题解中心

# 几何辞典

薛德炯 吴载耀 编译

上海科学技术出版社

题解中心

# 几何学辞典

〔日本〕長澤龜之助原著

薛德炯　吴载耀　编译

上海科学技术出版社

## 内容提要

本书为“数学辞典”的第三册，上卷内容分平面几何学解法之部、名词之部两门，解法门又分直线、圆、面积、比例、多角形计算题、轨迹作图、极大极小等十编，循序渐进由浅入深。载有题解2,428题，插图2,740个，卷首冠有与平面几何有关的要项，卷末附有英汉名词对照表。上卷约计650千字，附刊题解分类索引，记述简明，易于查索。

下卷内容分立体几何解法之部、平面几何学补遗之部、近世几何解法之部、常用曲线解法之部、名词之部、几何学小史等六门，载有题解1,638题，插图1,700个，卷首冠有几何学公式集，卷末附有英汉名词对照表及有关直角三角形、斜三角形解各表。下卷约计650千字附刊题解分类索引，记述简明，易于查索。

本书出版于1935年，内容不尽正确，但为了目前各方面的需要，仍以旧版重印，供各地中、小学教师作备课时的参考。


题 解 中 心

**几 何 学 辞 典**

〔日本〕长泽龟之助 原著

薛德炯 吴载耀 编译

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张43.25 插页4 字数1,100,000

1959年11月新1版 1961年8月第3次印刷

印数：22,001—[illegible]

统一书号：17119·9 定价（科五）5.50元

（国内发行）

## 普通公理

(a) 全量大於其部分.

(b) 全量等於其各部分之和.

(c) 同量之各等量相等.

(d) 等量加等量,其和相等.

(e) 等量減等量,其差相等.

(f) 等量加不等量,其和不等,所加之量大,其和亦大.

(g) 等量減不等量,其差不等,被減之量大,其差亦大.

(h) 等量之若干倍或若干等分相等.

## 幾何公理

1. 圖形得不變其形狀及大小而變其位置.

2. 可完全相合之量相等.

由普通公理 (d) 及 (e) 擴張之,則如次.

有甲乙二組之量,若甲組之量,分別等於乙組之量,則甲組各量之和與乙組各量之和,雖不全合,亦相等.

3. 過二點得引一直線,且限於一:又直線得向其任何方延長之.由是又可得以下二條.

α. 二任意直線,得將其一直線上之任意所設點,置於他直線上之任意所設點,而使二直線相合.

β. 二直線會於一點,而不全合,則此二直線不復相會.

4. 過一點得引所設直線之一平行線,且限於一.

## 定理之關係

1. 定理者,得由已知命題以證其爲眞理之命題也.但已知命題,或爲公理,或爲定理.

定理之敍述分二部,曰假設,曰終結是.假設者,假定之事,終結者,由假設所得之結果.茲示其體形如下.

設 A 爲 B, 則 C 爲 D.　(1)

其中設 A 爲 B 爲假設,則 C 爲 D 爲終結.

若此定理果眞,則下定理亦必眞.

設 C 非 D, 則 A 非 B.　(2)

如 (1) 與 (2) 者,曰互爲對定理.例如馬爲四足動物一命題,依前所示體形改述之,則如下.

設動物爲馬,則此動物有四足.

其對定理爲

設動物無四足,則此動物非馬.

而此定理之爲眞,可無疑義.

2. 有二定理,若其任一定理之假設,爲他定理之終結,則此二定理之一,曰他定理之逆定理.例如定理

設 C 爲 D, 則 A 爲 B.　(3)

爲 (1) 之逆定理.又 3 之對定理爲

設 A 非 B, 則 C 非 D.　(4)

(4) 曰 (1) 之倒定理.

一定理雖眞,但不能斷其逆定理及倒定理亦爲眞;欲斷後者之眞僞,須別加探討.

例如就前舉之定理,

設動物爲馬,則此動物有四足.

其逆定理爲

設動物有四足,則此動物爲馬.

又其倒定理爲

設動物非馬,則此動物無四足.

由此二者,即可知逆定理與倒定理不能普徧為眞.

3. 上述定理之四種形式,茲列舉之如次.

原定理. 設 A 為 B, 則 C 為 D. (1)

其對定理. 設 C 非 D, 則 A 非 B. (2)

其逆定理. 設 C 為 D, 則 A 為 B. (3)

其倒定理. 設 A 非 B, 則 C 非 D. (4)

若 (1) 為眞,則 (2) 必為眞.又因 (4) 為 (3) 之對定理,故 (3) 與 (4) 同時為眞.然 (1) 雖為眞,不能據以斷言 (3) 或 (4) 亦為眞.故此四種形式之定理中,若已就幾何學證明其非互為對定理之二者,即 (1) 與 (3), (1) 與 (4), (2) 與 (3), 或 (2) 與 (4), 則其他定理,可不俟證明而知其為眞矣.

