胡中楫　邹伯敏
林冬青　曹　毅　编

最优

最优控制

最优控制原理及应用

Optimal control

浙江大学出版社

最优控制原理及应用

胡中楫　邹伯敏
林冬青　曹　毅　编

浙江大学出版社

内 容 简 介

本书是最优控制方面的基础教材，基本理论和应用并重。内容分两大部份：第一部份（一、二章）为静态最优化，包括线性规划和非线性规划的一些基本理论和算法；第二部份（三至九章）为最优控制，包括变分极值问题、最小值原理、最小能耗控制、最少燃料控制、二次型指标、动态规划和最优控制的直接法的各种算法。各章结尾配有应用实例和习题。

本书重基本原理和基本概念，容易读懂。可作为高等院校工科自动化类高年级大学生或研究生的教材或参考书；也可供相应领域的教师、科学工作者和工程技术人员参考。

最优控制原理及应用

胡中楫 邹伯敏 林冬青 曹毅 编

责任编辑 谢晗

* * *

浙江大学出版社出版

浙江大学印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

* * *

787×1092 16开本29.75印张705千字

1988年10月第1版 1988年10月第1次印刷

印数：1—3000

ISBN 7-308-00090-X

TP·008 定价：5.80元

前　言

最优控制是由庞特里亚金和贝尔曼在50年代做了奠基性工作而确立的。到现在已经历了30多年，在此期间自动控制理论由经典到现代、到大系统、到智能化得到了很大发展。而最优控制，总是作为一种控制手段，在各种控制系统中，起着重要的作用。其本身在应用和算法方面，亦有不少的发展，它已成为自动化学科中的一门基础课程。

本来，控制总是与动态系统联系在一起的，即所研究控制规律的作用对象是由微分方程描述。在一定的约束条件下，系统从某一状态到另一终止状态，使预定的目标函数达到极值所需的控制规律即为最优控制。现在有一大类问题，有约束条件，有目标函数，亦是寻优问题，但对象却由代数方程所描述。这样的问题，一般称为最优问题。其实，它所讨论的问题，可以说是最优化问题中时间域上一个点的问题。把动态系统作为稳态来处理，微分方程化为代数方程，控制问题化为规划问题，所以，它们是有共同点的，我们把这部份内容亦编入书中，称为静态最优化。这样，全书在优化方面就比较完整，可以适应各种不同的实际最优化问题的需要，亦可使读者学了本书之后，能获得比较宽广的理论和实际知识。在早期的研究工作中，人们常常把一些缓慢变化的过程在某段时间内当作静态问题来处理，用静态最优解来指导生产和社会实践。现在逐步发现，要全面把握住事物，必须将事物的历史、现状和发展连起来考虑，这就是动态模型及其控制策略。它包含对系统的控制和预测，能比较有效的掌握系统的发展规律，这是一个进步。从经典经济学到现代的动态经济学就是一个例子。

虽然静态最优与动态最优有共同的地方，但我们现在还没有力量把它们的基础统一起来，形成一种统一的理论和算法。目前，从理论上讲，前者属于运筹学范畴，后者属于变分学范畴，其基础理论框架是不一样的。但在直接法的算法上却有共同之处，限于篇幅，书中我们只把一些最基本的理论和算法作了介绍。

本书是以胡中楫的同名教材改编而成。该教材已在浙江大学工业自动化专业研究生课程中用过多次。经过几年的科研和教学实践，积累了一些经验，在此基础上，充实内容，编写此书。本书的主导思想是原理与应用并重。书中给出了必要的定理和规律，不是从数学角度严格给予证明，而是强调从原理上证明和概念上的阐述，使读者容易读懂并且能够比较牢固地掌握基本原理和基本概念。此外，在每一章的结尾，加了一些应用实例，以阐明其应用。这对当前控制理论在应用方面还存在着薄弱环节的情况下，无疑是颇有意义的。希望通过这些实例能引起读者的兴趣，并能对读者自己在该领域的实践有所裨益。本书可以作为高等院校工科自动化类高年级大学生选修课的教材或参考书。

本书由胡中楫（三、四、五章）、邹伯敏（七、八章）、林冬青（一、二章）、曹毅（六、九章）等同志编写。王懋堃教授仔细审阅了稿件，提出了许多极为宝贵的建议和修正，在此表示衷心的感谢。

