大学物理题典

胡盘新　主编

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本题典根据大学物理教学基本要求，从质点运动学一直到原子核物理，分为十七章，共汇萃了各类典型题目600多道，按难度不同分为基本题、较难题和难题三类。本题典题目选自国内外著名教材、习题集以及部分重点院校的试题和竞赛题，富有代表性和典型性。

本题典的解题过程着重分析，启发和引导读者，以培养和锻炼自己分析问题和解决问题的能力，重视学习方法的改进，养成良好的学习习惯。

本题典可供各类高等院校讲授和学习大学物理的师生、中学物理教师参考，也可作读者自学时的辅助书籍。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理题典/胡盘新主编．—上海市：上海交通大学出版社，2001(2002 重印)
ISBN 7-313-02615-3

Ⅰ．大…　Ⅱ．胡…　Ⅲ．物理学-高等学校-习题
Ⅳ．03-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 83497 号

大学物理题典

胡盘新　主编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号　邮政编码 200030)

电话:64071208　出版人:张天蔚

上海交通大学印刷厂印刷　全国新华书店经销

开本:890mm×1240mm 1/32　印张:20.75　字数:595 千字

2001 年 5 月第 1 版　2002 年 4 月第 2 次印刷

印数:4051～8100

ISBN 7-313-02615-3/O·131　**定价:31.00元**

前　言

大学物理是理工科大学生必修的一门重要基础课。解题是物理教学中的一个重要环节，它对于正确地、深入地理解基本内容，培养分析问题和解决问题的能力，以及从中汲取广博的实际知识等等具有不可替代的重要作用。

本题典的选题在内容上根据教学基本要求尽量覆盖大学物理教学内容，包括力学、振动和波、热学、电磁学、波动光学、相对论、量子物理和原子核物理等内容，按通常的分章节顺序进行编排。

本题典汇萃了国内外著名教材及习题集上具有典型意义的题目，以及部分重点院校的试题和物理竞赛题。富有代表性和典型性。按题目的难度不同，分为基本题、较难题和难题三类，后两者分别用星号 * 和 * * 标记以示区别，可供不同要求的读者选用。

本题典共精选 600 多题，其中基本题约占 70%，较难题约占 20%，难题约占 10%。

我们的解题重在分析和研究题中涉及的物理现象、物理过程以及题中所给的条件，从中找出这些现象和过程所遵循的规律，分析在各种条件下可能出现的结果或变化以及导致这些结果或变化的原因，有些题目我们采用不同方法进行了求解，对其结果还进行了讨论。因此，希望读者本着培养和锻炼自己能力这个目的来使用本题典，力图根除解题时乱套公式、拼凑答案、不求甚解的不良习惯。

本题典编写中得到了上海交通大学朱咏春教授、张馥宝教授、东华大学汤毓骏教授等大力支持和帮助，在此特致谢意。编者特别要对本书中题目出处的作者表示衷心的感谢。

本题典由胡盘新、顾希知、张炽伟、陶宗瑜、高景、张馥宝等共同编

写，最后由胡盘新审定整理。限于编者水平，错误和疏漏之处，敬请读者批评指正。

编　者

2001年元月

于上海交通大学

目　　录

一、质点运动学 …… 1
二、牛顿运动定律 …… 32
三、动量和角动量 …… 86
四、功和能 …… 124
五、刚体的运动 …… 171
六、机械振动 …… 223
七、机械波 …… 262
八、气体动理论 …… 290
九、热力学 …… 316
十、静电场 …… 355
十一、直流电路 …… 416
十二、稳恒磁场 …… 441
十三、变化电磁场 …… 498
十四、波动光学 …… 555
十五、相对论 …… 603
十六、量子物理 …… 623
十七、原子核物理 …… 649
主要参考书目 …… 656

一、质点运动学

1—1 如图1—1(a)所示，雷达站探测飞机的方位，在某一时刻测得飞机离该站 $r_1=4000\text{m}$，连线 r_1 与水平方向的夹角 $\theta_1=36.9°$；经过 0.8s 后，测得飞机离该站 $r_2=4200\text{m}$，连线 r_2 与水平的夹角 $\theta_2=30°$。求飞机在这段时间内的平均速度。