4. 若定理之假設甚複雜,則交換假設之一與終結,即得原定理之逆定理.例如定理

$$設\ \left\{\begin{array}{l}A=D\\B=E\\C=F\end{array}\right\},\ 則\ M=N,$$

其逆定理為

$$設\ \left\{\begin{array}{l}A=D\\B=E\\M=N\end{array}\right\},\ 則\ C=F,$$

$$設\ \left\{\begin{array}{l}A=D\\M=N\\C=F\end{array}\right\},\ 則\ B=E.$$

5. 轉換法.亦稱窮舉證法.設有業已證明之一羣定理,凡可發生之事,已盡於假設,而終結不能兩立,即其中之二,不能同時成立,則此一羣定理之逆定理,亦必為眞.如此之一羣定理,其最簡單之例,為業已證明之一定理與其倒定理;此二定理中,其一之逆定理,即他一之對定理,由此一事,即可知轉換法之眞.又幾何學中數見不鮮之一例如下.

設 A 大於 B, 則 C 大於 D.

設 A 等於 B, 則 C 等於 D.

設 A 小於 B, 則 C 小於 D.

若此三定理,業已證明為眞,則其逆定理亦必為眞;即

設 C 大於 D, 則 A 大於 B.

設 C 等於 D, 則 A 等於 B.

設 C 小於 D, 則 A 小於 B.

6. 同一法.設有唯一之 A 及唯一之 B, 且已知 A 為 B. 則可斷定 B 為 A.

例如,設有一定直線 AB, 及此線外之定點 P, 則因由 P 至 AB 所引之最短線唯一,由 P 至 AB 所引之垂線亦唯一,且最短線為垂線,故由同一法,可徑知垂線為最短線.

## 平 面 軌 跡

決定點之位置時,有時所設條件雖不足完全確定其位置,但可充分限制其點之位置,令在一線,或線之一部,或若干線上.此時謂點有軌跡.若一線,或線之一部,或若干線上之點,皆適合一定條件,且除此以外,更無適合此條件之點,則此線,或線之一部,或若干線曰適合條件之點之軌跡.據此,欲決定一線,或線之一部,或若干線 X 為適合條件 A 之點之軌跡,其充要手續為證明以下一組定理之成立.

1. 適合條件 A 之點在 X 上.

2. X 上之點適合條件 A.

又以下定理代 (1) 亦可,

3. 不在 X 上之點,不適合條件 A.

又以下定理代 (2) 亦可.

4. 不適合條件 A 之點,不在 X 上

附記 有時軌跡爲平面之一部. 觀第一門 1526 題及 1529 題.

## 作　圖　題

作圖題之目的, 在完成幾何學的作圖. 解作圖題時, 得使用准許使用之工具; 若限制使用之工具, 而令其範圍愈狹隘, 則用此工具以解之作圖題之範圍亦愈狹隘,從而其解法亦愈困難. 初等幾何學中,准許使用之工具,不外規及矩二物. 所謂規者,即兩脚規,用以作圖及移距離之具也; 所謂矩者,即直尺,用以引直線及延長直線之具也.

## 作 圖 公 法

1. 由一任意點, 至他一任意點, 得引一直線.
2. 有限直線得任意延長之.
3. 以任意點爲中心,任意有限直線爲半徑,得作一圓.

## 倍 量 之 性 質

### I. 關於可通約量者

1. 若 $A=B$, 則 $mA=mB$.
2. 若 $mA=mB$, 則 $A=B$.
3. $mA+mB+\cdots\cdots=m(A+B+\cdots\cdots)$.
4. $mA-mB=m(A-B)$, 但 $A>B$.
5. $mA+nA=(m+n)A$.
6. $mA-nA=(m-n)A$, 但 $m>n$.
7. $m\cdot nA=mn\cdot A=nm\cdot A=n\cdot mA$.

### II. 關於不可通約量者

1. 若 $A>=<B$, 則 $mA>=<mB$.
2. 若 $mA>=<mB$, 則 $A>=<B$.
3. $mA+mB+\cdots\cdots=m(A+B+\cdots\cdots)$.
4. $mA-mB=m(A-B)$, 但 $A>B$.
5. $mA+nA+\cdots\cdots=(m+n+\cdots\cdots)A$.
6. $mA-nA=(m-n)A$, 但 $m>n$.
7. $m\cdot nA=mn\cdot A=nm\cdot A=n\cdot mA$.

## 比 例 之 定 理

1. 等於同比之比皆相等.

例如,設 $A:B=P:Q$,　$X:Y=P:Q$,

則　　$A:B=X:Y$.

2. 設二比相等, 若第一比之前項較其後項大,或等,或小,則第二比之前項,從而較其後項大,或等,或小.

例如,設　$A:B=P:Q$,

若　　$A>=<B$,

則從而　$P>=<Q$

3. 若二比相等,則其反比亦等.

例如,設　$A:B=P:Q$,

則　　$B:A=Q:P$.

4 取二量之一與第三量之比時, 若第一量較第二量大, 或等,或小, 則第一比從而較第二比大,或等,或小. 又取一量與他二量之比時, 若二量之第一量較第二量小, 或等, 或大, 則第一比較第二比大, 或等, 或

小.例如,設 $A, B, C$ 為同種之三量,若

$$A>=<C,$$

則從而 $A:C>=<B:C.$

又若 $A<=>B,$

則從而 $C:A>=<C:B.$

5. 二量之等倍量之比,等於此二量之比.其逆定理亦真.