限于水平，书内错误和不妥之处，希望读者指正。

胡中楫1986年4月于杭州

目　　录

第五章 最小能耗控制

第六章 最少燃料控制

第七章 具有二次型性能指标的最优线性系统

第八章 动态规划

第一章　线性规划

本章和下一章的非线性规划所研究的问题是属于静态最优化问题。静态，是指系统处于稳定的工作状态，其数学模型不是微分方程而是代数方程。因此，静态最优问题，就是不考虑时间因素情况下，选择系统参数，使其处于最优状态下工作。所谓最优是用一个能反映控制效果的目标函数来衡量的。而目标函数的确定要从经济效果、设备性能、政策界线等方面综合考察来求得。

线性规划问题是最优化问题中最简单，又重要，而且实用上具有普遍意义的问题。该问题的目标函数和所有约束条件都是线性的。

本章主要介绍求解线性规划问题时，非常有效的单纯形法，修正单纯形法和对偶单纯形法。

1-1　线性规划的数学模型

在实际中，常常碰到这样一些问题，即在满足一定的要求下，使有限的人力，物力得到最优的分配，从而获得某些量如产品利润的最大或某些量如成本的最小。下面试举例说明。

例1-1　生产按排问题　一家工厂用M_1、M_2、M_3三种原料生产A、B两种产品。已知生产 1 吨A需要 1 吨 M_1 和 2 吨 M_2，生产 1 吨B需要 1 吨M_1、 1 吨M_2和 1 吨M_3。 1 吨产品A可得利润50元， 1 吨B可得利润100元。现有原料M_1为300吨，M_2为 400 吨和M_3为250吨。问A、B产品各生产多少吨时其利润最大?

例1-2　饲料配方问题　某种饲料要求由M_1、M_2、M_3和M_4四种原料成份组成。这些原料含可消化比为a_{11}，a_{12}，a_{13}和a_{14}，粗蛋白含量分别为a_{21}，a_{22}，a_{23} 和 a_{24}，粗纤维含量分别为a_{31}，a_{32}，a_{33}和a_{34}，价格分别为c_1、c_2、c_3和c_4。现要求饲料可消化含量不得小于A，粗蛋白含量不得小于 B，粗纤维含量不得大于 C。(均以每公斤计)问每公斤饲料中含各种原料各为多少时其成本最低?

在例1-1中，如设产品A计划生产x_1吨，产品B计划生产x_2吨，利润为z元，则可用数学语言表述成

求x_1、x_2使目标函数

$$z = 50x_1 + 100x_2$$

在约束条件

$$x_1 + x_2 \leqslant 300$$

$$2x_1 + x_2 \leqslant 400$$

$$x_2 \leqslant 250$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

之下最大。

与例1-1类似，在例1-2中如设每公斤饲料中四种原料M_1、M_2、M_3和M_4的含量分别为x_1、x_2、x_3和x_4公斤，成本为z元，则可表述成

求x_1、x_2、x_3和x_4使目标函数

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

在约束条件

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \geqslant A$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \geqslant B$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \leqslant C$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0$$

之下为最小。

显然，上例中的目标函数和约束条件都是变量的线性函数，故属于线性规划问题。因此，我们把线性规划问题的数学模型表示如下：

$$\max \quad z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{1-1-1}$$

$$\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}_0 \tag{1-1-2}$$

$$\mathbf{x} \geqslant 0 \tag{1-1-3}$$

式中 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n]^T$；

$\mathbf{c} = [c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n]^T$；

$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$；

$\mathbf{b}_0 = [b_{01}, b_{02}, \cdots\cdots, b_{0m}]^T$。

式(1-1-1)是目标函数，(1-1-2)、(1-1-3)是约束条件。上面的模型表示求出满足约束条件下使目标函数最大的$\mathbf{x}$。

如将(1-1-2)改为等式，且$\mathbf{b}_0 \geqslant 0$，则上面表达式可写成

$$\max \quad z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{1-1-4}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0 \geqslant 0 \tag{1-1-5}$$

$$\mathbf{x} \geqslant 0 \tag{1-1-6}$$

我们称式(1-1-4)～(1-1-6)为线性规划的标准形。

任何一个线性规划的数学模型都可以化为标准形。其方法如下：

1. 把求极小值化为求极大值。如果目标函数是求极小值问题，则只要把目标函数反号就化为求极大值问题。这是因为，如果$\mathbf{x}^*$满足 $\max z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$，记 $z^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$，则 $z^* \geqslant z$，

