，利用三角函数线往往可以化难为易，化繁为简，起到事半功倍之效.

例 3 (1)若 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin\theta+\cos\theta$ 的一个可能值是(　　)；

A. $\frac{2}{3}$　　　B. $\frac{\pi}{3}$　　　C. $\frac{3}{\pi}$　　　D. 1

(2)设 α 是第四象限的角，则 $\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的大小关系是(　　).

A. $\sin\alpha>\tan\alpha$　　　B. $\sin\alpha<\tan\alpha$　　　C. $\sin\alpha\geqslant\tan\alpha$　　　D. 不确定

解析 (1)如图 4 - 9 所示，设 $P(x,y)$ 是角 θ 终边上任意一点，且 $|OP|=r$，则 $\sin\theta=\frac{y}{r}$，$\cos\theta=\frac{x}{r}$.

从而 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{x}{r}+\frac{y}{r}=\frac{x+y}{r}$.

$\because\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore x>0,y>0$，且 $x+y>r$，

$\therefore\sin\theta+\cos\theta>1$，故选 B.

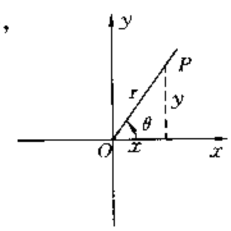

图 4 - 9

(2)数形结合，充分利用三角函数线的直观性进行分析，如图 4 - 10 所示，作单位圆，OP 是角 α 的终边，有向线段 MP，AT 就分别是角 α 的正弦线和正切线，即 $\sin\alpha=MP$，$\tan\alpha=AT$，显然 $MP<0$，$AT<0$. 且 $|MP|<|AT|$，$\therefore MP>AT$，即 $\sin\alpha>\tan\alpha$. 故选 A.

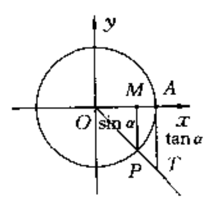

图 4 - 10

例 4 已知 $\tan\alpha=2$，求 α 的其他各三角函数值.

解析 $\tan\alpha=2$，先把 α 当作锐角.

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，$AB=2k$，$AC=k$. $(k>0)$

$\therefore$ 由勾股定理知：$BC=\sqrt{5}k$.

$\therefore\cot\alpha=\frac{1}{2}$，$\sin\alpha=\frac{2k}{\sqrt{5}k}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\sec\alpha=\sqrt{5}$，$\csc\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

$\therefore$ 当 α 在第一象限时，

$\cot\alpha=\frac{1}{2}$，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sec\alpha=\sqrt{5}$，$\csc\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

当 α 在第三象限时，

$\cot\alpha=\frac{1}{2}$，$\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sec\alpha=-\sqrt{5}$，$\csc\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

点评 已知某角的一个三角函数值的正负，求该角的其他三角函数值，这类题目一般都有两组解.

例 5 已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求证：$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

解析 此题是数形结合的典例，要充分利用三角函数线的直观性，巧妙地把代数问题转化为几何问题求解.

如图 4 - 11 所示，在单位圆中，A 是单位圆与 x 轴正半轴的交点，P 是角 α 的终边与单位圆的交点，T 是过 A 与圆相切的直线与角 α 的终边的交点. M 是 P 在 x 轴上的垂足，由三角函数线的定义可知，$\sin\alpha=MP$，$\tan\alpha=AT$. 如何寻求 $\sin\alpha$，α，$\tan\alpha$ 的大小关系呢？仔细观察你会发现 $\triangle OPA$，扇形 OPA，$\triangle OTA$ 的面积的大小关系一目了然. 显然有

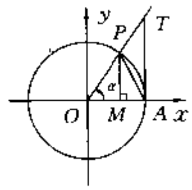

图 4 - 11

$S_{\triangle OPA}<S_{扇形OPA}<S_{\triangle OTA}$，①

而 $S_{\triangle OPA}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot MP=\frac{1}{2}\times1\times\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha$，②