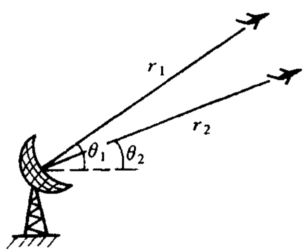

图 1—1(a)

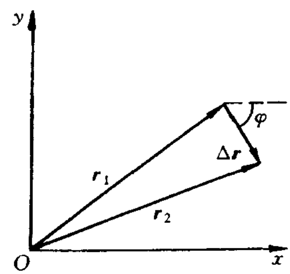

图 1—1(b)

解 取坐标系如图 1—1(b)所示，两次测得飞机的位矢分别为

$$\boldsymbol{r}_1=r_1\cos\theta_1\boldsymbol{i}+r_1\sin\theta_1\boldsymbol{j}=3200\boldsymbol{i}+2400\boldsymbol{j};$$

$$\boldsymbol{r}_2=r_2\cos\theta_2\boldsymbol{i}+r_2\sin\theta_2\boldsymbol{j}=3637\boldsymbol{i}+2100\boldsymbol{j}。$$

根据平均速度的定义，在 0.8s 内飞机的平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{\Delta t}=\frac{3637-3200}{0.8}\boldsymbol{i}+\frac{2100-2400}{0.8}\boldsymbol{j}$$

$$=546\boldsymbol{i}-375\boldsymbol{j}\ (\text{m/s})。$$

故平均速度的大小为

$$|\bar{\boldsymbol{v}}|=\sqrt{(546)^2+(375)^2}=6.62\times10^2\ \text{m/s}。$$

平均速度的方向与 x 轴的夹角为 $\varphi=\arctan\dfrac{-375}{546}=-34.5°$。

1—2 地面上垂直竖立一高 20m 的旗杆，已知正午时分太阳在旗

杆的正上方(图 1－2)。问:在下午 2 时正,杆顶在地面上影子的速度为多少? 在什么时刻杆影将伸展至 20m。

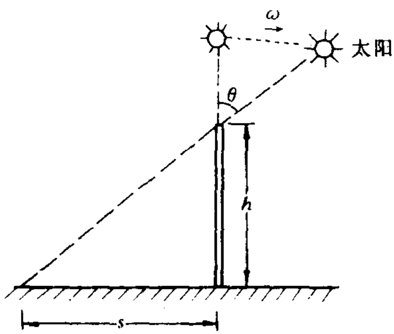

图 1－2

解 地球自西朝东自转相当于太阳自东朝西绕地球转动,地球自转一周为 24×60×60s,故太阳绕地球转动一周也是 24×60×60s。这样,太阳绕地球转动的角速度为

$$\omega = \frac{2\pi}{24\times 60\times 60}\ \mathrm{rad/s}。$$

如从正午时分开始计时,则杆的影长为 $s=h\tan\theta=h\tan\omega t$。

下午 2 时正杆顶在地面上影子的速度大小

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=h\omega\sec^2\omega t=\frac{\pi}{1620}\ \mathrm{m/s}。$$

当 $s=h$ 时,则 $t=\dfrac{1}{\omega}\arctan\dfrac{s}{h}=\dfrac{\pi}{4\omega}=3\times 60\times 60\mathrm{s}$。

即为下午 3 时正。

***1－3** 如图1－3所示,椭圆规的 AB 杆上,A,B 两点分别沿 Oy 槽、Ox 槽移动,试证明杆上一点 C 的轨迹为椭圆。又设杆上 A 点以匀速 v_0 运动,求 C 点的速度和加速度。

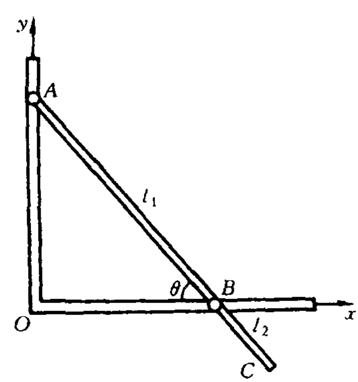

图 1－3

解 设某一时刻 AB 杆与 x 轴的夹角为 θ,则 C 点的坐标为

$x_C=l_1\cos\theta+l_2\cos\theta=(l_1+l_2)\cos\theta$,

$y_C=-l_2\sin\theta$。

在以上两式中消去 θ 得

$$\frac{x_C^2}{(l_1+l_2)^2}+\frac{y_C^2}{{l_2}^2}=1,$$

因而 C 点的轨迹为一椭圆。

C 点的速度分量为

$$v_{Cx}=\frac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t}=(l_1+l_2)(-\sin\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},$$

$$v_{Cy}=\frac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}t}=-l_2\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}。$$