即$-z^* \leqslant -z$所以$\mathbf{x}^*$满足$\min(-z=-\mathbf{c}^T\mathbf{x})$。

2．把变量无符号约束化为非负约束。如果变量x_i是无符号约束的(称为自由变量)，为了满足标准形中每个变量非负的要求，则可令x_i等于两个新的非负的变量x_j，x_k之差，即$x_i=x_j-x_k$，$x_j\geqslant 0$，$x_k\geqslant 0$。

3．把约束等式右边负常数化为正常数。如果$b_{0i}(i=1, 2, \cdots, m)$是负常数，则可用$(-1)$乘该约束式两边，使得新的$\mathbf{b}_0\geqslant 0$。

4．把不等式约束化为等式约束。对于“$\leqslant$”型的不等式约束，可用加上一个称为松弛变量的新的非负变量使之成为等式约束。对于“$\geqslant$”型不等式约束，可用减去一个称为剩余变量的新的非负变量使之成为等式约束。

例1-3 化下列线性规划问题的数学模型为标准形。

$$\min \quad z=3x_1+5x_2$$

$$x_1+2x_2\leqslant 1$$

$$x_1+3x_2\geqslant 1$$

$$x_2\geqslant 0$$

解 根据上面叙述方法，先把z的表达式反号，使求极小值问题变为求极大值问题。再引入新的约束变量$x_3\geqslant 0$，$x_4\geqslant 0$，令无约束变量$x_1=x_3-x_4$。最后引入松弛变量x_5和剩余变量x_6，把不等式约束化为等式约束。这样，上面的问题就可化为以下的标准形。

$$\max \quad z'=-3x_3+3x_4-5x_2$$

$$x_3-x_4+2x_2+x_5=1$$

$$x_3-x_4+3x_2-x_6=1$$

$$x_2、x_3、x_4、x_5、x_6\geqslant 0$$

1-2 图解法

对于简单的二变量的线性规划问题可以用图解法来解。下面我们用例1-1来说明图解过程。例1-1的数学模型为

$$\max \quad z=50x_1+100x_2 \tag{1-2-1}$$

$$x_1+x_2\leqslant 300 \tag{1-2-2}$$

$$2x_1+x_2\leqslant 400 \tag{1-2-3}$$

$$x_2\leqslant 250 \tag{1-2-4}$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \tag{1-2-5}$$

首先，找出满足约束方程(1-2-2)～(1-2-5)的解的区域。为此，以x_1、x_2为坐标轴构成x_1x_2平面。为了满足式(1-2-5)，解的区域只能是x_1x_2平面的第一象限。在x_1x_2平面上作

一根$x_1+x_2=300$直线，则该直线和它下面的点都满足式（1-2-2）。类似地，我们可以找到满足式(1-2-3)，(1-2-4)的区域。图 1-1 上用阴影表示凸多边形上任何点都同时满足题中四个约束方程。因此，问题的解只能在阴影区域上。

接着，我们设法在阴影区域上找到一点使其目标值最大，那么这一点就是问题的解。当z是常数时，式（1-2-1）$z=50x_1+100x_2$ 表示一条直线。不同的z值，得到不同的直线。但它们都和$50x_1+100x_2=0$ 这条直线相平行的，且 z 值愈大，直线向上方移动得愈远。因此，和 $50x_1+100x_2=0$ 的直线平行距离d_{max} 最远，且又在凸多边形上的一点就是问题的解。如图 1-1上 A 点。显然，二变量线性规划问题的解(如有唯一解的话)是在解区域凸多边形的顶点上。对于多变量线性规划问题的解亦具有类似结论。

线性规划问题的解具有以下四种情况：

1．**唯一解** 如本例所述。

2．**无穷多个解** 如果把例 1-1 的目标函数改为 $\max z=x_1+x_2$，则图1-1的凸多边形的边AB上所有点都是问题的解。因此，解是无穷多个。