$S_{扇形OPA}=\frac{1}{2}\cdot OP\cdot\overset{\frown}{AP}=\frac{1}{2}\times OP\times\alpha\times OP=\frac{1}{2}\times1\times\alpha\times1=\frac{1}{2}\alpha$，③

$S_{\triangle OTA}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot AT=\frac{1}{2}\times1\times\tan\alpha=\frac{1}{2}\tan\alpha$. ④

综合①、②、③、④可得，$\frac{1}{2}\sin\alpha<\frac{1}{2}\alpha<\frac{1}{2}\tan\alpha$.

即 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

思考：当 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，试比较 α，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的大小. 显然有 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$，只需研究 $\cos\alpha$ 与 $\sin\alpha$，α，$\tan\alpha$ 的大小关系，当 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，由于 $\triangle OPM$ 为直角三角形，根据大角对大边，

∴有 $MP>OM$ 即 $\sin\alpha>\cos\alpha$，

综上有 $\cos\alpha<\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

点评 数形结合是高中数学重要的思想方法. 这就需要同学们学会观察、分析，充分挖掘数中隐含的几何关系，才能真正化难为易，尽快提高解题能力. 本题中的结论比较重要，要求同学们最好能够记住，从而为今后三角函数的求值、证明奠定扎实的基础.

综合能力训练

一、选择题

1. 若 α 为第二象限角，其终边上一点为 $P(x,\sqrt{5})$，且 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}x$，则 $\sin\alpha$ 的值为(　　).

A. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $-\frac{\sqrt{10}}{4}$

2. 若角 α 的终边与直线 $y=3x$ 重合，且 $\sin\alpha<0$，又 $P(m,n)$ 是 α 终边上一点，且 $|OP|=\sqrt{10}$，则 $m-n$ 等于(　　).

A. 2　　B. -2　　C. 4　　D. -4

3. 若 θ 为第一象限角，那么能确定为正值的是(　　).

A. $\cos 2\theta$　　B. $\sin\frac{\theta}{2}$　　C. $\cos\frac{\theta}{2}$　　D. $\tan\frac{\theta}{2}$

4. 已知锐角 α 终边上一点 A 的坐标为 $(2\sin 3,-2\cos 3)$，则 α 的弧度数为(　　).

A. 3　　B. -3　　C. $3-\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{2}-3$

5. 已知点 $P(\sin\alpha-\cos\alpha,\tan\alpha)$ 在第一象限，则在 $[0,2\pi)$ 内，α 的取值范围是（　　）.

A. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

6. 满足 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 的角 α 有（　　）.

A. 1个　　B. 2个　　C. 有限多个　　D. 无数多个

7. 函数 $f(x)=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}+\frac{|\cot x|}{\cot x}$ 的值域是（　　）.

A. $\{-2,4\}$　　B. $\{4,2,0,-2\}$　　C. $\{-2,0,4\}$　　D. $\{-4,-2,0,4\}$

8. 若 α 为第一象限角，那么 $\sin 2\alpha,\cos 2\alpha,\sin\frac{\alpha}{2},\cos\frac{\alpha}{2}$ 中必定取正值的有（　　）.

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

9. 若 $\sin\alpha>\tan\alpha>\cot\alpha\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，则 α 的取值范围是（　　）.

A. $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$　　B. $\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$　　C. $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

二、填空题

1. 若 $\sin\alpha=\cos\alpha$，则 $\alpha=$________.

2. 已知角 α 终边上一点 $P(8m,15m)$，$m<0$，则 $\tan\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}=$________.

3. 已知角 α,β 终边不重合，且有 $\sin\alpha=\sin\beta$，则 α,β 的终边关于________对称.

4. 一束光线穿过折射率为 1.5，厚度为 1 cm 的一块玻璃，已知光线与玻璃表面成 45°角，那么光线在玻璃内的行程是________.

