拉普拉斯变换的理论和应用导论

G. 窦志

科学出版社

拉普拉斯变换的理論和应用导論

G. 窦 志 著

张 义 良 译

科 学 出 版 社

1966

G. DOETSCH

EINFÜHRUNG IN THEORIE UND ANWENDUNG DER LAPLACE-TRANSFORMATION

Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart

1958

内容简介

本书的特点是既有理论又有实际，更重要的是理论与应用的紧密配合．在编排上致力于由易及难，循序渐进；凡具有普通数学分析知识(包括复变函数基础)的读者完全可以自学．

内容共分 28 节．第 1—11 节引入 Laplace 变换的概念，导出其最重要的一些映照性质．第 12—15 节将前面所得结果及时应用于解常系数常微分方程和差分方程．第 16—22 节主要讨论反演问题，导出了最有效的复反演公式并引入与之有关的函数论方法，而随着理论的开展，Laplace 变换象函数的性质也得到更深刻的揭示．第 23 节讨论 Parseval 等式，这等式对理论和应用都极重要，而乘积的 Laplace 变换也借此获得了解决．第 24，25 两节讲有趣而富有实用意义的渐近展开．第 26—28 节再度回到应用：自如地运用以上成果解决多项式系数的常微分方程以及数理偏微分方程和积分方程；渐近方法在这里所显示的作用给人留下深刻的印象．此外，不少材料都是较新的，这在序言中都扼要提到了．

拉普拉斯变换的理论和应用导论

G．窦志 著

张义良 译

*

科学出版社出版

北京朝阳門内大街 137 号

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1966 年 3 月第 一 版　　开本：850×1168 1/32

1966 年 3 月第一次印刷　　印张：9 3/4

印数：0001—3,500　　字数：257,000

统一书号：13031・2250

本社书号：3415・13—1

定价：[科六] 1.50 元

序　　言

在大量的，主要是为工程师撰写的有关 Laplace 变换的著作中（这些著作一般都以"运算微积"为书名），数学理论仅仅得到简略的论述，且对许多带根本性的事实全然不加证明，或只作了不充分的论证，目的在于尽快转入微分方程方面的应用. 介于这类书籍与著者从数学观点出发所写的"Laplace 手册"（共三册，主要是一部参考书）之间，在世界文献中还找不出一本中间性质的书，就是说，一方面既以最一般的形式连同严格的证明引入理论上以及数学和工程的应用上所绝对必需的材料，而另方面，就编排和取材范围来说，又恰如其份地自始就是一本眞正可读的书，而不仅仅适用于作参考. 简单说，就是一本对于愿意精通这门今天已广泛涉及到如此多领域的数学分支的，那些正在求学和已参加工作的数学工作者或工程师所适用的教科书.

希望本书就是上面所说的这样一本书. 它所包含的题材，正是根据著者十余年来的经验，认为确实是日常工作中在理论和实际上所必需的，以及每个应用 Laplace 变换的人所特别应该掌握的. 本书的结构不象"手册"那样系统谨严，而是致力于作到由易及难，循序渐进，并且把理论上获得的结果及时地充分运用到应用上去. 因此，在导出 Laplace 变换的一些最重要的映照性质之后，立即就讨论常系数常微分方程和差分方程，此时还用不到复变函数论的任何知识. 然后才引入复反演公式以及与之有关的函数论方法. 紧接着是 Parseval 等式，这等式的推导确实显得不太简单，但它不仅对数学工作者为必不可少，而且目今在应用上亦已占有一定的地位. 此后，随着渐近展开的讨论而进入一境界，这一方面在数学上是极饶兴味的，而另方面在工程上，例如在稳定性研究方面以及在复杂函数的数字计算和函数论计值方面，也正在获得越

来越重要的意义. 在紧接着的最后几节关于多项式系数的常微分方程以及数理偏微分方程的讨论中，渐近方法以深入的方式显示出它的优越性.