3．**解为无穷大** 如果例 1-1 中式(1-2-2)，(1-2-3)约束条件不存在，则解的区域可以沿x_1轴伸向无穷，故解为无穷大。

4．**无解** 如果把式(1-2-3)约束条件改为 $x_1+x_2\geqslant400$，则从图 1-2 知，不存在同时满足约束条件的区域。因此问题无解。

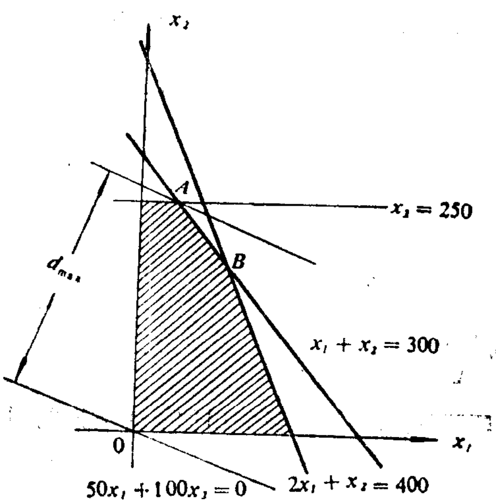

图 1 例1-1的图解

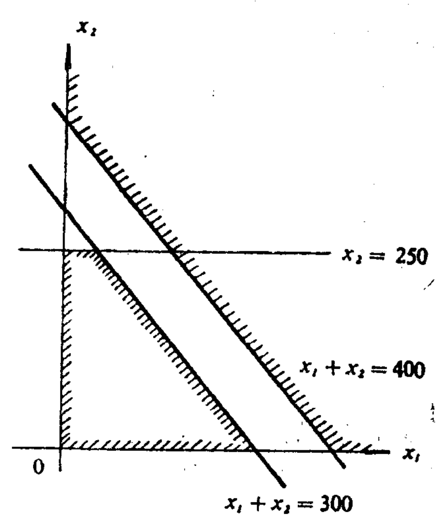

图 2 线性规划问题无解

1-3 线性规划的基本定理

本节先给出几个定义，再介绍线性规划的基本定理。

1.**凸集** 设D为n维欧氏空间的一个集合，若其中任意两点$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$的联线都属于集合D，则称这集合D是n维欧氏空间的一个凸集。如果用$\mathbf{x}$表示$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$的联线上任一点，则

$$\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}_1+(1-\alpha)\mathbf{x}_2 \tag{1-3-1}$$

式中，α是(0,1)上的某一值。我们称$\mathbf{x}$是$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$的凸组合。

从几何上看，凸集是内部没有“洞”，边界不内凹的点的集合。图 1-3 表示平面上的凸集和非凸集图例。

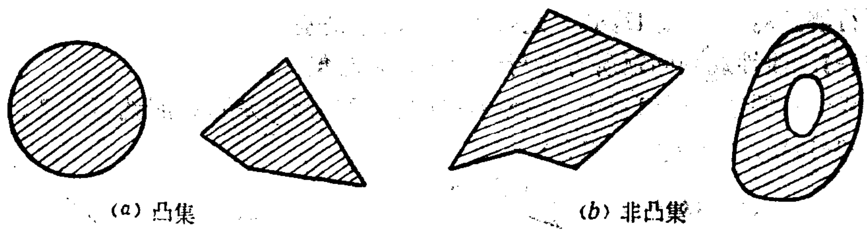

图 3　平面上凸集和非凸集

凸集D上不能表示成相异两点凸组合的点，称为极点。如凸多边形的顶点，实心圆周上的点都是极点。

2.**基本解**　考虑式(1-1-5)

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}_{\circ} \tag{1-1-5}$$

式中，$\mathbf{x}$是n维向量，$\mathbf{b}_0$是m维向量，$\mathbf{A}$是$m\times n$矩阵，且$n>m$。显然，$\mathbf{A}$中n列与$\mathbf{x}$的n个变量一一对应，如果$\mathbf{A}$的秩为m，从$\mathbf{A}$中任选线性无关的m列，组成子矩阵$\mathbf{B}$。$\mathbf{B}$是秩为m的$m\times m$矩阵。我们称矩阵$\mathbf{B}$为基底，组成基底的列向量称为基底向量。如令$\mathbf{A}$中其余$(n-m)$列所对应的变量为0，矩阵$\mathbf{B}$中m列所对应的变量为$\mathbf{x}_B$，则可把(1-1-5)式改写为