三、解答题

1. 已知角 α 的终边经过点 $P(m,0)$，$m\neq 0$，求 $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha$ 的值.

2. 已知角 α 的终边经过点 $P(-3\cos\theta,4\cos\theta)$，其中 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求 α 的六种三角函数值.

3. 已知实数 α,β 满足 $|\cos\alpha-\cos\beta|=|\cos\alpha|+|\cos\beta|$，且 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，若 $|\cos\alpha|=\frac{1}{3}$，$|\cos\beta|=\frac{1}{4}$.

求 $\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2}$ 的值.

4. 求适合等式 $\frac{1-\cos x+\sin x}{1+\cos x+\sin x}+\frac{1+\cos x+\sin x}{1-\cos x+\sin x}=2$ 的最小正角.

4.4　同角三角函数的基本关系式

重点难点考点

重点：公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 及 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ 的推导及下述应用：

(1)已知某任意角的正弦、余弦、正切值中的一个，求其余两个；

(2)化简三角函数式；

(3)证明简单的三角恒等式.

难点：根据角 α 边所在象限求出其三角函数值是本小节的一个难点，它的结果不惟一，需要讨论.

考点：正确运用平方根及象限角的概念解决难点中的问题.高考中以求值、证明为主，以中档题出现，题型不限.

典型例题解析

例1 已知 $\sin\alpha=m$,求 $\cos\alpha$、$\tan\alpha$ 的值.

解析 应分 $m>0, m<0, m=0$ 三种情形讨论.

(1)当 $m>0$ 且 $m\neq1$ 时,α 的终边在一、二象限.

若 α 的终边在第一象限,则 $\cos\alpha=\sqrt{1-m^2}$,$\tan\alpha=\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}=\frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$.

若 α 的终边在第二象限,则 $\cos\alpha=-\sqrt{1-m^2}$,$\tan\alpha=-\frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$.

当 $m=1$ 时,$\cos\alpha=0$,$\tan\alpha$ 的值不存在.

(2)当 $m<0$ 且 $m\neq-1$ 时,α 的终边在三、四象限.

若 α 的终边在第三象限,则 $\cos\alpha=-\sqrt{1-m^2}$,$\tan\alpha=-\frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$.

若 α 的终边在第四象限,则 $\cos\alpha=\sqrt{1-m^2}$,$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$.

当 $m=-1$ 时,则 $\cos\alpha=0$,$\tan\alpha$ 的值不存在.

(3)当 $m=0$ 时,则 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-m^2}=\pm1$,$\tan\alpha=0$.

点评 对于用字母表示的三角函数值,再求其他三角函数值时,一般情况下都需要进行分类讨论,分类要把握好基本原则:不重不漏,特别是一些特殊情况要单独讨论.例如上例中的 $m=1, m=-1, m=0$.

例2 若 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=1$,求 $\sin\theta+\cos\theta$ 与 $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ 的值.

解析 由题设得 $(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta)=1$.

$\therefore(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cdot\cos\theta)=1$. ①

又 $\because\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,$\therefore(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cdot\cos\theta=1$,

令 $\sin\theta+\cos\theta=t$,$t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$,$\therefore\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$.

代入①式,$\therefore t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=1$,即 $t^3-3t+2=0$.

$\therefore(t-1)^2(t+2)=0$,$\therefore t=1$,或 $t=-2$(舍)

$\therefore\sin\theta\cdot\cos\theta=0$,$\sin\theta+\cos\theta=1$.

$\therefore\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta=1$.

点评 本题可继续探索得 $\sin^5\theta+\cos^5\theta=1$,$\sin^6\theta+\cos^6\theta=1$,

一般地有:$\sin^n\theta+\cos^n\theta=1\ (n\geqslant4)$.