从每一应用范围内至少举出一个特殊例子，以使读者看到所用方法的功能与妙处. 例题的增加势将过多的增大篇幅从而大大提高书价，而这对尚在求学的读者来说，总希望是力所能及的. 上面所说关于运算微积的文献，包含着物理学和工程实际上的大量问题，正可看作是 Laplace 变换的例题集，而且也许会促使许多读者对该处从数学观点看来往往处理得不够充分的问题现在在坚实的基础上重行钻研一番.

本书绝非只是拙著"手册"的摘要. 识者将会注意到，许多题材都作了不同的叙述，例如对于常系数常微分方程和差分方程，微分方程组，以及当 Laplace 变换象函数具有多义奇点时象原函数的渐近展开问题等都作了与"手册"不同的处理；此外还增添了不少尚未发表的新材料，如对于由频率响应的分量计算过渡函数这一工程上通行算法的严格证明，常微分方程在单边无限区间上的一个边值问题的处理，具有角形积分路线的复反演积分性质的研究，以及偏微分方程解的渐近展开等等都是新加入的材料.

鉴于本书作为教科书的性质，故未开列参考文献. 对此感兴趣的读者，可在拙著"手册"所附详尽的"文献和历史索引"中找到. 只有两处，因取材于别的作者而"手册"尚未论及，才注明了出处作为该索引的补充.

G. 竇 志

1958 年 4 月

目　　录

§1. 从物理和数学观点引入 Laplace 积分

我们称积分

$$\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$$

为 Laplace 积分，其中积分变量 t 取实值且从 0 变到 $+\infty$，而参量 s 则既能取实值也能取复值. 如果存在使这个积分收敛的 s 值，则由此定义一函数 $f(s)$:

$$\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = f(s). \tag{1}$$

至于在多大程度上可将这一种在两函数 $F(t)$ 和 $f(s)$ 间的联系理解为一种"变换"，所谓 Laplace 变换，我们将在 §4 中加以阐述.

Laplace 积分也象幂级数或 Fourier 级数一样，可以归入那种用一个分析式子定义函数的数学对象. 跟级数一样，Laplace 积分最初也是纯从数学观点加以研究，然后才应用到各种不同领域中去的. 实践表明，在应用可能性方面，它远远超过了级数，而且正是在那样一些不仅数学工作者而且物理工作者和工程师们也感兴趣的领域中显示为一种非常有效的工具. 这跟 Laplace 积分具有明显的物理意义是分不开的，这一点我们将首先加以阐明.

为此，我们从一般较为熟悉的情形出发，即从定义在有限区间 $(-\pi, +\pi)$ 内的函数 $F(x)$ 的 **Fourier 级数**表达式出发. 为合用起见，这里不取这表达式的实形式

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx), \tag{2}$$

而是将实振动 $\cos nx$ 和 $\sin nx$ 合并成复振动 e^{inx} 并写成[1)]

1) 和式前冠以因子 $1/2\pi$，为的是使它跟后面的公式(5)，(6)以及(11)，(12)完全类似. 在这些公式上，这个因子是历来就有的. 至于复级数中的求和字码 n，并不象实级数中那样从 0 到 ∞ 而是从 $-\infty$ 到 $+\infty$，原因在于函数 e^{inx} 不是对 $n=0, 1, 2, \cdots$，而是对 $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$ 才构成一完全正交系.

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{inx}. \tag{3}$$

Fourier 系数 c_n 由下面的公式[1]:

$$c_n=\int_{-\pi}^{+\pi}F(x)e^{-inx}\,dx \tag{4}$$

确定. 级数(3)在十分一般的条件下(例如当 $F(x)$ 由有限多单调线段组成时)收敛,并表达该函数[2]. 从物理的观点看,(3)式说明$F(x)$ 可表为频率 $n=0,\ \pm 2,\cdots$ 的诸振动(即所谓谐振动)的迭加. 若将系数 c_n(这在一般情况下是一复量)写成

$$c_n=r_n e^{-in\varphi_n},$$

则第 n 项取下形:

$$r_n e^{in(x-\varphi_n)}.$$

由此看出,频率为 n 的振动具有**振幅** r_n 和**相位** φ_n[3]. 所有出现的诸振动的振幅和相位的全体在物理学上称为由 $F(x)$ 所描写的自然现象的频谱. 可见这个频谱是由 c_n 确定的,因此我们也可把 Fourier 系数序列叫作 $F(x)$ 的**频谱序列**. 于是可将公式(3)和(4)作如下的解释:

經由积分(4)我們从 $F(x)$ 获得頻譜序列 c_n. 借助頻譜序列又可将 $F(x)$ 作为頻率 $n=0,\ \pm 1,\cdots$ 的諸振动的迭加依形式(3)构作出来.

如果自变量是时间,则在物理学上很少会是有限区间的情形,因时间按其性质来说是无始无终的(从$-\infty$ 到$+\infty$). 在无限区间

---

1) 对于实的 $F(x)$ 有 $c_{-n}=\bar{c}_n$(因而特别 c_0 是实的),故当合并对应于 $+n$ 和 $-n$ 的共轭复项时,即得习见的实 Fourier 级数(令 $c_n=\pi(a_n-ib_n)$):

$$\frac{c_0}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}2\Re(c_n e^{inx})=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

2) 在跳跃点即 $F(x-0)\fallingdotseq F(x+0)$ 处级数表示平均值 $[F(x-0)+F(x+0)]/2$.

3) 复振动的思想今天(特别在电工学上)已如此深入人心,以致无需对此多作说明. 点 $z=e^{inx}$ 在复平面上沿单位圆运动,此时 nx 表示从点 $z=1$ 开始度量的弧长. 实部和虚部,亦即在两轴上的投影,代表实振动 $\cos nx$ 和 $\sin nx$. 当乘以 r_n 时,圆半径从而实振动的振幅将等于 r_n. 用 $x-\varphi_n$ 代 x,则表示将实轴转过一角度 φ_n(图 1).

$(-\infty, +\infty)$ 的情形下，替代 Fourier 级数的是 **Fourier 积分**[1]（现在把 x 换写成 t）

$$F(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{iyt}\, dy, \tag{5}$$

此时相应于 Fourier 系数 c_n 的函数 $f(y)$ 同样由一 Fourier 积分定出:

$$f(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-iyt}\, dt. \tag{6}$$

因而，这里函数 $F(t)$ 不能单由谐振动构成，而是出现了一切频率 y 的振动，故和式(3)为积分所替代．任一振动 e^{iyt} 的振幅和相位，就象先前由系数 c_n 来确定一样，现在是由函数 $f(y)$ 给出的，故可将 $f(y)$ 叫作 $F(x)$ 的**频谱函数**．在有限区间的情形下，频谱是离散的 $(n=0, \pm 1, \cdots)$，而在无限区间的情形下，频谱是连续的 $(-\infty < y < +\infty)$．

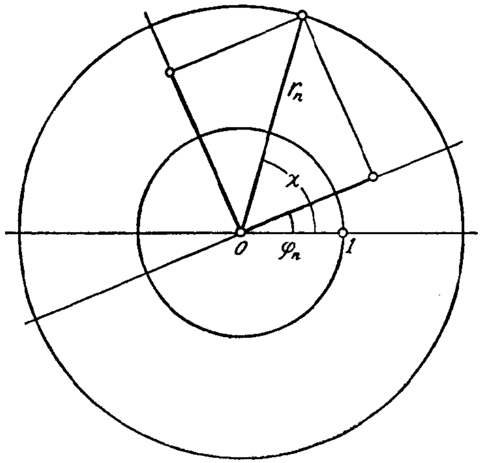

图 1

我们初步只是纯形式地列出了公式(5)和(6)，而未考虑其成立的条件．我们不必现在就进行深入地讨论（见 § 17），从开始已

1) 跟 Fourier 级数一样，在跳跃点处应将 $F(t)$ 代以 $[F(t-0)+F(t+0)]/2$.