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B=\mathbf{b}_{\circ}$$

得

$$\mathbf{x}_B=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_{\circ} \tag{1-3-2}$$

于是得到满足式(1-1-5)的一个解$\mathbf{x}$，我们把该解称为方程组(1-1-5)关于基$\mathbf{B}$的基本解。变量$\mathbf{x}$中与矩阵$\mathbf{B}$中m列相对应的m个变量称为基本变量，余下的变量即为非基本变量。因此，基本解中的基本变量由式(1-3-2)给出，而非基本变量为零。

3.**可行解**　满足式(1-1-5)和(1-1-6)的解称为可行解。

4.**基本可行解**　如果基本解中每个变量都是非负的，即满足式(1-1-6)，则称为基本可行解。如在基本可行解中至少有一个基本变量为零时，则该解称为退化的基本可行解。反之，则为非退化的基本可行解。

5.**可行域**　可行解的集合称为可行域。

6.**最优解**　使目标函数达到最优值的可行解称为最优解。

为了便于理解这些概念，我们举以下例子来说明。

对于约束条件

$$2x_1+x_2+x_3=50$$

$$x_1+2x_2+x_4=70$$

$$x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0$$

$\mathbf{x}_1=[0,0,50,70]^T$是一个非退化的基本可行解，其基本变量是$x_3$，$x_4$，非基本变量$x_1$，$x_2$；基底 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，基底向量$\mathbf{a}_3=[1,0]^T$，$\mathbf{a}_4=[0,1]^T$。$\mathbf{x}_2=[0,50,0,-30]^T$是基本解，但不是基本可行解。$\mathbf{x}_3=[1,1,47,67]^T$是可行解，但不是基本可行解

定理1-1 线性规划问题所有可行解的集合是凸集

证 我们只要证明任何两个可行解$\mathbf{x}_1$和$\mathbf{x}_2$的凸组合$\mathbf{x}$也是可行解就可以了。

由(1-3-1)知，$\mathbf{x}_1$和$\mathbf{x}_2$的凸组合$\mathbf{x}$为

$$\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}_1+(1-\alpha)\mathbf{x}_2 \quad 0<\alpha<1$$

对上式左乘$\mathbf{A}$，有

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\alpha\mathbf{A}\mathbf{x}_1+\mathbf{A}\mathbf{x}_2-\alpha\mathbf{A}\mathbf{x}_2$$

因为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$是可行解，它满足式(1-1-5)，即

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1=\mathbf{b}_0,\quad \mathbf{A}\mathbf{x}_2=\mathbf{b}_0$$

于是

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\alpha\mathbf{b}_0+\mathbf{b}_0-\alpha\mathbf{b}_0=\mathbf{b}_0$$

故$\mathbf{x}$也是式(1-1-5)的解。

又因为 $\mathbf{x}_1\geqslant 0$，$\mathbf{x}_2\geqslant 0$，

所以 $\mathbf{x}\geqslant 0$

因此，$\mathbf{x}$亦满足式(1-1-6)。由此可见，可行解$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$ 的凸组合 $\mathbf{x}$ 也是可行解。根据凸集的定义得出可行解的集合是凸集。 证毕

定理1-2 线性规划若存在最优解，则必然会出现在可行域的一个极点上。

证 采用反证法。假设最优解不在可行域的极点$\mathbf{x}_1^*$，$\mathbf{x}_2^*$，…，$\mathbf{x}_p^*$上，而在可行域内一点$\mathbf{x}_0$上，则有

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}_0>\mathbf{c}^T\mathbf{x}_i^* \qquad i=1,2,\cdots,p \tag{1-3-3}$$

不难看出当可行域非空有界时，$\mathbf{x}_0$可写成各极点的如下线性组合

$$\mathbf{x}_0=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\mathbf{x}_i^*$$

且

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i=1,\quad \alpha_i\geqslant 0$$