因 $$x_A=0,y_A=l_1\sin\theta,$$

故 $$v_{Ax}=0,v_{Ay}=l_1\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}。$$

按题意 $v_A=v_0$， 得 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{v_0}{l_1\cos\theta}$。

代入 v_{Cx}，v_{Cy}式得

$$v_{Cx}=-\frac{(l_1+l_2)\sin\theta}{l_1\cos\theta}v_0=-\frac{l_1+l_2}{l_1}\tan\theta\, v_0,\quad v_{Cy}=-\frac{l_2}{l_1}v_0。$$

故 C 点的速度

$$v_C=\sqrt{{v_{Cx}}^2+{v_{Cy}}^2}=\frac{1}{l_1}\sqrt{(l_1+l_2)^2\tan^2\theta+{l_2}^2}\ v_0。$$

将 v_{Cx}和 v_{Cy}对时间求导数，得 C 点加速度的分量为

$$a_{Cx}=\frac{\mathrm{d}v_{Cx}}{\mathrm{d}t}=-(l_1+l_2)\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2-(l_1+l_2)\sin\theta\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2},$$

$$a_{Cy}=\frac{\mathrm{d}v_{Cy}}{\mathrm{d}t}=l_2\sin\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2-l_2\cos\theta\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}。$$

由于杆的 A 端作匀速直线运动，$a_A=0$ 或 $a_{Ay}=0$，因此

$$a_{Ay}=\frac{\mathrm{d}v_{Ay}}{\mathrm{d}t}=-l_1\sin\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2+l_1\cos\theta\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=0,$$

由此得 $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=\tan\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$， $a_{Cx}=-\frac{(l_1+l_2)}{\cos\theta}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$， $a_{Cy}=0$，

$$a_C=\sqrt{(a_{Cx})^2+(a_{Cy})^2}=\frac{l_1+l_2}{\cos\theta}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{l_1+l_2}{{l_1}^2}\cdot\frac{1}{\cos^3\theta}{v_0}^2。$$

1－4 河中有一小船，人在高为 h 的岸上用绳子通过一定滑轮以恒定速率 v_0 收绳拉船靠岸（图 1－4(a)），求船的速度和加速度。

解 以滑轮为原点，选坐标如图 1－4(b)所示，则船的位矢为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+h\boldsymbol{j}。$$

由速度定义得

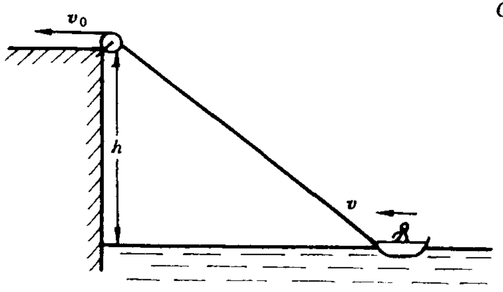

图 1－4(a)

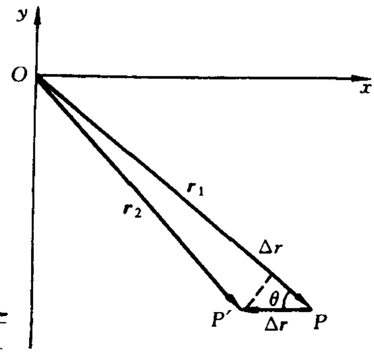

图 1－4(b)

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}=v_x\boldsymbol{i}。$$

由图知 $x=\sqrt{r^2-h^2}$,故　$v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{r}{\sqrt{r^2-h^2}}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$。

按题意 $v_0=-\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$,于是得船速:

$$v_x=-v_0\frac{r}{\sqrt{r^2-h^2}}=-v_0\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x},$$