可断言，这两式与公式(3)和(4)相较是有重大区别的．事实上，尽管频谱序列 c_n 对于每一可积函数 $F(x)$ 都有意义，但频谱函数 $f(y)$ 却只有当 $F(t)$ 在无穷远处的性态能使积分 (6) 收敛时才存在．这一点可惜就连对最简单且最常遇的一些函数已不成立，例如对于 $F(t)\equiv 1$ 或 $F(t)\equiv e^{i\omega t}$，积分(6)显然不收敛．

幸而摆脱这一困难的可能是存在的．到此为止我们总假定 t 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$．但在物理工作者感兴趣的绝大多数情况中，事件的过程却总是从某一确定时刻，比如 $t=0$ 才开始进行的，故区间为 $0\leqslant t<\infty$．这可如此纳入先前的情形，即对于 $t<0$ 也使 $F(x)$ 有定义，并定义其为 0．于是关于频谱函数的积分为

$$f(y)=\int_0^{\infty} e^{-iyt}F(t)\,dt.$$

这积分对于函数 1 和 $e^{i\omega t}$ 仍然跟(6)一样不收敛，但这里却可运用一下技巧：替代单独一个函数 $F(t)$ 现在转而考虑整整一族函数 $e^{-xt}F(t)$，其中实参量 x 姑设遍取诸值 $x>X$．对于 $e^{-xt}F(t)$ 的频谱函数当然除依赖于 y 外还依赖于 x，因而不妨记作 $f_x(y)$：

$$f_x(y)=\int_0^{\infty} e^{-iyt}[e^{-xt}F(t)]\,dt. \tag{7}$$

现在这个积分，当 $x>0$ 时，对于 $F\equiv 1$ 和 $F\equiv e^{i\omega t}$ 以及一般地对于一切有界函数都收敛了．不仅如此，若取 $x>a>0$，甚至对于一切 F，只要它在 $t\to\infty$ 时的增大不强于 e^{at}，也都是收敛的[1)]

采用这个频谱函数，注意到当 $t<0$ 时 $F(t)=0$，据 (5) 即得[2)]

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}f_x(y)\,dy=\begin{cases}0 & \text{当 } t<0,\\ e^{-xt}F(t) & \text{当 } t>0.\end{cases} \tag{8}$$

公式(7)和(8)也可写成

$$e^{-xt}F(t)\text{ 的频谱函数：}\ f_x(y)=\int_0^{\infty} e^{-(x+iy)}F(t)\,dt, \tag{9}$$

1) 在以 $-\infty$ 为下限的积分(6)中引入因子 e^{-xt}，效果将适得其反，因 e^{-xt} 当 $t\to-\infty$ 时无限增大．

2) 当 $t=0$ 时得 0 与 $F(+0)$ 的平均值，即 $F(+0)/2$．

时间函数 $F(t)$: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x+iy)t} f_x(y)\, dy = \begin{cases} 0 & 当\ t<0, \\ F(t) & 当\ t>0. \end{cases}$ (10)

两式中都很自然地出现了复变量 $x+iy$. 特别是, $f_x(y)$ 表明并非以任意方式依赖于 x 和 y, 而只是依赖于作为整个变元的 $x+iy$, 因此可将 $f_x(y)$ 写成 $f(x+iy)$. 这表示, 对应于不同参量值 x 的诸频谱函数是这样地彼此结合着, 使得可以用一单变量函数(如果变量取复形式 $x+iy$ 的话)将它们统一表达出来. 关于复变量 $x+iy$ 的单一字母简记法, 在本领域中已惯于采用字母 s 而非通常所用的 z, 这跟时间函数中的变量用 t 表示也是很相适应的:

$$s = x + iy.$$

于是在(10)中(其中 x 对积分来说是一固定值)可令 $dy = ds/i$, 而对应于积分限 $y=-\infty$ 和 $y=+\infty$ 的新限则为 $s=x-i\infty$ 和 $s=x+i\infty$. 在复 s 平面上,积分路线是一条横坐标为 x 的垂直线. 现在可将(9),(10)这两公式写成下形:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\, dt = f(s), \tag{11}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} f(s)\, ds = \begin{cases} 0 & 当\ t<0, \\ F(t) & 当\ t>0. \end{cases} \tag{12}$$