于是，最优值

$$z=\mathbf{c}^T\mathbf{x}_0=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\mathbf{c}^T\mathbf{x}_i^*$$

设$\mathbf{c}^T\mathbf{x}_m^*$是$\mathbf{c}^T\mathbf{x}_i^*$中的最大值。用$\mathbf{c}^T\mathbf{x}_m^*$代替所有的$\mathbf{c}^T\mathbf{x}_i^*$，有

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}_0\leqslant\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\mathbf{c}^T\mathbf{x}_m^*=\mathbf{c}^T\mathbf{x}_m^*\sum_{i=1}^{p}\alpha_i=\mathbf{c}^T\mathbf{x}_m^*$$

此式与式(1-3-3)有矛盾，故最优解必在可行域的极点上。 证毕

此定理表明，求最优解只须考虑可行域的极点即可。

定理1-3 设$\mathbf{A}$是秩为m的$m\times n$矩阵，$\mathbf{b}_0$是m维向量。约束

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}_0,\quad \mathbf{x}\geqslant 0 \tag{1-3-4}$$

的可行域为D，则$\mathbf{x}$是D的极点充要条件是：$\mathbf{x}$是式(1-3-4)的基本可行解。

证 充分性。设$\mathbf{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0]^T$是(1-3-4)的一个基本可行解，其对应的基向量是$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$。使用反证法。设$\mathbf{x}$不是极点，则$\mathbf{x}$可写成两个可行解$\mathbf{u}$，$\mathbf{v}$的凸组合，即

$$\mathbf{x}=\alpha\mathbf{u}+(1-\alpha)\mathbf{v}\qquad 0<\alpha<1 \tag{1-3-5}$$

且

$$\mathbf{u}\neq\mathbf{v} \tag{1-3-6}$$

式(1-3-5)表明，当$\mathbf{x}$中的某个变量为零时，$\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$中相应变量亦是零，即

$$\mathbf{u}=[u_1,u_2,\cdots,u_m,0,\cdots,0]^T$$

$$\mathbf{v}=[v_1,v_2,\cdots,v_m,0,\cdots,0]^T$$

因为$\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$是可行解，所以

$$u_1\mathbf{a}_1+u_2\mathbf{a}_2+\cdots+u_m\mathbf{a}_m=\mathbf{b}_0 \tag{1-3-7}$$

$$v_1\mathbf{a}_1+v_2\mathbf{a}_2+\cdots+u_m\mathbf{a}_m=\mathbf{b}_0 \tag{1-3-8}$$

把(1-3-7)和(1-3-8)相减，有

$$(u_1-v_1)\mathbf{a}_1+(u_2-v_2)\mathbf{a}_2+\cdots+(u_m-v_m)\mathbf{a}_m=0$$

因为$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$是线性无关的基向量，所以欲使上式成立，应有

$$\mathbf{u}=\mathbf{v}$$

它与式(1-3-6)有矛盾。从而证明了充分性。

必要性 上面证明基本可行解是极点，这里证明极点是一个基本可行解。为方便起见，设极点$\mathbf{x}$的前l个变量大于零，而其余变量为零，即

$$\mathbf{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_l,0,\cdots,0]^T$$

我们可以证明$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_l$线性无关。采用反证法。若$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_l$是线性相关的，必存在不全为零的数$w_1,w_2,\cdots,w_l$，使

$$w_1\mathbf{a}_1+w_2\mathbf{a}_2+\cdots+w_l\mathbf{a}_l=0$$

如定义n维向量 $\mathbf{w}=[w_1,w_2,\cdots,w_l,0,\cdots,0]^T$，那么

$$\mathbf{A}\mathbf{w}=0$$

又设

$$\mathbf{u}=\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{w}\geqslant 0,\quad \mathbf{v}=\mathbf{x}-\varepsilon\mathbf{w}\geqslant 0 \tag{1-3-9}$$

式中ε为一充分小的正数。

则

$$\mathbf{A}\mathbf{u}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{A}\mathbf{w}=\mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}=\mathbf{A}\mathbf{x}-\varepsilon\mathbf{A}\mathbf{w}=\mathbf{b}_0$$