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}=-v_0\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}\boldsymbol{i}。$$

上式中的负号表明船的速度 $\boldsymbol{v}$ 沿 x 轴的负方向。

根据加速度定义,有

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=v_0\frac{h^2}{\sqrt{x^2+h^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_0{}^2h}{x^3},\quad \boldsymbol{a}=-\frac{v_0{}^2h}{x^3}\boldsymbol{i}。$$

负号表示加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向与 x 正方向相反。但由于 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 同向,所以小船是加速靠岸的。

由上可见,船的速率为　$v=|v_x|=v_0\dfrac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}=\dfrac{v_0}{\cos\theta}>v_0$。

注意,人在拉船时,设 t 时刻船在位置 P,经过 Δt 后到达 P'位置,Δt 时间内船进行的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$,而绳缩短 Δr,由图可见 $|\Delta\boldsymbol{r}|>\Delta r$,因而船速

$v > v_0$，而不是收绳的速度。

此题也可用平面极坐标系来进行分析。将船速 $\boldsymbol{v}$ 分解为径向速度 $\boldsymbol{v}_r$ 和横向速度 $\boldsymbol{v}_\theta$，则收绳速率 v_0 就是径向速度的大小，由于 $\boldsymbol{v}_r$ 与 $\boldsymbol{e}_r$ 反向（$\mathrm{d}r<0$），故

$$\boldsymbol{v}_r=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r=-v_0\boldsymbol{e}_r。$$

式中 $\boldsymbol{e}_r$ 为位矢的单位矢量，于是有

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-r_0。$$

这与上面得到的结果相同。

1－5　一半径为 R 的轮子在水平面上以角速度 ω 作纯滚动（无滑动的滚动）。(1) 求轮缘上一点 P 的运动轨迹；(2) 求 P 点的速度和加速度；(3) 求轨迹线最高点处的曲率半径。

解　取轮缘上 P 点与水平面接触处为坐标原点 O，并将该时刻定为 $t=0$。

(1) 在任一时刻，P 点的坐标为

$$x=\overline{OA}-\overline{BA}=\widehat{AP}-\overline{BA}$$
$$=R\theta-R\sin\theta=R\omega t-R\sin\omega t=R(\omega t-\sin\omega t),$$
$$y=\overline{AC}-\overline{DC}=R-R\cos\theta=R-R\cos\omega t=R(1-\cos\omega t)。$$

这就是 P 点轨迹的参数方程，其轨迹为一摆线（图 1－5）。

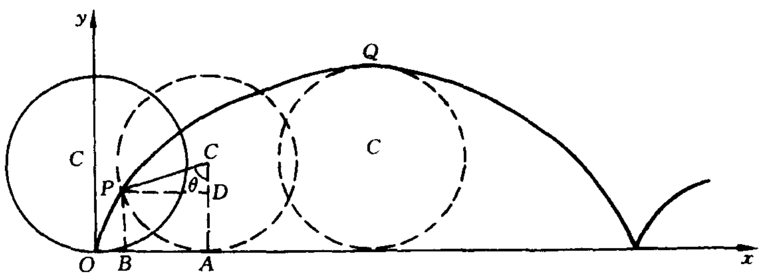

图 1－5

(2) P 点的速度为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=R\omega-R\omega\cos\omega t,\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=R\omega\sin\omega t,$$

$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = 2R\omega\sin\omega t。$$

P 点的加速度为

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = R\omega^2\sin\omega t, \quad a_y = R\omega^2\cos\omega t, \quad a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = R\omega^2。$$

加速度的大小不变，方向始终指向轮子中心。

(3) 根据 $a_{\mathrm{n}} = \dfrac{v^2}{\rho}$ 得

$$\rho = \frac{v^2}{a_{\mathrm{n}}},$$

在轨迹线的最高点 Q，相当于 $\omega t = \pi$，此时 $v_x = 2R\omega$， $v_y = 0$。

故 $v_Q = 2R\omega$， 而 $a_{\mathrm{n}Q} = a = R\omega^2$，

于是 $$\rho_Q = \frac{v_Q{}^2}{a_{\mathrm{n}Q}} = \frac{(2R\omega)^2}{R\omega^2} = 4R。$$