积分(11)正是开始处提到的 Laplace 积分, 由它, 可对一函数 $F(t)$ 算出一函数 $f(s)$. 积分(12),由它可反过来从 $f(s)$ 重新得出 $F(t)$, 可以叫作前一积分的反演.

这两公式的物理意义如下: 若在 Laplace 积分(11)所定义的函数 $f(s)$ 中将字母 s 看作复变量 $s=x+iy$, 则 $f(x+iy)$ 表达衰減时間函数 $e^{-xt}F(t)$ 的以 y 为频率变量的频譜函数. 利用此函数可将 $F(t)$ 依公式(12)构作出来.

不从物理观点而从纯数学观点也可引入 Laplace 积分. 试将**冪級数**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

加以推广，则整指数列 n 将被一任意递增非负数列 λ_n 所替代。但因函数 z^{λ_n} 一般是多义的，为了获得单义函数，可先作置换 $z=e^{-s}$，这样，作为级数的一般项即得单义函数 $e^{-\lambda_n s}$。循此途径就导致 **Dirichlet 級数**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}.$$

（这里历来惯用字母 s 表示变量。）今若由此再作更进一步的推广：将非连续的 λ_n 换作连续变量 t，并因此将依赖于 n 的数列 a_n 也换作依赖于 t 的函数 $F(t)$，同时将和式换作积分。这样我们就得到 Laplace 积分

$$\int_0^{\infty} F(t)e^{-ts}\,dt.$$

如果不从幂级数而从 **Laurent 級数**

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

出发，则循同一途径就导致所谓**双边的 Laplace 积分**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{-ts}\,dt,$$

这种积分在许多领域中同样是很有用的。

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛域是一个圆。当 n 换作 λ_n 时，由于 z^{λ_n} 的多义性，必须设想这个圆是位于无穷多叶的对数 Riemann 曲面上的。经由映照 $z=e^{-s}$，这个无限次重迭的圆就变为一个右半平面。实际上 Dirichlet 级数的收敛域确是一个**半平面**，而同一结果将被证实对 Laplace 积分也是成立的。

在一圆周 $z=\rho e^{i\vartheta}$（$\rho=$ 常数）上有

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_n \rho^n) e^{in\vartheta},$$

就是说，Laurent 级数在这圆周上是一(3)形的 **Fourier 級数**。类似地在一垂直线 $s=x+iy$（$x=$ 常数）上有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}F(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt}[e^{-xt}F(t)]\,dt,$$

就是说，双边 Laplace 积分在这直线上是一 **Fourier 积分**(6)．(在幂级数与“单边”Laplace 积分的情形下， Fourier 级数中的求和字码跟 Fourier 积分中的积分变量都只从 0 变到 ∞．) 正如 Fourier 级数在幂级数理论中，特别对于研究收敛圆边界上的收敛性态所起的重要作用一样， Fourier 积分在 Laplace 积分的理论中作为辅助工具将占有一个十分重要的地位．

由于 Laplace 积分这里是作为幂级数的一个自然推广而出现的，人们将期待幂级数的一些性质会在 Laplace 积分上重现． 这纵然在一定范围内是如此，但在许多观点上 Laplace 积分有其本身所循的途径，因而具有较级数复杂得多的性质．

§2. Laplace 积分的几个例子和积分概念的精确化

为了对函数 $F(x)$ 与其 Laplace 积分间的关系获得较为生动的印象，我们来对一些特殊的 $F(x)$ 算出 Laplace 积分．

1. $F(t) \equiv U(t)$,

这里 $U(t)$ 是这样定义的:

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{当 } t \leqslant 0, \\ 1 & \text{当 } t > 0. \end{cases}$$

在电工学上人们称这函数 $U(t)$ 为**单位跳跃**(也称 Heaviside 单位函数或单位冲击——这名称我们避免采用，因有时也用来称呼 94 页上讨论的脉冲函数)．今后将不再特别注明 $t < 0$ 时应定义 $F(t) = 0$，因 Laplace 积分只以区间 $0 \leqslant t < \infty$ 为基础，故从数学观点看，不论 $F(t)$ 在区间 $-\infty < t < 0$ 上有无定义以及怎样定义都一样．诚然，以后将会发现，对于某些现象如果同时也考虑区间 $-\infty < t < 0$，则可了解得更好些．

这里有

$$\int_0^{\omega} e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}(1 - e^{-s\omega}).$$

这在 $\omega \to \infty$ 时当且仅当 $\Re s > 0$ 时才有极限．我们得

$$f(s) = \frac{1}{s} \text{ 当 } \Re s > 0.$$

据第 4 页，$f(x+iy) = (x+iy)^{-1}$ 就是 $e^{-xt}U(t)$ 的频谱函数．若置 $s = re^{i\varphi}$，则

$$f(s) = r^{-1}e^{-iy(\varphi/y)}.$$

可见 $e^{-xt}U(t)$ 的以 y 为频率的部分振动具有振幅 r^{-1} 和相位移 φ/y．因此当 $|y|$ 增大时振幅和相位移均递减而趋向 0（其时 $|\varphi|$ 趋向 $\pi/2$，因而 φ/y 趋向 0）．函数 $U(t)$ 本身并不具有频谱函数，因 Laplace 积分当 $x = \Re s = 0$ 时不收敛．此事也表现在：若取 $x = 0$，则 $f(s)$ 当 $y = 0$（即当 $s = 0$）时变为无意义．

$$\textbf{2. } \boldsymbol{F(t) \equiv U(t-a)} = \begin{cases} 0 & \text{当 } t \leqslant a \\ 1 & \text{当 } t > a \end{cases} \quad (a > 0)$$

（单位跳跃从 $t = 0$ 处移到 $t = a$ 处）．

$$f(s) = \int_a^\infty e^{-st}\,dt = \frac{e^{-as}}{s} \text{ 当 } \Re s > 0.$$

$$\textbf{3. } \boldsymbol{F(t) \equiv e^{\alpha t}} \quad (\alpha \text{ 为任意复数}).$$

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}\,dt = \frac{1}{s-\alpha} \text{ 当 } \Re s > \Re\alpha.$$

$$\textbf{4. } \boldsymbol{F(t) \equiv \cosh kt} = \frac{1}{2}(e^{kt} + e^{-kt}) \,(k \text{ 为任意复数}).$$

因

$$\int_0^\infty e^{-st}[F_1(t) + F_2(t)]\,dt = \int_0^\infty e^{-st}F_1(t)\,dt + \int_0^\infty e^{-st}F_2(t)\,dt,$$

故据 3 的结果即得

$$f(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k} + \frac{1}{s+k}\right) = \frac{s}{s^2-k^2},$$

这里 $\Re s > \Re k$ 和 $\Re s > -\Re k$ 须同时成立，即须 $\Re s > |\Re k|$．对于实的 k，这表示 $\Re s > |k|$．

$$\textbf{5. } \boldsymbol{F(t) \equiv \sinh kt} = \frac{1}{2}(e^{kt} - e^{-kt}) \,(k \text{ 为任意复数}).$$

$$f(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}-\frac{1}{s+k}\right)=\frac{k}{s^2-k^2} \text{ 当 } \Re s>|\Re k|.$$

6. $\boldsymbol{F(t)\equiv\cos kt}=\frac{1}{2}(e^{ikt}+e^{-ikt})$（$k$ 为任意复数）.

$$f(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ik}+\frac{1}{s+ik}\right)=\frac{s}{s^2+k^2},$$

这里 $\Re s>\Re(ik)=-\Im k$ 和 $\Re s>-\Re(ik)=\Im k$ 须同时成立，即须 $\Re s>|\Im k|$. 对于实的 k，这表示 $\Re s>0$.