故$\mathbf{u}\in D$，$\mathbf{v}\in D$。此外，由(1-3-9)可得

$$\mathbf{x}=\frac{1}{2}\mathbf{u}+\frac{1}{2}\mathbf{v}$$

这表明$\mathbf{x}$是两个不同的可行解$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$的凸组合，因此$\mathbf{x}$不是极点。这与假定矛盾。因此$\mathbf{a}_1\cdots\mathbf{a}_l$是线性无关的，$\mathbf{x}$是一个基本可行解。　　　　证毕

由以上三个定理可知，求解线性规划问题时，若它的最优解存在的话，只要先求出所有的基本可行解，然后再算出相应的目标函数，比较它们的值，与目标函数最大值相对应的基本可行解就是最优解。

例1-4　求线性规划问题

$$\max \quad z=x_1+3x_2$$
$$-x_1+x_2\leqslant 1$$
$$x_1+x_2\leqslant 2$$
$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0$$

解　由图解法可得解的区域如图 1-4 所示，其最优解$\mathbf{x}^*=\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right]^T$，相应最优值为5。

现引进非负的松弛变量x_3、x_4，把不等式约束化为如下等式约束

$$-x_1+x_2+x_3=1 \qquad (1\text{-}3\text{-}10)$$
$$x_1+x_2+x_4=2$$

选x_3、x_4为基本变量，则$x_1=x_2=0$。解式(1-3-10)，得到$x_3=1$，$x_4=2$。这样

$$\mathbf{x}=[0,0,1,2]^T$$

这是一个基本可行解。如果选x_1、x_3为基本变量，则$x_2=x_4=0$。解式(1-3-10)得$x_1=2$，$x_3=3$。故

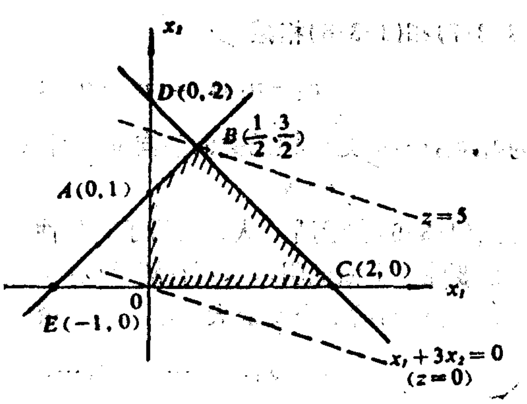

图 1-4　例1-4图解

$$\mathbf{x}=[2,0,3,0]^T$$

这也是一个基本可行解。仿上可得其它基本解。本例共有 6 个基本解，见表 1-1 所示。表中前四个是基本可行解，后两个是非可行解。把基本可行解逐个地代入目标函数表达式中，再比较大小，其最大值相应的解即为最优解。由表1-1可知，其最优解$\mathbf{x}^*=\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ 0,0\right]^T$这和图解法一致的。

当加入松弛变量x_3、x_4后，满足所有约束条件的可行域成为四维空间凸多面体。这凸多面体顶点就是基本可行解。表1-1中所示四个基本可行解分别相当于图1-4上凸四边形的

顶点O、C、B、A点。

表 1-1

基本解				是否基本可行解	对应图1—4的点	Z
x_1	x_2	x_3	x_4			
0	0	1	2	是	0	0
2	0	3	0	是	C	2
1/2	3/2	0	0	是	B	5
0	1	0	1	是	A	3/2
0	2	-1	0	否	D	
-1	0	0	3	否	E	

1-4　线性规划的单纯形法

考虑式(1-1-4)～(1-1-6)所示的线性规划标准形。如上所述，矩阵$\mathbf{A}$由 $\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，…，$\mathbf{a}_n$列组成，每一列有m个元素，其秩为m。从$\mathbf{A}$中任选m个线性无关的列组成基$\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots \mathbf{b}_m]$。$\mathbf{b}_i(i=1,2,\cdots,m)$可以是$\mathbf{A}$中的任一列，例如$\mathbf{b}_1$可代表$\mathbf{A}$中的 $\mathbf{a}_7$。$\mathbf{b}_i$ 的i不表示$\mathbf{A}$的相应列。