1－6 一质点在半径 $R=3\mathrm{m}$ 的圆周上沿逆时针方向作匀速率运动，完成一周所需的时间为 20s。在 $t=0$ 时质点从原点 O 开始运动，如图 1－6(a)所示。

(1) 列出质点的运动方程；(2) 当它走过 $\dfrac{2}{3}$ 圆周时，位移是多少？走过的路程是多少？这段时间内，平均速度是多少？在该点的瞬时速度如何？(3) 在 $t=5\mathrm{s}$ 到 $t=10\mathrm{s}$ 这段时间内，质点的位移、平均速度和平均加速度各是多少？

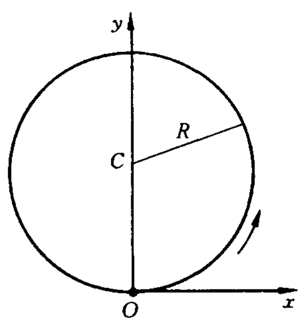

图 1－6(a)

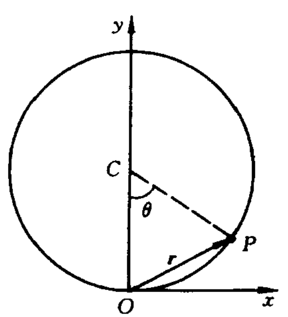

图 1－6(b)

解 (1) 在任一时刻,质点的位置坐标(图 1－6(b))为

$$x = R\sin\theta, \quad y = R(1-\cos\theta),$$

其中 $\theta=\frac{2\pi}{20}t=0.1\pi t$,于是质点的运动方程

$$\boldsymbol{r}(t) = 3\sin 0.1\pi t\,\boldsymbol{i} + 3(1-\cos 0.1\pi t)\boldsymbol{j}。$$

其中 t 以 s 计,r 以 m 计。

(2) 质点走过$\frac{2}{3}$圆周时,位于 Q 点,如图 1－6(c)所示,其坐标

$$x = R\sin\frac{2}{3}\cdot 2\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}R, \quad y = R\left(1-\cos\frac{2}{3}\cdot 2\pi\right) = \frac{3}{2}R。$$

位矢 $\boldsymbol{r}$ 的大小为 $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3}R=5.19\text{m}$。

位移为 $\Delta r=5.19\text{m}$。

路程 $\Delta s=\frac{2}{3}\times 2\pi R=12.56\text{m}$。

走过$\frac{2}{3}$圆周所需时间为 $\Delta t=\frac{2}{3}\times 20=13.3\text{s}$。

在这段时间的平均速度 $\bar{v}=\frac{\Delta r}{\Delta t}=\frac{5.19}{13.3}=0.39\text{m/s}$。

方向与位移相同。

质点运动的速率 $v=\frac{2\pi R}{T}=\frac{2\pi\times 3}{20}=0.942\text{m/s}$。

因而在 Q 点质点的瞬时速度为 0.942m/s,方向沿 Q 点的切线方向,即与 x 轴成 240°角。

(3) 在 $t=5\text{s}$ 和 $t=10\text{s}$ 的位矢(图 1－6(d))分别为

$$\boldsymbol{r}_5 = 3\sin 0.5\pi\boldsymbol{i} + 3(1-\cos 0.5\pi)\boldsymbol{j}.$$

$$\boldsymbol{r}_{10} = 3\sin\pi\boldsymbol{i} + 3(1-\cos\pi)\boldsymbol{j}。$$

这段时间内的位移为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{10}-\boldsymbol{r}_5 &= 3(\sin\pi-\sin 0.5\pi)\boldsymbol{i} + 3[(1-\cos\pi)-(1-\cos 0.5\pi)]\boldsymbol{j}\\ &= -3\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}。\end{aligned}$$

位移的大小为 $\Delta r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=3\sqrt{2}=4.24\text{m}$。

方向为 $\theta=\arctan\frac{-3}{13}=135^\circ$,即与 x 轴成 135°角。

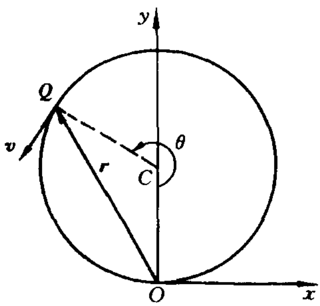

图 1—6(c)