例如, $mA:mB=A:B$

$$A:B=mA:mB.$$

6. 若二量 $A, B$ 與二整數 $m, n$ 有同比,則 $nA=mB$. 反之,若 $nA=mB$, 則 $A$ 與 $B$ 之比,等於 $m$ 與 $n$ 之比.

7. 若 $A:B=P:Q,\quad nA=mB,$

則 $nP=mQ.$

8. 設同種之四量成比例,若其第二量較第四量大,或等,或小,則第一量從而較第三量大,或等,或小.

例如,設 $A:B=C:D,$

若 $B>=<D,$

則從而 $A>=<C.$

9. 若同種之四量成比例,則第一量與第三量之比,等於第二量與第四量之比[更比定理].

例如,設 $A:B=C:D,$

則 $A:C=B:D.$

10. 若同種之若干量成比例,則其一前項與一後項之比,等於其諸前項之和與諸後項之和之比[加比定理].

例如,設 $A:B=C:D=E:F=\cdots\cdots$

則 $A:B=A+C+E+\cdots:B+D+F+\cdots.$

11. 設二比相等,則第一比中前項後項之和[差]對後項之比,等於第二比中前項後項之和[差]對後項之比.

例如,設 $A:B=P:Q,$

則 $A+B:B=P+Q:Q$ [合比定理],

及 $A\sim B:B=P\sim Q:Q$ [分比定理].

12. 設兩比相等,若取兩前項之等倍量及兩後項之等倍量,則第一比中前項倍量與後項倍量之比,等於第二比中前項倍量與後項倍量之比.

例如,設 $A:B=P:Q,$

則 $mA:nB=mP:nQ.$

13. 有甲乙二組之量,甲組中第一量與第二量之比,等於乙組中第一量與第二量之比,又甲組中第二量與第三量之比,等於乙組中第二量與第三量之比,以下類此,則甲組中第一量與最後量之比,等於乙組中第一量與最後量之比[等比定理].

例如,設甲組之若干量為 $A, B, C, \cdots\cdots, H, K$, 乙組之若干量為 $P, Q, R, \cdots\cdots, X, Y$, 而

$$A:B=P:Q,$$

$$B:C=Q:R,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$H:K=X:Y,$$

則 $A:K=P:Y.$

14. 若 $A:C=P:R,\quad B:C=Q:R,$

則 $A+B:C=P+Q:R.$

15. 若二比相等,則其二乘比亦等;反之,若二比之二乘比相等,則其比亦等.

例如,設 $A:B=P:Q,$

則 $A^2:B^2=P^2:Q^2.$

反之,設 $A^2:B^2=P^2:Q^2,$

則 $A:B=P:Q.$

16. 若二比相等,則其三乘比亦等.反之,設

二比之三乘比相等,則其比亦等.

例如,設 $A:B=P:Q$,

則 $A^3:B^3=P^3:Q^3$,

反之,設 $A^3:B^3=P^3:Q^3$,

則 $A:B=P:Q$,

## 極 限 論

1. 某量有一定之值,則此量曰常數;若從某條件而消長增減,則此量曰變數.

2. 設一變數之值漸漸趨近一常數,其差得小於任意小之數,但此變數不能等於常數,則此常數曰變數之極限,而謂變數無限趨近其極限.變數漸漸增大而趨近其極限時,其極限曰增極;漸漸減小而趨近其極限時,其極限曰減極.

3. 設一點由 A 向 B 運動,第一秒間由 A 移至 AB 之中點 M,第二秒間由 M 移至 MB 之中點 M′,第三秒間,由 M′ 移至 M′B 之中點 M″,以下類推.


此時運動之點,雖可任意趨近 B,但決不能達於 B;因設某時動點在 A, B 間之某處,則下一秒此點在由此至 B 之中央,故此點雖可漸漸趨近 B,而欲達到 B,則須尚須行距離之半分也,故決不能達 B.因此,由 A 至動點之距離,乃一變數,以常數 AB 為極限而無限趨近之;由動點至 B 之距離,亦為一變數,以常數零為極限而無限趨近之.

茲設 AB 之長為 2 寸,由 A 至動點之變數為 $x$,此變數與其極限之差為 $v$,則

第一秒後 $x=1$, $v=1$,

第二秒後 $x=1+\frac{1}{2}$, $v=\frac{1}{2}$,

第三秒後 $x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $v=\frac{1}{4}$,

第四秒後 $x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, $v=\frac{1}{8}$,

餘準此.

級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ 之和,顯然小於 2;但項數愈多,則與 2 之差愈小,故此差得為任意小.因此 2 為此級數在項數為無窮多時之極限,零為此級數與 2 之差之極限.

4. (1) 變數與其極限之差,為一變數,其極限為零.

(2) 兩個以上之變數 $v, v', v'', \cdots\cdots$ 等,其極限皆為零,則其和 $v+v'+v''+\cdots\cdots$ 之極限亦為零.

(3) 設變數 $v$ 之極限為零,則 $a\pm v$ 之極限為常數 $a$,又 $a\times v$ 之極限為零.

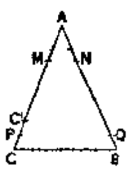
(4) 常數及變數之積,亦為變數;常數與變數之積之極限,為此變數之極限與常數之積.