7. $\boldsymbol{F(t)\equiv\sin kt}=\frac{1}{2i}(e^{ikt}-e^{-ikt})$（$k$ 为任意复数）.

$$f(s)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ik}-\frac{1}{s+ik}\right)=\frac{k}{s^2+k^2} \text{ 当 } \Re s>|\Im k|.$$

8. $\boldsymbol{F(t)\equiv t^a}$ （a 为 >-1 的实数）.

若 a 非整数，则 t^a 是多义的. 我们约定对于 t^a 应理解为其主值支，就是说，当 $t>0$ 时 t^a 是正的.

首先很明显，a 须 >-1，因部份积分

$$\int_0^1 e^{-st}t^a\,dt$$

只对 $a>-1$ 有意义. 此积分对于一切 s 均收敛. 余积分

$$\int_1^\infty e^{-st}t^a\,dt$$

当 $a\geqslant 0$ 时对（而且只对）$\Re s>0$ 收敛；当 $-1<a<0$ 时除对 $\Re s>0$ 外也还对 $s=iy\,(y\neq 0)$ 收敛. 事实上，当 $s=iy\,(y\neq 0)$ 时有

$$\int_1^\infty e^{-st}t^a\,dt=\int_1^\infty e^{-iyt}t^a\,dt=\int_1^\infty(\cos yt-i\sin yt)t^a dt.$$

若在有关 sin 的积分

$$\int_1^\omega t^a\sin yt\,dt$$

中令上限 ω 不是连续地而是经由 $\sin yt$ 的诸零点 $n\pi/y$ 趋向 ∞，则此积分提供一无穷级数的部分和，此无穷级数的通项为

$$\int_{n\pi/y}^{(n+1)\pi/y} t^a \sin yt\, dt.$$

此等项具有交替变更的符号且绝对值单调趋向 0（见图 2），故据 Leibniz 准则知，此级数收敛．但这样，对于连续趋向∞的 ω，$\int_1^\omega$ 也就具有一极限．因若 ω 位于 $n\pi/y$ 与 $(n+1)\pi/y$ 之间，则有

$$\left|\int_1^\omega - \int_1^{n\pi/y}\right| \leqslant \left|\int_{n\pi/y}^{(n+1)\pi/y}\right|,$$

而右端当 $\omega \to \infty$ 从而 $n \to \infty$ 时趋向 0．最后所作的考虑并非多余的，因一积分当上限非连续增大时虽收敛而当连续增大时则不收敛是完全可能出现的．例如

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2n\pi} \sin t\, dt \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

存在且等于 0，因

$$\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \sin t\, dt = 0.$$

但

$$\int_0^\omega \sin t\, dt$$

对于连续增大的 ω 却没有极限，而是不断振荡在 0 与 2 之间．

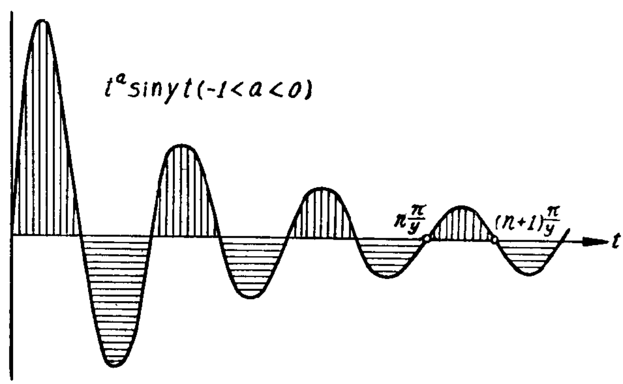

图 2

我们之所以把证明叙述得如此详细，是因为以后还将经常通过与无穷级数的比较来断定一积分的收敛性，而届时即可简单地