$\sin\theta+\cos\theta$,$\sin\theta-\cos\theta$,$\sin\theta\cdot\cos\theta$ 三者之间的关系是极为密切的.若知其一,另两个必能用它表示.例如 $\sin\theta+\cos\theta=t$,$\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$,$\sin\theta-\cos\theta=\pm\sqrt{2-t^2}$,由此可解决极值、方程、求值等问题.

例3 当 $\alpha\in(0,\pi)$ 时,化简 $\sqrt{1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}+\sqrt{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$.

解析 化简含有二次根号的式子,通常应考虑被开方数是否可以配成完全平方式.这里只要注意到 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,问题就会迎刃而解.

$$\begin{aligned}原式&=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}+\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}\\&=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}+\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}\\&=|\sin\alpha-\cos\alpha|+|\sin\alpha+\cos\alpha|.\end{aligned}$$

要想去掉绝对值符号,须紧扣题设中的 $0<\alpha<\pi$ 来进行.

(1)当 $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$ 时,有 $\sin\alpha\leqslant\cos\alpha$,$\sin\alpha+\cos\alpha>0$,

于是原式 $=\cos\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha+\cos\alpha=2\cos\alpha$.

(2) 当 $\frac{\pi}{4}<\alpha\leqslant\frac{3\pi}{4}$ 时，有 $\sin\alpha>\cos\alpha$，$\sin\alpha+\cos\alpha\geqslant0$，

于是原式 $=\sin\alpha-\cos\alpha+\sin\alpha+\cos\alpha=2\sin\alpha$.

(3) 当 $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$ 时，$\sin\alpha>\cos\alpha$，$\sin\alpha+\cos\alpha<0$.

于是原式 $=\sin\alpha-\cos\alpha-(\sin\alpha+\cos\alpha)=-2\cos\alpha$.

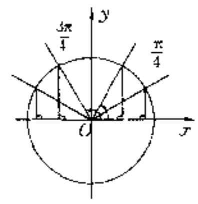

图4-12

点评　判断 $\sin\alpha\pm\cos\alpha$ 的符号时，仍可以单位圆为工具，如图4-12所示，利用图形可以直观观察出在各个区间内正弦值和余弦值的绝对值的关系和大小关系，进而使分类目标明确.

例4　已知：$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=m$，$b\sin^2\varphi+a\cos^2\varphi=n$，$a\tan\theta=b\tan\varphi$，$(a\neq b,a\neq m,b\neq n)$.

求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$.

解析　$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=m$，$\therefore a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=m(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$.

$\therefore(a-m)\sin^2\theta=(m-b)\cos^2\theta$，$\therefore\tan^2\theta=\frac{m-b}{a-m}$.

又 $\because b\sin^2\varphi+a\cos^2\varphi=n$，$\therefore(b-n)\sin^2\varphi=(n-a)\cos^2\varphi$，

$\therefore\tan^2\varphi=\frac{n-a}{b-n}$.

又 $\because a\cdot\tan\theta=b\cdot\tan\varphi$，$\therefore a^2\cdot\tan^2\theta=b^2\cdot\tan^2\varphi$.

$\therefore a^2\cdot\frac{m-b}{a-m}=b^2\cdot\frac{n-a}{b-n}$. 化简得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$.

点评　条件式有三个，且存在着角与三角函数的差异，所以为证明结论成立，首先必须将条件内部"化同". 由结论式中不含 θ，φ 及其三角函数得到启发，应设法将条件式中的三角函数消去. 总之，只要所讨论问题中存在差异，就应该化同，这是数学解题必须遵循的原则.

综合能力训练

一、选择题

1. 当 $x\neq\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\frac{\sin x-\tan x}{\cos x-\cot x}$ 的值(　　).

　A. 恒为正　　B. 恒为负　　C. 恒为非负　　D. 不确定

2. 已知 $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$，$x\in(0,\pi)$，则 $\tan x$ 的值是(　　).

　A. $-\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{4}{3}$　　C. $\pm\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{3}{4}$ 或 $-\frac{4}{3}$

3. 若 $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}$，则 $\tan\alpha+\cot\alpha$ 等于(　　).