(5) 設二變數為俱增大之變數,或俱減小之變數,則此二變數之和或積亦為一變數.

(6) 設二變數恆相等,則其極限亦相等.

設兩變數 AM, AN 恆相等,其極限分別為 AC, AB,求證 AC=AB.

證 設 AC>AB.取短於 AC 之 AC′,令 AC′=AB.因 AM 無限趨近 AC,故得假定 AM 達到大於 AC′ 之某值 AP,命 AQ 為對應於 AP 之 AN 值.於是 AP=AQ, AC′=AB.由



二不等式之非眞理，至爲明顯，因 $AP>AC'$, $AQ<AB$ 故也. 故 AC 不能大於 AB. 同理，AC 不能小於 AB, 即 AB 不能大於 AC. 要之，AC 較 AB, 既不能大，亦不能小，故 AC 非等於 AB 不可.

(7) 設二變數有定比，則其極限亦有同比. 極限以 lim 記之，例如 $\lim(x)$ 爲 $x$ 之極限.

證 設 $x$ 及 $y$ 爲二變數，$r$ 爲定比，則 $x:y=r$, 即 $x=ry$, 故 $\lim(x)=\lim(ry)=r\lim(y)$, 故 $\lim(x):\lim(y)=r$.

(8) 設比爲不可通約數，則此比爲其累次近似值之極限，故有以下之定理.

不可通約之二比 $a:b$ 及 $a':b'$, 表之至同樣精密時，恆有同一之近似值，則此二比相等.

(9) 兩個以上之變數，其代數和之極限，等於其極限之代數和.

設 $x, y, z$ 爲變數，其極限分別爲 $a, b, c$, 則 $\lim(x+y+z)=a+b+c$, 試證之.

證 設 $a-x=v$, $b-y=v'$, $c-z=v''$, 則 $x=a-v$, $y=b-v'$, $z=c-v''$. 此時 $x+y+z=a-v+b-v'+c-v''$,

故 $\lim(x+y+z)$,

$$=\lim(a-v+b-v'+c-v''),\quad (6)$$

然 $\lim(a-v+b-v'+c-v'')$

$$=a+b+c,\quad (3)$$

故 $\lim(x+y+z)=a+b+c$.

(10) 兩個以上之變數，其積之極限，等於其極限之積.

設 $x, y, z$ 爲變數，其極限分別爲 $a, b, c$, 則 $\lim(xyz)=abc$, 試證之.

證 設 $x=a-v$, $y=b-v'$, $z=c-v''$, 取其各邊之積，則

$xyz=abc\pm$(以 $v, v', v''$ 之一，或二，或全體爲因數之諸項).

因此上式中自符號$\pm$以下諸項之極限爲零， (3)

故 $\lim(xyz)$

$$=\lim\{abc\pm(\text{極限爲零之諸項})\}\quad (6)$$

故 $\lim(xyz)=abc$.

以上之變數，係假定爲增大者，但對於減小之變數，證明同此.

## 記號及略語

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\therefore$ | 故. | $\because$ | 何則. |
| $=$ | 等於. | $\neq$ | 不等於. |
| $>$ | 大於. | $<$ | 小於. |
| $\geq$ | 大於及等於. | $\leq$ | 小於及等於. |
| $+$ | 加. | $-$ | 減以. |
| $\pm$ | 加減. | $\sim$ | 差. |
| $\overset{\sim}{+}$ | 加及差. | $\wedge$ | 角. |
| $\hat{R}$ | 直角. | $\triangle$ | 三角形. |
| $\parallel$ | 平行於. | $\perp$ | 垂直於. |
| $\equiv$ | 全等於. | ▱ | 平行四邊形. |
| □ | 正方形. | ▭ | 矩形. |
| $:$ | 比. | $\backsim$ | 相似. |

普.公. 普通公理. 幾.公. 幾何學公理.
公法. 作圖公法.

# 目 录 上 卷

# 目 录 下 卷

# 上　　卷

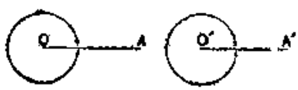
# 第一門　解法之部

## 第一編
## 直　線

### 第一章　角及直線

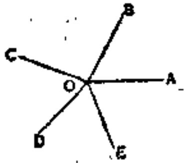
**1.** 凡周角皆相等.

**證** 周角O及O′分別爲主線OA及O′A′




以O, O′爲樞,就紙面上翻轉一周所成之角,故取其周角之一O,叠於O′上,令OA叠於O′A′上,而得全合. 因此周角O,等於周角O′.

**2.** 由同一之點,引若干直線,則各直線與其下一直線所成各角之和,等於四直角.

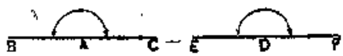



**證** 由同一點O所引之若干直線OA, OB, OC, OD, OE依次所成之鄰角$A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$, $E\hat{O}A$,其和等於周角,故等於$4\hat{R}$.