矩阵$\mathbf{A}$中任一列如$\mathbf{a}_j$都可以写成$\mathbf{B}$的线性组合，即

$$\mathbf{a}_j=y_{1j}\mathbf{b}_1+y_{2j}\mathbf{b}_2+\cdots+y_{mj}\mathbf{b}_m=\sum_{i=1}^{m}y_{ij}\mathbf{b}_i=\mathbf{B}\mathbf{y}_j \tag{1-4-1}$$

或

$$\mathbf{y}_j=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j=[y_{1j},y_{2j},\cdots,y_{mj}]^T \tag{1-4-2}$$

上式中 j 代表$\mathbf{A}$中列的编号，i 代表$\mathbf{B}$中列的编号。显然，随着基$\mathbf{B}$的变化，$\mathbf{y}_j$也变化。

对应于基$\mathbf{B}$的基本变量解为

$$\mathbf{x}_B=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_0 \tag{1-4-3}$$

式中，

$$\mathbf{x}_B=[x_{B1},x_{B2},\cdots,x_{Bm}]^T \tag{1-4-3}$$

x_{Bi}相应于$\mathbf{B}$的b_i列的变量。因此，如果$\mathbf{B}$中$\mathbf{b}_1$代表$\mathbf{a}_7$，则x_{B1}代表x_7。

由式(1-1-1)所示的目标函数为

$$z=\mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{1-1-1}$$

式中，$\mathbf{c}=[c_1,c_2,\cdots,c_n]^T$是目标函数的系数，又称为价值系数向量，其中$c_i$是变量$x_i$的价

值系数。对应于基本变量$\mathbf{x}_B$，有

$$\mathbf{c}_B=[c_{B1},c_{B2},\cdots,c_{Bm}]^T \tag{1-4-4}$$

c_{Bi}表示变量x_{Bi}的价值系数。因此，如果x_{B1}代表x_7，则$c_{B1}=c_7$。

对于任意的基本可行解，由于非基本变量为零，所以目标函数为

$$z=\mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B \tag{1-4-5}$$

另外，我们定义新变量z_j为

$$z_j=y_{1j}c_{B1}+y_{2j}c_{B2}+\cdots+y_{mj}c_{Bm}=\sum_{i=1}^{m}y_{ij}c_{Bi}=\mathbf{c}_B^T\mathbf{y}_j \tag{1-4-6}$$

对于矩阵$\mathbf{A}$中每一列$\mathbf{a}_j$都存在一个z_j，但z_j随$\mathbf{B}$的变化而变化。如果$\mathbf{a}_j$既是$\mathbf{A}$中的第j列向量，又是$\mathbf{B}$中第i列向量，即$\mathbf{a}_j=\mathbf{b}_i$，则由(1-4-1)式知

$$y_{Kj}=\begin{cases}0 & K\neq i\\ 1 & K=i,i=1,2,\cdots,m\end{cases} \tag{1-4-7}$$

把(1-4-7)代入(1-4-6)，得

$$z_j=y_{ij}c_{Bi}=c_{Bi}=c_j \tag{1-4-8}$$

此式表明，如果$\mathbf{a}_j$是组成基$\mathbf{B}$的列向量，则z_j就是$\mathbf{a}_j$列对应变量的价值系数c_j。

例1-5 线性规划问题

$$\begin{aligned}\max\quad & z=2x_1+4x_2+3x_3\\ & 4x_1+2x_2+x_3+x_4=2\\ & x_1+3x_2+3x_3+x_5=1\\ & x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{aligned}$$

设$\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_3$，$\mathbf{b}_2=\mathbf{a}_1$。求基本变量解$\mathbf{x}_B$及$\mathbf{y}_2$，$\mathbf{y}_4$，$z_2$，$z_4$。

解 根据题意$\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2]=[\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_1]=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

所以 $$\mathbf{B}^{-1}=-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}1 & -4\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

由式(1-4-3)得

$$\mathbf{x}_B=\begin{pmatrix}x_{B1}\\ x_{B2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3\\ x_1\end{pmatrix}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_0=-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}1 & -4\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/11\\ 5/11\end{pmatrix}$$

由式(1-4-2)得

$$\mathbf{y}_2=\begin{pmatrix}y_{12}\\ y_{22}\end{pmatrix}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2=-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}1 & -4\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10/11\\ 3/11\end{pmatrix}$$