　A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

4. 使 $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\cot\alpha-\frac{1}{\sin\alpha}$ 成立的 α 的取值范围是(　　).

　A. $2k\pi-\pi<\alpha<2k\pi(k\in\mathbf{Z})$　　B. $2k\pi-\pi\leqslant\alpha\leqslant2k\pi(k\in\mathbf{Z})$

　C. $2k\pi-\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$　　D. 只能是第三或第四象限角

5. 若 $\alpha\in(\pi,2\pi)$，$\tan\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值是(　　).

　A. $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　B. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　D. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

6. 已知 $a\in(0,1)$，x 是三角形的一个内角，$\tan x=\frac{2a}{a^2-1}$，则 $\cos x$ 等于(　　).

A. $\frac{2a}{a^2+1}$　　B. $\frac{1-a^2}{a^2+1}$　　C. $\frac{a^2-1}{a^2+1}$　　D. $\pm\frac{a^2-1}{a^2+1}$

7. 若 $\tan\alpha+\cot\alpha=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$，则 $\tan^3\alpha+\cot^3\alpha$ 的值为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -1 或 2

8. 已知 $5\tan\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}=5$，则 $\cos\alpha$ 的值为(　　).

A. $\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{4}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$或$-\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{3}{5}$或$\frac{4}{5}$

9. 若角 α 的终边落在直线 $x+y=0$ 上，则 $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}+\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ 的值等于(　　).

A. 2　　B. -2　　C. 1　　D. 0

10. 已知 $\frac{\sin^2\theta-4}{\cos\theta+1}=2$，那么 $(\cos\theta+3)(\sin\theta+1)$ 的值是(　　).

A. 6　　B. 4　　C. 2　　D. 0

11. 设 θ 是三角形内角，若函数 $f(x)=x^2\cos\theta-4x\sin\theta+6$ 对一切 x 都有 $f(x)>0$，则 θ 的取值范围是(　　).

A. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$　　C. $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$　　D. $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$

二、填空题

1. 如果 $\sin x+\cos x=1$，则 $\sin^n x-\cos^n x(n\in\mathbf{N}^*)$ 的值是________.

2. 如果 $\sin x-\cos x=\frac{1}{2}$，则 $\sin^3 x-\cos^3 x=$________.

3. $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)=$________.

4. 已知 $\tan\alpha=2$，则 $\frac{2}{3}\sin^2\alpha-\frac{1}{4}\cos^2\alpha=$________，$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=$________.

5. 已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，且 α 是第二象限角，则 $\tan\alpha=$________.

三、解答题

1. 设 $\cos\theta=m(|m|\leqslant1)$，求 $\sin\theta$ 和 $\tan\theta$ 的值.

2. 已知 $\theta\in(0,\pi)$ 且 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 是方程 $5x^2-x-\frac{12}{5}=0$ 的两根，试求 $\sin^3\theta+\cos^3\theta$，$\tan\theta+\cot\theta$ 及 $\tan\theta-\cot\theta$ 的值.

3. 设 $\frac{\sin\alpha}{a^2-1}=\frac{\cos\alpha}{2a\sin2\beta}=\frac{1}{1+2a\cos2\beta+a^2}$，求证：$\sin\alpha=\frac{a^2-1}{a^2+1}$.

4. 已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，若 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，求 $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha+1}{1-\tan\alpha}$ 的值.

5. 已知关于 x 的方程 $2x^2-(\sqrt{3}+1)x+m=0$ 的两根为 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$，$\theta\in(0,2\pi)$，求

(1) $\frac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$ 的值；

(2)求 m 的值；

(3)求方程的两根及此时 θ 的值.

4.5　正弦、余弦的诱导公式

重点难点考点

重点：四组诱导公式，以及这四组公式和第 4.3 节中的第一组诱导公式的综合运用.

难点：把这五组公式用一句话归纳出来，并切实理解这句话中每一词语的含义.