**3.** 凡平角皆相等.

**證** 平角等於周角之半分,而周角皆相等[1題],故平角亦皆相等.

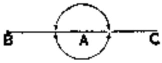
**別證** 設所欲證者,爲AB, AC所夾之平角,等於DE, DF所夾之平角. 今AB, AC




所夾之角爲平角,故BA, AC成一直線BAC. 同理, ED, DF亦成一直線EDF. 於是得置直線BAC於直線EDF上,使A點與D點相合.[幾.公.(3)α.] 但B與E在D之同側,C與F在D之他側,或B與F在D之同側,C與E在D之他側皆可. 總之,於無論何款中, AB, AC所夾之平角,與DE, DF所夾之平角全合. 凡得全合之量相等[幾.公.(2)],故此二平角相等.

**注意** 別證乃不依據周角之相等,而獨立證明平角之相等者也. 5題中直角之別證亦準此.

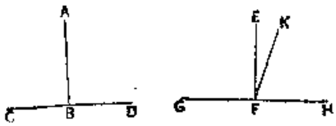
**4.** 同一之二邊AB, AC所夾之二平角相等.




證 由前題,一望而知其為相等[本題為前題之特例].

5. 凡直角皆相等.

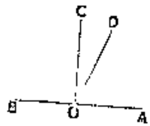
證 直角為平角之半分,而等量之半分皆相等[普.公.(h)],故直角皆相等.



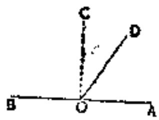

別證 設ABC為直線AB立於直線CBD上所成之直角,EFG為直線EF立於直線GFH上所成之直角,求證$A\hat{B}C$等於$E\hat{F}G$.今將直線CBD置於直線GFH上,B點落於F點,BA與EF在直線GFH之同側,則直線BA當與直線FE相合.何則,蓋若不然,則BA或落於$E\hat{F}H$之內,或落於$E\hat{F}G$之內.茲假定BA落於$E\hat{F}H$之內,命其位置為FK.此時$K\hat{F}G$為直角,故等於$K\hat{F}H$[直角定義].然$E\hat{F}H$大於$K\hat{F}H$[普.公.(a)],故$E\hat{F}H$又大於$K\hat{F}G$,故$E\hat{F}H$又大於$E\hat{F}G$[普.公.(a)].然$E\hat{F}G$為直角,故等於$E\hat{F}H$[直角定義].故$E\hat{F}G$小於$E\hat{F}H$,又等於$E\hat{F}H$.然此為不可能,故直線BA不落於$E\hat{F}H$之內.仿此得證直線BA亦不落於$E\hat{F}H$之內.故直線BA與直線EF相合.故$A\hat{B}C$與$E\hat{F}G$相合,而$A\hat{B}C=E\hat{F}G$[幾.公.(2)].

6. 於一所設直線上之一所設點,得引其線之一垂線,而以一為限.

證 二等分平角AOB之直線CO,令鄰角COA, COB皆為直角,故CO為AB之垂線.若除CO以外,於AB上之O點,尚有他垂線OD,則$D\hat{O}A=\hat{R}$.然$C\hat{O}A=\hat{R}$,故$C\hat{O}A=D\hat{O}A$[普.公.(c)],即全量等於其一部.此為不可能[普.公.(a)],故在AB之O點垂直於AB之直線,除CO外,別無他線.




別證 設直線OD,以O為樞,由OA之位置,迴轉至OB之位置,則$D\hat{O}A$由零漸漸增大,而$D\hat{O}B$由$2\hat{R}$漸漸減小,其中必有一次$D\hat{O}A=D\hat{O}B$.設此時DO之位置為CO,則CO為AB之垂線;而如是之CO位置,顯然以一次為限.




7. 等角之餘角亦等.

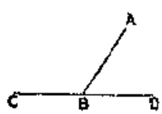
證 某角之餘角者,由直角減去其角而得之角也.而直角相等[5題],故等角之餘角亦等[普.公.(e)].

8. 等角之補角亦等.

證 某角之補角者,由二直角減去其角而得之角也.而二直角[平角]皆相等[3題],故等角之補角皆相等[普.公.(e)].

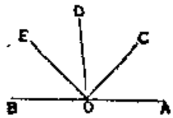
9. 一直線立於他一直線上,其所成鄰角之和,等於二直角.

證 設直線AB,立於他直線CD上,求證鄰角ABC, ABD之和,等於二直角.今鄰角ABC, ABD之和,為BC, BD所夾之角,而CBD為一直線,故其角為平角.故二角ABC, ABD之和等於平角,即等於二直角.



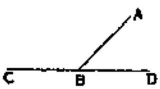
**10.** 由一直線上之一點，就其一側引若干直線,則其依次所成各鄰角之和,等於二直角.

證　由一直線 AOB 上之一點 O, 就其一側引若干直線 OC, OD, OE, 其所成各鄰角 AOC, COD, DOE, EOB 之和, 等於平角 AOB, 即等於 $2\hat{R}$.

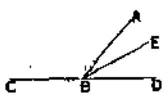



**11.** 一直線與他二直線所成鄰角之和,若等於二直角,則後二直線成一直線.

證　設直線 AB 與他二直線 BC,BD 所成鄰角 ABC, ABD 之和等於二直角,求證 BC, BD 成一直線. 今鄰角 ABC, ABD 之和,為 BC,BD 所夾之角,而二角 ABC, ABD 之和為二直角, 故 BC, BD 所夾之角等於二直角, 即平角. 故 BC, BD 成一直線.