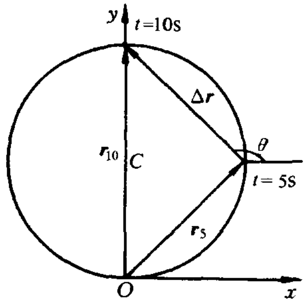

图 1—6(d)

在这段时间内的平均速度

$$\bar{v}=\frac{\Delta r}{\Delta t}=\frac{4.24}{10-5}=0.848\mathrm{m/s}。$$

方向与位移相同。

将 $\boldsymbol{r}(t)$对时间 t 求导,可得瞬时速度矢量式:

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=0.3\pi\cos0.1\pi t\,\boldsymbol{i}+0.3\pi\sin0.1\pi t\boldsymbol{j}。$$

瞬时速度的大小

$$v=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2}=\sqrt{(0.3\pi\cos0.1\pi t)^2+(0.3\pi\sin0.1\pi t)^2}$$
$$=0.3\pi=0.942\mathrm{m/s}。$$

大小不变,而其方向随时而变。

在 $t=5\mathrm{s}$ 和 $t=10\mathrm{s}$ 的瞬时速度的矢量式为

$$\boldsymbol{v}_5=0.3\pi\cos0.5\pi\boldsymbol{i}+0.3\pi\sin0.5\pi\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{v}_{10}=0.3\pi\cos\pi\boldsymbol{i}+0.3\pi\sin\pi\boldsymbol{j}。$$

在这段时间内的平均加速度为

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{(0.3\pi\cos\pi-0.3\pi\cos0.5\pi)\boldsymbol{i}-(0.3\pi\sin\pi-0.3\pi\cos\pi)\boldsymbol{j}}{10-5}$$
$$=-0.06\pi\boldsymbol{i}-0.06\pi\boldsymbol{j}。$$

平均加速度

$$\bar{a}=\sqrt{(0.06)^2+(0.06)^2}=0.848\mathrm{m/s^2}。$$

方向为 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的方向。

将 $\boldsymbol{v}(t)$ 对时间 t 求导，可得瞬时加速度的矢量式

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-0.03\pi^2\sin 0.1\pi t\,\boldsymbol{i}+0.03\pi^2\cos 0.1\pi t\boldsymbol{j}\text{。}$$

其大小 $a=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2}=\sqrt{(-0.03\pi^2\sin 0.1\pi t)^2+(0.03\pi^2\cos 0.1\pi t)^2}$

$=0.03\pi^2=0.296\mathrm{m/s^2}$。

大小不变，方向指向圆心。

1—7 一直杆，一端与半径为 R 的固定大圆环连结在 O 点，直杆还穿过套在大环上的小环 M，如图 1—7(a)。已知直杆以匀角速绕 O 点转动，试求小环 M 的速度和加速度。

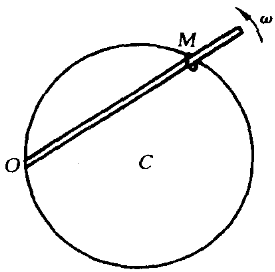

图 1—7(a)

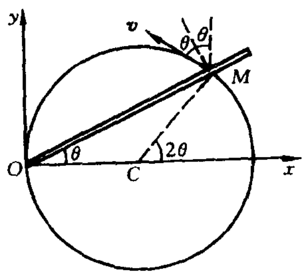

图 1—7(b)

解 1 以 O 点为原点建立直角坐标系 xOy（图 1—7(b)），则小环 M 的运动学方程为 $x=OM\cos\theta$， $y=OM\sin\theta$。

若 $t=0$ 时，$\theta=\alpha$，则 $\theta=\omega t+\alpha$。

又 $OM=2R\cos\theta$，

故 $x=2R\cos^2(\omega t+\alpha)$， $y=R\sin 2(\omega t+\alpha)$。

通过求导可得速度 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$

$=[-2R\omega\sin 2(\omega t+\alpha)]\boldsymbol{i}+[2R\omega\cos 2(\omega t+\alpha)]\boldsymbol{j}$。