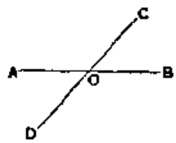



別證　設 BD 與 BC 不成一直線,而 BE 與 BC 成一直線, 則 AB 立於直線 CBE 上,故 $A\hat{B}C + A\hat{B}E = 2\hat{R}$ [9 題]. 然 $A\hat{B}C + A\hat{B}D = 2\hat{R}$ [假設], 故 $A\hat{B}C + A\hat{B}E = A\hat{B}C + A\hat{B}D$ [普. 公. ($c$)]. 故 $A\hat{B}E = A\hat{B}D$ [普. 公. ($e$)], 即全量等於其一部. 此為不可能 [普. 公. ($a$)]. 故 BD 與 BC 成一直線.



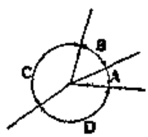

**12.** 二直線相交,其對頂角相等.

證　設二直線 AB, CD 交於 O, 求證 $A\hat{O}C$ 等於 $B\hat{O}D$, $B\hat{O}C$ 等於 $A\hat{O}D$. 今 AO 立於 CD 上,故鄰角 AOC, AOD 之和, 等於二直角 [9 題]. 又 DO 立於 AB 之上,故鄰角 AOD, DOB 之和等於二直角 [9 題]. 故二角 AOC, AOD 之和,等於二角 AOD, DOB 之和 [普. 公. ($c$)]. 由是可知, $A\hat{O}C$ 等於 $B\hat{O}D$, 仿此,得證 $B\hat{O}C$ 等於 $A\hat{O}D$.




**13.** 一點之周圍,有 A, B, C, D 四角. B 2倍於 A, C 3 倍於 B, D 等於 C, 則各角為直角之幾分之幾? 並以度數表之.

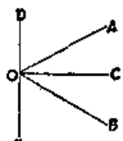
證　$B=2A$, $C=3B=6A$, $D=C$, 故 $A+B+C+D = A+2A+6A+6A = 15A$, 而 $A+B+C+D = 4\hat{R}$, 故 $15A = 4\hat{R}$, 因此 $A=\frac{4}{15}\hat{R}$. 故 $B=\frac{8}{15}\hat{R}$, $C=\frac{24}{15}\times\hat{R}=\frac{8}{5}\hat{R}$, 又 $D=C=\frac{8}{5}\hat{R}$.




又若以度數表之, 則 $A=90°\times\frac{4}{15}=24°$, $B=90°\times\frac{8}{15}=48°$, $C=90°\times\frac{8}{5}=144°$, $D=144°$.

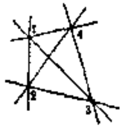
**14.** 過角之頂點,與此角之二等分線成直角之直線,與角之二邊成等角.

證　設過角 AOB 之頂點 O, 與角之二等分線 OC 成直角之直線為 DE. 此時 $C\hat{O}D = C\hat{O}E = \hat{R}$, $A\hat{O}C = B\hat{O}C$, 故 $A\hat{O}D = B\hat{O}E$, 即 DE 與 OA, OB 成等角.

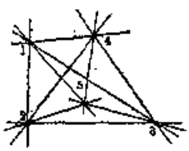



**15.** 四點最多得決定六直線,四直線最多得決定六點. 又五點最多得決定十直線, 五直線最多得決定十點.

證　(1)四點中各點與他三點聯結,可得十二直線. 然是等直線內,兩兩為一直線,故



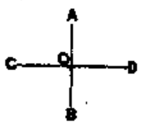
相異之直線，爲十二之半分，即六直線.而所設四點內,若有三點或四點在一直線上,則直線之數,皆少於六,故以六直線爲最多.次,設所設四直線,皆不平行,則各直線與他直線相交而得之點皆爲三,故共可得十二點.然是等點中,兩兩合一,故相異之點,爲十二之半分,即六.所設直線內,若有二線,或三線,或四線平行,則交點之數,皆少於六,故以六點爲最多數.



(2) 仿前推論,得證五點最多得決定4×5之半分,即十直線,五直線最多得決定十點.

**16.** 二直線相交,其所成之四角,若有一爲直角,則他三角亦爲直角.

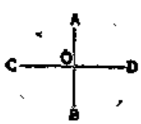
證 設AOB, COD爲二直線, AOC爲直角.



此時$A\hat{O}C$,$A\hat{O}D$之和等於二直角[9題],而$A\hat{O}C$爲直角[假設],故$A\hat{O}D$亦爲直角.根據同理,$D\hat{O}B$, $B\hat{O}C$亦各爲直角.

**17.** 會於一點之四直線,設其所成之角皆爲直角,則四直線成二直線.

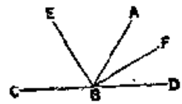
證 設會於一點O之四直線爲AO,CO,BO,DO,



其所成之角$A\hat{O}C$, $C\hat{O}B$, $B\hat{O}D$, $D\hat{O}A$皆爲直角.於是$A\hat{O}C$, $C\hat{O}B$,爲各直角,故$A\hat{O}C+C\hat{O}B=2\hat{R}$,故AO, BO成一直線[11題].根據同理,CO, DO亦成一直線.故四直線兩兩成一直線.