由此可知速度的大小为 $2R\omega$，$\boldsymbol{v}$ 与 y 轴的夹角为 $2(\omega t+\alpha)$，即 2θ，从图上可以看出，$\boldsymbol{v}$ 的方向正是 M 点圆的切线方向。

再求一次导数可得小环 M 的加速度：

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}i+\frac{d^2y}{dt^2}j=[-4R\omega^2\cos2(\omega t+\alpha)]i+[-4R\omega^2\sin^2(\omega t+\alpha)]j。$$

由此可知加速度的大小为 $4R\omega^2$，方向指向圆心。

解 2 以 O 为原点、x 轴为极轴建立平面极坐标系（图 1－7(c)），则小环的运动学方程

$$r=2R\cos(\omega t+\alpha);\quad \theta=\omega t+\alpha。$$

小环 M 的速度

$$v=\frac{dr}{dt}r^0+r\frac{d\theta}{dt}\theta^0=[-2R\omega\sin(\omega t+\alpha)]r^0+[r\omega]\theta^0$$

$$=[-2R\omega\sin(\omega t+\alpha)]r^0+[2R\omega\cos(\omega t+\alpha)]\theta^0。$$

由此可知速度的大小为 $2R\omega$，v 与 θ^0 的夹角为 $(\omega t+\alpha)$，即 v 正好沿 M 点的切线方向。

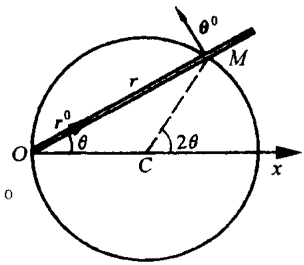

图 1－7(c)

小环 M 的加速度为

$$a=\left[\frac{d^2r}{dt^2}+r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]r^0+\left[r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\theta^0$$

$$=[-4r\omega^2\cos(\omega t+\alpha)]r^0+[-4R\omega^2\cos(\omega t+\alpha)]\theta^0,$$

此式表明加速度的大小为 $4R\omega^2$，其方向指向圆心。

解 3 采用自然坐标系，取大圆上 A 点为计算弧坐标的起点，以运动方向为其正方向（图 1－7(d)），则小环 M 的运动学方程：

$$s=\widehat{AM}=R(2\theta)=2R(\omega t+\alpha)。$$

则可求得小环 M 的速度和加速度：

$$v=\frac{ds}{dt}\tau^0=2R\omega\tau^0,$$

$$a=\frac{d^2s}{dt^2}\tau^0+\frac{v^2}{\rho}n^0=\frac{4R^2\omega^2}{R}n^0=4R\omega^2n^0。$$

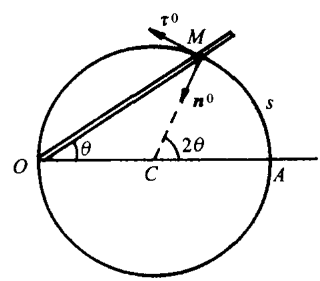

图 1－7(d)

1－8 以速度 v 与地面成 θ_0 角发射一火箭，在驱动力、阻力和重力三者作用下，使火箭作恒定速率 v 的曲线运动。已知驱动力和阻力所产生的加速度只有切向分量。求火箭的轨迹。

解 设驱动力和阻力所产生的加速度为 a'_t，则火箭的加速度

$$a=a'_t+g,$$

其切向分量和法向分量分别为

$$a_t = a'_t - g\sin\theta,\quad a_n = g\cos\theta,$$

式中 θ 为 $\boldsymbol{g}$ 与轨迹法线之间的夹角，即 $\boldsymbol{v}$ 与 x 轴间的夹角(图 1—8)。由于火箭沿轨迹作恒速运动，故 $a_t=0$，于是

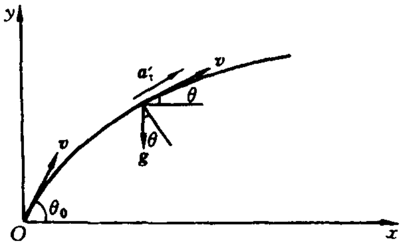

图 1—8

$$a_t = \frac{dv}{dt} = a'_t - g\sin\theta = 0, \quad (1)$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = g\cos\theta, \quad (2)$$