**18.** 一直線與他直線成二鄰角,各角之二等分線互爲垂線.

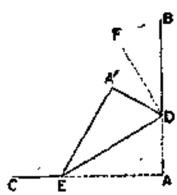
證 設$A\hat{B}C$, $A\hat{B}D$爲直線AB與CBD所成



之鄰角,BE, BF爲其二等分線,求證$E\hat{B}F$爲直角. BE爲$A\hat{B}C$之二等分線,故$A\hat{B}E=E\hat{B}C$;同理,$A\hat{B}F=F\hat{B}D$,故$E\hat{B}F=E\hat{B}C+F\hat{B}D$ [普.公.$(d)$].然$E\hat{B}F+E\hat{B}C+F\hat{B}D=2\hat{R}$[10題],故$E\hat{B}F$爲直角.

**19.** 斜折書籍之一頁,則其綫之二部分[由一綫所折成之二部分]所成角之二等分線,與折痕成直角.

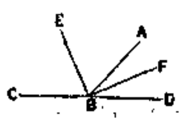
證 設一頁之書角爲A,斜折而至於A'之



位置,DE爲其折痕,一綫BDA折而爲DB,DA'二部分,其所成角之二等分線爲DF,求證DF與DE成直角.茲A折至A'之位置,故$A\hat{D}E=A'\hat{D}E$,因此DE爲$A\hat{D}A'$之二等分線,故$A'\hat{D}E+A'\hat{D}F=\hat{R}$[18題].

**20.** 二鄰角之二等分線,若互相垂直,則其所不共之二邊,成一直線.

證 設$A\hat{B}C$, $A\hat{B}D$爲共有頂點B之二



鄰角,其二等分線分別爲BE, BF,且BE垂直於BF,求證CB, BD成一直線.今

$A\hat{B}C = 2A\hat{B}E$, $A\hat{B}D = 2A\hat{B}F$, 故 $A\hat{B}C + A\hat{B}D = 2A\hat{B}E + 2A\hat{B}F = 2(A\hat{B}E + A\hat{B}F) = 2\hat{R}$. 故不共之二邊 CB, BD 成一直線 [11題].

**21.** 前題中 $E\hat{B}C$ 與 $F\hat{B}D$ 互為餘角, $A\hat{B}E$ 與 $D\hat{B}E$ 互為補角.

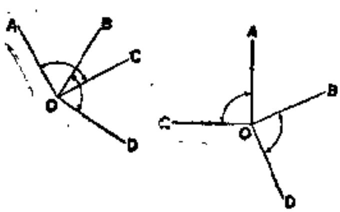
**證** $E\hat{B}C = \frac{1}{2}A\hat{B}C$, $F\hat{B}D = \frac{1}{2}A\hat{B}D$. 而 $A\hat{B}C + A\hat{B}D = 2\hat{R}$, 故 $E\hat{B}C + F\hat{B}D = \frac{1}{2}(A\hat{B}C + A\hat{B}D) = \hat{R}$. 又 $A\hat{B}E = E\hat{B}C$, 而 $E\hat{B}C + D\hat{B}E = 2\hat{R}$, 故 $A\hat{B}E + D\hat{B}E = 2\hat{R}$.

**22.** 六直線會於一點,成六等角,則各角為一直角之三分之二.

**證** 六角之和為一周角, 即 $4\hat{R}$, 故各角為 $4\hat{R}$ 之六分之一,即 $\hat{R}$ 之三分之二.

**23.** 二角 AOB, COD 公有一頂點 O, 邊 AO 與邊 BO 分別垂直於邊 CO 與邊 DO, 則 $A\hat{O}B$ 或等於 $C\hat{O}D$, 或為其補角.

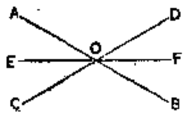
**證** 如 (1) 圖中, $A\hat{O}C = B\hat{O}D = \hat{R}$, 故雙方減




以 $B\hat{O}C$, 則其所餘之 $A\hat{O}B$ 與 $C\hat{O}D$ 相等. 如 (2)圖中, $A\hat{O}B + B\hat{O}D + D\hat{O}C + A\hat{O}C = 4\hat{R}$, 而 $A\hat{O}C$, $B\hat{O}D$ 各為直角,故 $A\hat{O}B + C\hat{O}D = 2\hat{R}$, 故即二角互為補角.

**24.** 二對頂角之二等分線,成一直線.

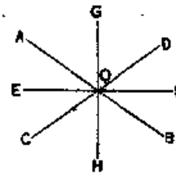
**證** 設二直線 AB, CD 交於 O, 二對頂角 AOC, BOD 之二等分線分別為 OE, OF. 此時 $A\hat{O}C = B\hat{O}D$, 故其各自之半分 $A\hat{O}E = B\hat{O}F$. 而




$A\hat{O}F + B\hat{O}F = 2\hat{R}$, 故 $A\hat{O}F + A\hat{O}E = 2\hat{R}$, 故 OE, OF 成一直線 [11題].

**25.** 相交二直線所成之四角,其二等分線成互相垂直之二直線.

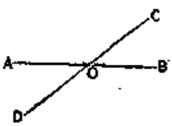
**證** 設二直線 AB, CD 交於 O, 其所成四角




之二等分線分別為 OE, OH, OF, OG, 於是依據前題, EO, OF 成一直線, GO, OH 亦成一直線, 且此二直線互相垂直 [18題].