式中 ρ 为火箭所在处的曲率半径，而 $\rho=\frac{ds}{d\theta}$, $\cos\theta=\frac{dx}{ds}$，得

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{g}{v^2}。$$

将上式积分，并考虑初始条件，当 $x_0=0$ 时，$\varphi_0=\theta_0$，得

$$\theta = \frac{g}{v^2}x + \theta_0。$$

又根据 $\tan\theta=\frac{dy}{dx}$，得 $$\frac{dy}{dx}=\tan\left(\theta_0+\frac{gx}{v^2}\right),$$

考虑到初始条件，当 $x=0$ 时，$y=0$，积分得

$$y = \frac{v^2}{g}\ln\left|\frac{\cos\theta_0}{\cos(\theta_0+gx/v^2)}\right|。$$

1—9 一升降机以加速度 $a=1.22\text{m/s}^2$ 上升，当上升速度为 $v_0=2.44\text{m/s}$ 时，有一螺帽自升降机的顶板上松落，天花板与升降机底板相距 $h=2.74\text{m}$。试计算：(1) 螺帽从天花板落到底面的时间；(2) 螺帽相对于地面下降的距离。

解 1 (1)以地面为参考系，取坐标系如图 1—9 所示。当螺帽自顶板松落时，底板的坐标为 y_0，顶板与螺帽的坐标为 y_0+h，经过时间 t，底板与螺帽的坐标分别为 y_1 和 y_2，由匀加速直线运动位移公式得

$$y_1 - y_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2,\quad y_2-(y_0+h) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2。$$

当螺帽落到底板上时，$y_1=y_2$，设此时刻为 t_1，由以上两式可给出

$$v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 = h + v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2,$$

由此解得

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a+g}} = \sqrt{\frac{2 \times 2.74}{1.22 + 9.80}} = 0.705\text{s}。$$

(2) 螺帽相对于地面下降的距离

$$d = (y_0 + h) - y_2 = \frac{1}{2} g t_1^2 - v_0 t_1$$

$$= \frac{1}{2} \times 9.80 \times (0.705)^2 - 2.44 \times 0.705$$

$$= 0.720\text{m}。$$

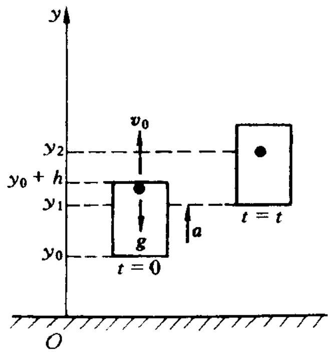

图 1—9

解 2 以升降机为参考系，坐标原点选在升降机的底板上，向上为正方向。此时螺帽对升降机的加速度

$$a' = -g - a = -9.80 - 1.22 = -11.02\text{m/s}^2,$$

由匀加速直线运动位移公式 $y - h = \frac{1}{2} a' t^2$，

当螺帽落到底板时，$y=0$，由此得螺帽落到底板的时间

$$t = \sqrt{\frac{2h}{-a'}} = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = 0.705\text{s}。$$

1—10 设一反坦克手站在离公路 $d=50\text{m}$ 远的地方，路上有一敌坦克驰来，速度为 $v_1=10\text{m/s}$。若坦克与人相距 $a=200\text{m}$，而此人奔跑速率最大不超过 3.0m/s。试问：(1) 他应向哪一方向奔跑才能与坦克相遇？(2) 他至少应以什么速度跑，才能与坦克相遇？

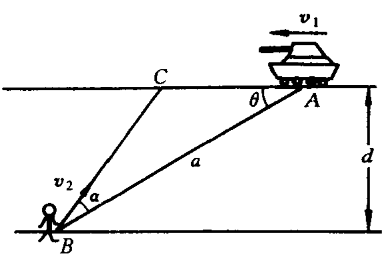

图 1—10

解 (1) 设反坦克手奔跑的速度为 v_2，并设相遇于 C 点，则

$$AC = v_1 t, \quad BC = v_2 t。$$

由$\triangle ABC$ 知

$$\frac{v_1 t}{\sin\alpha} = \frac{v_2 t}{\sin\theta}。$$