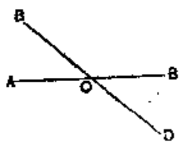
**26.** 四直線會於一點,若不相鄰之角相等,則此等直線,兩兩成一直線.

**證** 設四直線 AO, DO, BO, CO 會於一點 O, 其不相鄰之角相等, 即 $A\hat{O}D = B\hat{O}C$, $A\hat{O}C = B\hat{O}D$. 於是因 $A\hat{O}D = B\hat{O}C$, $A\hat{O}C = B\hat{O}D$, 故




四角之和,等於 $2\times(A\hat{O}D + A\hat{O}C)$. 然四角之和為 $4\hat{R}$, 故 $A\hat{O}D + A\hat{O}C = 2\hat{R}$, 故 CO, OD 成一直線[11題]. 同理, AO, OB 亦成一直線.

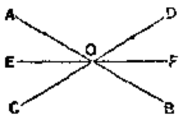
**27.** 二直線 OB, OD 與一直線 AC 會於同一點 O, 若在 AC 異側之二角 AOB, COD 相等, 則 BOD 成一直線.



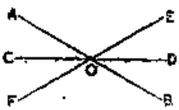

**證** $A\hat{O}B + B\hat{O}C = 2\hat{R}$, 然 $A\hat{O}B = C\hat{O}D$ 故 $C\hat{O}D + B\hat{O}C = 2\hat{R}$, 故 OB, OD 成一直線 [11題].

**28.** 二等分對頂角之一之直線，亦二等分他一對頂角。

解 設二直線AOB, COD交於O，而成對頂角AOC, BOD, $A\hat{O}C$之二等分線為EOF；求證此直線亦二等分他一角BOD. 蓋 $A\hat{O}E=B\hat{O}F$, $C\hat{O}E=D\hat{O}F$, 而 $A\hat{O}E=C\hat{O}E$, 故 $B\hat{O}F=D\hat{O}F$.



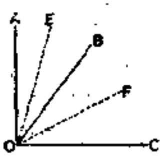

**29.** 二直線AO, BO, 在他直線CD之兩側，而與CD交於同點O，其所成角AOC, COB之和等於二直角. 引過O點之直線EOF, 則 $A\hat{O}F$ 等於 $B\hat{O}E$.




解 $A\hat{O}C+C\hat{O}B=2\hat{R}$, 故AO, OB成一直線[11題]. 因此 $A\hat{O}F$, $B\hat{O}E$ 為二直線AB, EF相交而生之對頂角，故相等[12題].

**30.** 相隣二角若互為餘角，則各角二等分線間之角，等於直角之半分.

解 設 $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ 互為餘角，其二等分線分別為OE, OF, 求證 $E\hat{O}F$ 為直角之半分. 蓋 $E\hat{O}B=\frac{1}{2}A\hat{O}B$, $B\hat{O}F=\frac{1}{2}B\hat{O}C$, 故 $E\hat{O}F=E\hat{O}B+B\hat{O}F=\frac{1}{2}(A\hat{O}B+B\hat{O}C)=\frac{1}{2}\hat{R}$.



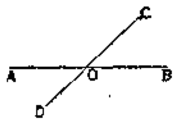

**31.** 設 $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ 為依次相隣之角，而其度數則 $A\hat{O}B=105°30'$, $BOC=15°20'$, $COD=69°10'$；問AO, OD成一直線否?

解 $A\hat{O}B+B\hat{O}C+C\hat{O}D=105°30'+15°20'+69°10'=190°$, 故AO, OD不成一直線.

**32.** 定理二直線相交，其對頂角相等之逆定理及倒定理如何?試證之.

解 此定理若改如下述，則其逆定理與倒定理，甚易知之.

四直線交於一點，若兩兩成一直線，則其二雙相對之角相等.



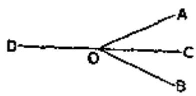

(逆定理) 四直線交於一點，若二雙相對之角相等，則四直線兩兩成一直線.

解 [同28題].

(倒定理) 四直線交於一點，若不兩兩成一直線，則其二雙相對之角不等. 何則，蓋若各雙相對之角相等，則四直線兩兩成一直線故也[前款].

**33.** 角之二邊，與其二等分線之延線成等角.

解 設 $A\hat{O}B$ 之二等分線CO之延線為DO，則 $A\hat{O}D$ 為 $A\hat{O}C$ 之補角，$B\hat{O}D$ 為 $B\hat{O}C$ 之補角. 然 $A\hat{O}C=B\hat{O}C$，故 $A\hat{O}D$, $B\hat{O}D$ 為相等角之補角，因此相等[8題].




**34.** 設直線AB之中點為M, P為內分點，則 $PM=\frac{1}{2}(AP\sim BP)$. 又設Q為外分點，則 $QM=\frac{1}{2}(AQ+BQ)$.

解 設P在M與B之間，則 $AP>BP$，且 $AP=AM+PM=BM+PM=2PM+BP$，故 $2PM=AP-BP$. 故 $PM=\frac{1}{2}(AP-BP)$. 若P在M與A之間，則 $PM=\frac{1}{2}(BP-AP)$. 故PM